Acta Sci. Math., 45 (1983), 409—413

Über einen Zusammenhang zwischen der Grössenordnung der Partialsummen der Fourierreihe und der Integrabilitätseigenschaft der Funktionen

KÁROLY TANDORI

Herrn Professor Béla Szőkefalvi-Nagy zum 70. Geburtstag gewidmet

Es sei Φ die Klasse der Funktionen φ mit $\varphi(0)=1$, die im Intervall $[0, \infty)$ zweimal differentierbar, monoton wachsend und von unten konkav sind, und für die

$$\varphi(x) \geqq c_1 \log\log x \quad (x\in[0, \infty)), \quad \varphi(x) = o(\log x) \quad (x \to \infty)$$

erfüllt sind. ($c_1, c_2, \ldots$ bezeichnen positive Konstanten.) Für eine $\varphi\in\Phi$ sei $L\varphi(L)$ die Klasse der meßbaren Funktionen f mit $\int_0^{2\pi} |f(x)|\varphi(|f(x)|)dx<\infty$. Die n-te Partialsumme der Fourierreihe der Funktion $f\in L(0, 2\pi)$ bezeichnen wir mit $s_n(f; x)$.

In dieser Note werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz. *Es sei $\varphi\in\Phi$. Gibt es eine Funktion $f\in L(0, 2\pi)$ derart, daß*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(n)} |s_n(f;\ x)| > 0 \tag{1}$$

in einer Menge vom positiven Maß gilt, dann für jede positive Zahl $\varepsilon(<1)$ gibt es eine meßbare Funktion F mit

$$\int_0^{2\pi} |F(x)|\, \varphi^{1-\varepsilon}(|F(x)|)\, dx < \infty,$$

daß die Fourierreihe von F fast überall divergiert.

Betreffs des Satzes bemerken wir folgendes. Nach einem bekannten Satz (s. z. B. [6], Vol. I., S. 66.), im Falle $f\in L(0, 2\pi)$ gilt $s_n(f; x)=o(\log n)$ fast überall. Weiterhin, nach einem bekannten Satz (YUNG-MING CHEN [4]), für jede positive,

Eingegangen am 5. November 1981.

monoton wachsende Folge $\varphi(n)$ mit $\varphi(n)=o(\log\log n)$ gibt es eine Funktion $f\in L(0, 2\pi)$, für die (1) fast überall gilt.

Andererseits hat P. Sjölin [2] bewiesen, daß im Falle $f\in L(\log^+ L)(\log^+\log^+ L)$ die Fourierreihe von f fast überall konvergiert. (α^+ bezeichnet den positiven Teil von α.) Weiterhin, nach einem bekannten Satz (s. z. B. Yung-Ming Chen [5]) für jede positive Zahl $\varepsilon(<1)$ gibt es eine Funktion $f\in L(\log^+\log^+ L)^{1-\varepsilon}$ derart, daß die Fourierreihe von f fast überall divergiert.

Aus dem Satz folgt die folgende Behauptung.

Gibt es eine Funktion $\varphi\in\Phi$ mit der Eigenschaft, daß aus $f\in L\varphi(L)$ die Konvergenz fast überall der Fourierreihe von f folgt, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\varphi^{1+\varepsilon}(n)}s_n(f;\ x)=0$ *für jede* $\varepsilon>0$ *und für jede* $f\in L(0, 2\pi)$ *fast überall.*

Beweis des Satzes. Es sei Z_k die Menge der positiven ganzen Zahlen n, für die $2^k\leqq\varphi(n)<2^{k+1}$ $(k=0, 1, \ldots)$ gilt. Auf Grund der Definition von Φ gibt es eine nichtnegative ganze Zahl k_0, daß im Falle $k\geqq k_0$ $Z_k\neq\emptyset$ ist; die Elemente von Z_k bezeichnen wir in natürlicher Anordnung mit $n_k, n_k+1, \ldots, n_{k+1}-1$ $(k=k_0, k_0+1, \ldots)$. Weiterhin, auf Grund der Definition von Φ gibt es eine nichtnegative ganze Zahl k_1 $(\geqq k_0)$, daß $n_{k+1}/n_k\geqq q>1$ $(k=k_1, k_1+1, \ldots)$ auch besteht.

Auf Grund der Voraussetzung des Satzes gibt es eine positive Zahl m und eine meßbare Menge $E(\subseteqq(0, 2\pi))$ mit $\operatorname{mes} E>0$ derart, daß

(2) $$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi(n)}|s_n(f;\ x)|>m\quad(x\in E)$$

gilt. Es sei

$$E_k=\left\{x\in(0, 2\pi):\ \max_{n_k\leqq n<n_{k+1}}\frac{1}{\varphi(n)}|s_n(f;\ x)|>\frac{m}{2}\right\}\quad(k=k_1, k_1+1, \ldots).$$

Dann ist

(3) $$\sum_{k=k_1}^{\infty}\operatorname{mes} E_k=\infty.$$

Im entgegengesetzten Falle existiert nähmlich für fast jeden x eine von x abhängige positive ganze Zahl $m(x)$ mit

$$\frac{1}{\varphi(n)}|s_n(f;\ x)|\leqq\frac{m}{2}\quad(n\geqq n(x)),$$

woraus

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{\varphi(n)}|s_n(f;\ x)|\leqq\frac{m}{2}$$

fast überall folgt, was (2) widerspricht. Weiterhin aus (3) folgt, daß es eine nichtnegative ganze Zahl i^* $(0 \leqq i^* \leqq 2)$ derart existiert, daß

$$\sum_{i=i^{**}}^{\infty} \operatorname{mes} E_{3i+i^*} = \infty \tag{4}$$

gilt, wobei i^{**} die kleinste positive ganze Zahl bezeichnet, für die $3i^{**}+i^* \geqq k_1$ besteht.

Wir setzen für $i=i^{**}, i^{**}+1, \ldots$

$$T_i(x) = \frac{1}{\varphi(n_{3i+i^*})}\left(V_{n_{3i+i^*+1}, n_{3i+i^*+2}}(f;\ x) - V_{n_{3i+i^*-1}, n_{3i+i^*}}(f;\ x)\right),$$

wobei im Falle $n<m$

$$V_{n,m}(f;\ x) = s_n(f;\ x) + \sum_{k=n+1}^{m}\left(1-\frac{k-n}{m-n}\right)(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

die verallgemeinerte de la Vallée Poussinsche Mittel der Fourierreihe

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

bezeichnet. Die n-te $(C, 1)$-Mittel dieser Fourierreihe bezeichnen wir mit $\sigma_n(f; x)$. Da im Falle $n<m$ $V_{n,m}(f; x)=\frac{m-1}{m-n}\sigma_{m-1}(f;\ x)-\frac{n-1}{m-n}\sigma_{n-1}(f;\ x)$ ist, und im Falle $f\in L(0, 2\pi)$ $a_n(f), b_n(f)=o(1)$ $(n\to\infty)$, weiterhin

$$\int_0^{2\pi} |\sigma_n(f;\ x)|\, dx \leqq c_2 \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

bestehen (s. z. B. [6], Vol. I., S. 52., bzw. S. 137.), auf Grund der Definition von n_k und $T_i(x)$ ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} |T_i(x)|(\varphi(|T_i(x)|))^{1-\varepsilon}\, dx \leqq \tag{5}$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} |V_{n_{3i+i^*+1}, n_{3i+i^*+2}}(f;\ x) - V_{n_{3i+i^*-1}, n_{3i+i^*}}(f;\ x)| \frac{\varphi^{1-\varepsilon}(c_3 n_{3i+i^*+2})}{\varphi(n_{3i+i^*})}\, dx \leqq$$

$$\leqq \frac{c_4}{(2^{3i+i^*})^{\varepsilon}} \quad (i = i^{**}, i^{**}+1, \ldots).$$

Aus (4), auf Grund eines bekannten Satzes (s. z. B. [6], Vol. II., S. 165.) gibt es eine Folge $\{x_i\}_{i=i^{**}}^{\infty}$ von reellen Zahlen derart, daß für die Menge

$$F_i = \{x+x_i\colon\ x\in E_{3i+i^*}\} \quad (i = i^{**}, i^{**}+1, \ldots)$$

$$\operatorname{mes} \overline{\lim_{i\to\infty}} F_i = 2\pi \tag{6}$$

ist.

Es sei

$$\sum_{i=i^{**}}^{\infty} r_i(t)T_i(x-x_i), \tag{7}$$

wobei $r_i(t)=\operatorname{sign}\sin 2^i\pi t$ die i-te Rademachersche Funktion bezeichnet. Die n-te Partialsumme der trigonometrischen Reihe (7) bezeichnen wir mit $R_n(x, t)$. Aus (5) folgt

$$\sum_{i=i^{**}}^{\infty} \int_0^{2\pi} |r_i(t)T_i(x-x_i)|(\varphi(|r_i(t)T_i(x-x_i)|))^{1-\varepsilon}\,dx \leqq c_4 \sum_{i=i^{**}}^{\infty} \frac{1}{(2^{3i+i^*})^\varepsilon} < \infty,$$

woraus wegen $\varphi(x)\geqq 1$ $(x\geqq 0)$ erhalten wir, daß die Reihe (7) bei jedem t fast überall zu einer Funktion $f_t(x)\in L(0, 2\pi)$ konvergiert, und die Reihe (7) die Fourierreihe von $f_t(x)$ ist.

Wir werden eine bekannte Methode anwenden. (S. [3].) Es sei $\Phi_\varepsilon(x)=x(\varphi(x))^{1-\varepsilon}$ und $\psi_\varepsilon(x)=\Phi_\varepsilon(\sqrt{x})$ $(x\geqq 0)$. Man kann leicht zeigen, daß $\psi_\varepsilon(x)$ auch eine von unten konkave Funktion in $[0, \infty)$ ist. Durch Anwendung der Jensenschen Ungleichung und auf Grund der Voraussetzungen über φ ergibt sich

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \Phi_\varepsilon(|R_{n_{3i_2+i^*+2}}(x, t)-R_{n_{3i_1+i^*-1}}(x, t)|)\,dx\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 \Phi_\varepsilon(|R_{n_{3i_2+i^*+2}}(x, t)-R_{n_{3i_1+i^*-1}}(x, t)|)\,dt\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 \psi_\varepsilon((R_{n_{3i_2+i^*+2}}(x, t)-R_{n_{3i_1+i^*-1}}(x, t))^2)\,dt\Big)\,dx \leqq$$

$$\leqq \int_0^{2\pi} \psi_\varepsilon\Big(\int_0^1 (R_{n_{3i_2+i^*+2}}(x, t)-R_{n_{3i_1+i^*-1}}(x, t))^2\,dt\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \psi_\varepsilon\Big(\sum_{i=i_1}^{i_2} T_i^2(x-x_i)\Big)\,dx \leqq \sum_{i=i_1}^{i_2}\int_0^{2\pi} \psi_\varepsilon(T_i^2(x-x_i))\,dx =$$

$$= \sum_{i=i_1}^{i_2}\int_0^{2\pi} \Phi_\varepsilon(|T_i(x)|)\,dx \leqq c_4 \sum_{i=i_1}^{i_2} \frac{1}{(2^{3i+i^*})^\varepsilon} \leqq c_5 \frac{1}{(2^{3\varepsilon})^{i_1}} \quad (i_1 < i_2)$$

auf Grund (5). Für $i_2\to\infty$ erhalten wir

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \Phi_\varepsilon(|f_t(x)-R_{n_{3i_1+i^*-1}}(x, t)|)\,dx\,dt \leqq c_5 \frac{1}{(2^{3\varepsilon})^{i_1}} \quad (i_1 = i^{**}, i^{**}+1, \ldots).$$

Daraus folgt

$$\int_0^{2\pi} \Phi_\varepsilon(|f_t(x)-R_{n_{3i_1+i^*-1}}(x, t)|)\,dx \to 0 \quad (i_1 \to \infty)$$

bei fast jedem t. Wegen $\Phi_\varepsilon(2x) \leqq c_6 \Phi_\varepsilon(x)$ $(x \geqq 0)$ ist $R_{n_{3i_1+i^*-1}}(x, t) \in L(\varphi(L))^{1-\varepsilon}$ für jedes t, auf Grund von (5), und so gilt $f_t(x) \in L(\varphi(L))^{1-\varepsilon}$ bei fast jedem t. Es gibt also eine Zahl t_0 derart, daß die Reihe (7) im Falle $t=t_0$ die Fourierreihe einer Funktion $F(x)=f_t(x)$ ist, und $F \in L(\varphi(L))^{1-\varepsilon}$ besteht; wir können auch $r_i(t_0) \neq 0$ $(i=i^{**}, i^{**}+1, \ldots)$ annehmen.

Auf Grund der Definition von F gilt für $i=i^{**}, i^{**}+1, \ldots$

$$\max_{n_{3i+i^*} \leqq n < n_{3i+i^*+1}} |s_n(F; x) - s_{n_{3i+i^*}}(F; x)| =$$

$$= \max_{n_{3i+i^*} \leqq n < n_{3i+i^*+1}} |s_n(f; x) - s_{n_{3i+i^*}}(f; x)| \frac{1}{\varphi(n_{3i+i^*})} \geqq$$

$$\geqq \max_{n_{3i+i^*} \leqq n < n_{3i+i^*+1}} \frac{|s_n(f; x)|}{\varphi(n)} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n_{3i+i^*})} - \frac{|s_{n_{3i+i^*}}(f; x)|}{\varphi(n_{3i+i^*})}.$$

Da $n_{3(i+1)+i^*}/n_{3i+i^*} \geqq q > 1$ $(i=i^{**}, i^{**}+1, \ldots)$ gilt, auf Grund eines Satzes von R. A. Hunt [1]

$$s_{n_{3i+i^*}}(f; x) = o(\log\log n_{3i+i^*}) = o(\varphi(n_{3i+i^*}))$$

fast überall besteht. Daraus, und aus (2) erhalten wir, daß im Falle $x \in \overline{\lim_{i \to \infty}} F_i$

$$\max_{n_{3i+i^*} \leqq n < n_{3i+i^*+1}} |s_n(F; x) - s_{n_{3i+i^*+1}-1}(F; x)| \geqq \frac{m}{2} - o_x(1)$$

für unendlich vieles i erfüllt ist. Daraus und aus (6) folgt, daß

$$\overline{\lim_{n, m \to \infty}} |s_n(F; x) - s_m(F; x)| > 0$$

fast überall besteht.

Schriftenverzeichnis

[1] R. A. Hunt, An estimate of conjugate function, *Studia Math.*, **44** (1972), 371—377.

[2] P. Sjölin, An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh—Fourier series, *Ark. Mat.*, 7 (1969), 551—570.

[3] E. M. Stein, On limits of sequences of operators, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 140—170.

[4] Yung-Ming Chen, On Kolmogoroff's divergent Fourier series, *Arch. Math. (Basel)*, **14** (1963), 116—119.

[5] Yung-Ming Chen, An almost everywhere divergent Fourier series of the class $L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$, *J. London Math. Soc.*, **44** (1969), 643—654.

[6] A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol. I—II, University Press (Cambridge, 1959).

BOLYAI INSTITUT
JÓZSEF ATTILA UNIVERSITÄT
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, UNGARN