

## Sur la structure circulaire des ensembles de points limites des sommes partielles d'une série de Taylor

JEAN-PIERRE KAHANE

*Pour le 70-ième anniversaire du Professeur Béla Sz.-Nagy*

On considère une série de Taylor

$$\sum_0^{\infty} c_j z^j$$

sur le cercle unité  $|z|=1$ , et on pose  $z=e^{ix}$ ,  $x$  réel. Les sommes partielles sont

$$S_n(x) = \sum_0^n c_j e^{ijx}.$$

On suppose que, pour  $x \in F$ , ensemble mesurable de mesure de Lebesgue  $|F| \neq 0$ , la série est sommable au sens  $(C, 1)$  vers une somme  $\sigma(x)$ , c'est-à-dire que les sommes de Fejér

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}$$

ont une limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = \sigma(x) \quad (x \in F).$$

Un célèbre théorème de Marcinkiewicz et Zygmund dit que presque partout sur  $F$  l'ensemble des points limites des  $S_n(x)$  est réunion de cercles (de rayons  $\geq 0$ ) centrés en  $\sigma(x)$  : c'est la «structure circulaire» ([1], p. 178). Le but de cet article est de préciser un peu la distribution des  $S_n(x)$ .

Nous considérerons que les  $S_n(x)$  prennent leurs valeurs dans  $\bar{C}$ , le plan  $C$  complété par un cercle à l'infini ; la convergence d'une suite complexe  $z_n$  dans  $\bar{C}$  équivaut à la convergence de la suite  $\frac{z_n}{1+|z_n|}$  dans  $C$ . A une suite complexe  $z_n$  et à un compact  $K \subset \bar{C}$  nous allons associer un nombre  $d((z_n), K)$  qu'on pourra

interpréter comme la densité supérieure des  $z_n$  au voisinage de  $K$ ; la définition précise fait intervenir des blocs  $B_m \subset \mathbb{N}$ , affectés de coefficients  $b_m$ , comme nous allons le voir un peu plus loin. Énonçons les résultats.

**Théorème.** *Pour presque tout  $x \in F$ , on a*

$$d((S_n(x)), K) = d((S_n(x)), K')$$

*pour tout couple de compacts  $K$  et  $K'$  de  $\bar{\mathbb{C}}$  obtenus l'un à partir de l'autre par rotation autour de  $\sigma(x)$ .*

**Corollaire 1.** *Pour toute suite d'entiers  $n_j \rightarrow \infty$ , l'ensemble des points limites dans  $\bar{\mathbb{C}}$  des  $S_{n_j}(x)$  a presque partout la structure circulaire (c'est-à-dire invariant par les rotations de centre 0).*

**Corollaire 2.** *Pour presque tout  $x \in F$ , on a*

$$d((S_n(x) - \sigma(x)), A) \cong \frac{1}{N} d((S_n(x)), \bar{\mathbb{C}})$$

*pour tout compact «angulaire»  $A = A\left(\frac{1}{N}, \varphi\right)$  de  $\bar{\mathbb{C}}$ , défini par  $z=0$  ou  $|\arg z - \varphi| \leq \frac{\pi}{N}$  ( $N$  entier  $\geq 1$ ,  $\varphi$  réel).*

**Complément.** Soit  $\Gamma$  un compact de  $\bar{\mathbb{C}}$  ayant la structure circulaire de centre 0. Pour presque tout  $x \in \Gamma$ , on a

$$d((S_n(x) - \sigma(x)), A \cap \Gamma) \cong \alpha d((S_n(x) - \sigma(x)), \Gamma),$$

*pour tout compact «angulaire»  $A = A(\alpha, \varphi)$  de  $\bar{\mathbb{C}}$  défini par  $z=0$  ou  $|\arg z - \varphi| \leq \pi\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\varphi$  réel).*

Définissons  $d((z_n), K)$ . On donne une suite de parties de  $\mathbb{N}$ , soit  $(B_m)$ , telle que  $\inf B_m \rightarrow \infty$ , et une suite  $(b_m)$  strictement positive (les cas les plus intéressants sont  $b_m = 1$ , et  $b_m = \text{card } B_m$ ). Pour chaque partie infinie de  $\mathbb{N}$ , soit  $A$ , on pose

$$d(A) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(B_m \cap A)}{b_m}.$$

Si  $b_m = \text{card } B_m$ , on a  $0 \leq d(A) \leq 1$  et  $d(\mathbb{N}) = 1$ . Si  $b_m = \text{card } B_m$  et  $B_m = [0, m]$ ,  $d(A)$  est la densité supérieure de  $A$  au sens ordinaire, c'est-à-dire

$$d(A) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\text{card}([0, m] \cap A)}{m}.$$

Si  $b_m = \text{card } B_m = 1$  et  $B_m = \{n_m\}$  ( $\lim_{m \rightarrow \infty} n_m = \infty$ ),  $d(A)$  égale 1 ou 0 suivant que  $A$  contient une infinité ou un nombre fini de points  $n_m$ . Dans le cas général, on a  $0 \leq d(A) \leq \infty$ .

Pour un ouvert  $G$  de  $\bar{C}$ , on pose

$$d((z_n), G) = d(\{n \in \mathbf{N} \mid z_n \in G\}).$$

On pose enfin

$$d((z_n), K) = \inf_{G \supset K} d((z_n), G)$$

la borne inférieure étant prise pour tous les ouverts  $G$  contenant  $K$ . On peut interpréter  $d((z_n), K)$  comme la borne supérieure des  $d(A)$  pour toutes les  $A$  telles que les points limites de  $(z_n)_{n \in A}$  se trouvent dans  $K$ , et il est facile de voir que cette borne supérieure est atteinte. Dans le cas  $b_m = \text{card } B_m$ , on a

$$0 \leq d((z_n), K) \leq d((z_n), \bar{C}) = 1.$$

Dans le cas général, on a

$$0 \leq d((z_n), K) \leq \infty, \quad d((z_n), K) \subset d((z_n), K') \quad \text{si } K \subset K',$$

$$d((z_n), K \cup K') \leq d((z_n), K) + d((z_n), K').$$

La dernière inégalité donne tout de suite le corollaire 2 à partir du théorème. Dans le cas  $b_m = \text{card } B_m = 1$  et  $B_m = \{n_m\}$  ( $\lim_{m \rightarrow \infty} n_m = \infty$ ), on a  $d((z_n), K) = 1$  ou  $0$  suivant que la suite  $(z_{n_m})$  admet un point limite dans  $K$  ou non. Le théorème dit alors que pour presque tout  $x \in F$  l'ensemble des points limites de la suite  $(S_{n_m}(x))$  est invariant par les rotations autour de  $\sigma(x)$ ; c'est le corollaire 1.

Le complément se démontre comme le corollaire 2 quand  $\frac{1}{\alpha}$  est entier. Pour le cas général, on a besoin d'une variante des définitions et du théorème, que voici. Si  $g$  est une fonction continue sur  $\bar{C}$ , on pose

$$d((z_n), g) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{b_m} \sum_{n \in B_m} g(z_n).$$

Si  $k$  est une somme finie de fonctions indicatrices de compacts, on pose

$$d((z_n), k) = \inf_{g \cong k} d((z_n), g).$$

On a, pour presque tout  $x \in F$ ,

$$d((S_n(x) - \sigma(x)), k) = d(S_n(x) - \sigma(x), k')$$

pour tout couple de fonctions  $k, k'$  obtenues l'une à partir de l'autre par rotation de centre 0: c'est la variante du théorème dont on a besoin. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cet énoncé (qui se démontre comme le théorème) et d'en déduire le complément.

Démontrons le théorème. La clé est une formule de Marcinkiewicz et Zygmund, dont nous indiquerons rapidement la démonstration pour la commodité du lecteur.

Lemme fondamental. Si  $x \in F$  et  $\alpha_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ ,

$$S_n(x + \alpha_n) - \sigma(x) = (S_n(x) - \sigma(x))e^{in\alpha_n} + o(1).$$

Preuve. On peut supposer  $x=0$  et  $\sigma(0)=0$ , et poser  $\alpha_n = \frac{\beta}{n}$  ( $\beta = \beta_n = O(1)$ ).

La formule à prouver est

$$\sum_0^n c_j (e^{ij\alpha_n} - e^{i\beta}) = o(1)$$

soit

$$\sum_0^n c_j \left(1 - \exp\left(i\beta\left(1 - \frac{j}{n}\right)\right)\right) = o(1).$$

Or l'hypothèse  $0 \in F$  et  $\sigma(0)=0$  signifie

$$\sum_0^n c_j \varphi\left(\frac{j}{n}\right) = o(1)$$

pour  $\varphi(x) = \inf(1-x, 0)$ , donc, de façon uniforme, pour toutes les fonctions  $\varphi(x)$  bornées sur  $\mathbf{R}^+$ , convexes, et tendant vers 0 à l'infini. Or la fonction

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 - \exp(i\beta(1-x)) & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (x \geq 1) \end{cases}$$

est une combinaison linéaire de telles fonctions  $\varphi$ , soit

$$\psi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + i\varphi_3(x) - i\varphi_4(x)$$

avec  $\sup \varphi_j(x) = O(1)$  si  $\beta = O(1)$ . La formule est donc établie.

En vue d'énoncer une proposition d'où le théorème se déduira aisément, voici encore quelques notations:

$$A_x(D) = \{n \mid S_n(x) \in D\},$$

$$E(D, d, v) = \{x \mid \forall m \geq v \text{ card}(B_m \cap A_x(D)) \leq db_m\}, \quad E(D, d) = \bigcup_v E(D, d, v).$$

Ainsi  $x \notin E(D, d)$  signifie qu'il existe une suite  $m_j \rightarrow \infty$  telle que  $\text{card}(B_{m_j} \cap A_x(D)) > db_{m_j}$ .

**Proposition.** Soit  $D$  un ouvert dans  $\overline{\mathbf{C}}$ ,  $d \geq 0$  et  $v$  entier  $\geq 1$ . Si  $x$  ( $x \in F$ ) est un point de densité de  $E(D, d, v)$  et si  $D'$  est un ouvert tel que, par une rotation convenable de centre  $\sigma(x)$ ,  $\overline{D'}$  (adhérence de  $D'$  dans  $\overline{\mathbf{C}}$ ) soit appliqué dans  $D$ , alors  $x \in E(D', d)$ .

Preuve. C'est la même que dans [1]. Soit  $\beta$  l'angle d'une rotation de centre  $\sigma(x)$  appliquant  $\overline{D'}$  dans  $D$ . Comme  $x$  est point de densité de  $E(D, d, v)$ , il

existe une suite  $\alpha_n = \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$  telle que  $x + \alpha_n \in E(D, d, \nu)$ . Le lemme fondamental montre que  $x \notin E(D', d)$  entraînerait  $x \notin E(D, d)$ , ce qui est impossible puisque  $x \in E(D, d, \nu)$ .

Achevons la démonstration du théorème.

Les disques «rationnels» et les angles «rationnels» forment une base dénombrable d'ouverts de  $\bar{\mathbb{C}}$ . Prenons désormais pour  $D$  une réunion finie de disques rationnels et d'angles rationnels, et posons

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}((B_m), (b_m)) = \bigcup_{D, d, \nu} (E(D, d, \nu) - \mathcal{D}(E(D, d, \nu)))$$

où  $D$  parcourt les ouverts en question,  $d$  les rationnels  $\geq 0$ , et  $\nu$  les entiers  $\geq 1$ , et où  $\mathcal{D}(\ )$  désigne l'ensemble des points de densité. Comme la réunion est dénombrable,  $\mathcal{E}$  est un ensemble de mesure nulle.

Montrons que si  $x \in F$  et  $x \notin \mathcal{E}$  on a la conclusion du théorème. En effet, si la conclusion était en défaut, on aurait

$$d((S_n(x), K) < d < d((S_n(x), K')$$

avec  $d$  rationnel,  $K$  et  $K'$  compacts transformés l'un dans l'autre par une rotation de centre  $\sigma(x)$ . On pourrait alors choisir un  $D \supset K$  et un  $D' \supset K'$  vérifiant les hypothèses de la proposition, et tels que

$$d((S_n(x), D) < d < d((S_n(x), D'),$$

c'est-à-dire

$$d(A_x(D)) < d < d(A_x(D')),$$

d'où

$$x \in E(D, d), \quad x \notin E(D', d)$$

ce qui est impossible d'après la proposition. Le théorème est démontré.

### Littérature

[1] A. ZYGMUND, *Trigonometric series*, vol. II, Cambridge Univ. Press (1959).

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD  
ÉQUIPE DE RECHERCHE ASSOCIÉE AU CNRS (296)  
ANALYSE HARMONIQUE  
MATHÉMATIQUE (BAT. 425,  
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE