Acta Sci. Math., 47 (1984), 189—200

Unbedingte Konvergenz der Orthogonalreihen

KÁROLY TANDORI

1. In der Arbeit [1] haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Satz A. *Es sei* $\{a_n\}_1^\infty$ *eine monoton abnehmende Folge von positiven Zahlen mit*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=2^{2^\nu}+1}^{2^{2^{\nu+1}}} a_n^2 \log^2 n} = \infty. \tag{1}$$

Dann gibt es ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *der Treppenfunktionen im Interval* (0, 1) *derart, dass die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

eine Anordnung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) \tag{3}$$

ihrer Glieder besitzt, die fast überall in (0, 1) *divergiert.*

In dieser Note werden wir einen ziemlich einfacheren Beweis auf diesen Satz geben.

Es sei $N_\nu = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2^\nu}$ $(\nu = 0, 1, \ldots)$. Es ist klar, dass für eine monoton abnehmende Folge $\{a_n\}_1^\infty$ von positiven Zahlen die Bedingung (1) mit der Bedingung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} a_n^2 \log^2 n} = \infty \tag{4}$$

äquivalent ist. Weiterhin aus (4) folgt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} \bar{a}_n^2 \log^2 n} = \infty,$$

Eingegangen am 8. December 1982.

wobei

$$\bar{a}_n = a_{N_\nu+2^{2\nu}+1} \quad (N_\nu < n \leqq N_\nu + 2\cdot 2^{2\nu};\ \nu = 0, 1, \ldots),$$

$$\bar{a}_n = a_{N_\nu+2^{2\nu+s+1}}$$

$$(N_\nu + 2^s\cdot 2^{2\nu} < n \leqq N_\nu + 2^{s+1}\cdot 2^{2\nu};\ s = 1, \ldots, 2^\nu - 1,\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

ist. Für diese Folge gilt $\bar{a}_n \leqq a_n$ $(n=3, 4, \ldots)$.

Nach Obigen und nach einem bekannten Satz (s. [2], Satz III) ist es genug den folgenden Satz zu beweisen.

Satz B. *Es sei* $\{a_n\}_1^\infty$ *eine monoton abnehmende Folge von positiven Zahlen mit* (4), *für die*

$$a_n = a_{N_\nu+2^{2\nu}+1} \quad (N_\nu < n \leqq N_\nu + 2\cdot 2^{2\nu};\ \nu = 0, 1, \ldots);$$

$$a_n = a_{N_\nu+2^{2\nu+s+1}} \tag{5}$$

$$(N_\nu + 2^s\cdot 2^{2\nu} < n \leqq N_\nu + 2^{s+1}\cdot 2^{2\nu};\ s = 1, \ldots, 2^\nu - 1;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

ist. Dann gibt es ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ *von Treppenfunktionen in* (0, 1) *derart, dass die Reihe* (2) *eine Anordnung* (3) *ihrer Glieder besitzt, die fast überall in* (0, 1) *divergiert.*

2. Zum Beweis des Satzes B benötigen wir gewisse Hilfssätze.

Für eine Folge $b=\{b_n\}_1^\infty$ setzen wir

$$\|b\| = \sup_\varphi \sqrt{\int_0^1 \sup_{1\leqq i\leqq j} \left(\sum_{n=i}^{j} b_n \varphi_n(x)\right)^2 dx},$$

wobei das Supremum für jedes orthonormierte System $\varphi=\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ in (0, 1) gebildet wird. $C_1, C_2, \ldots$ bezeichnen positive Konstante.

Hilfssatz I. *Für jede Folge* $b=\{b_n\}_1^\infty$ *mit* $|b_n| \geqq |b_{n+1}|$ $(n=1, 2, \ldots)$ *gilt*

$$\|b\| \geqq C_1 \left(b_1^2 + \sum_{n=2}^{\infty} b_n^2 \log^2 n\right)^{1/2} \quad (C_1 \leqq 1).$$

Hilfssatz I ist bekannt. (S. [2], Satz VII.)

Hilfssatz II. *Für jede Folge* $b=\{b_1, \ldots, b_N, 0, \ldots\}$ *gibt es ein orthonormiertes System* $\{\Psi_n(x)\}_1^N$ *der Treppenfunktionen in* (0, 1) *und eine einfache Menge* E $(\subseteqq(0, 1))$

derart, dass

$$\max_{1 \leqq m \leqq N} (b_1 \Psi_1(x) + \dots + b_m \Psi_m(x)) \geqq C_2 \|b\| \quad (x \in E) \quad (C_2 \leqq 1), \tag{6}$$

$$\operatorname{mes} E \geqq C_3 \quad (C_3 \leqq 1) \tag{7}$$

erfüllt sind.

(Eine Menge wird einfach genannt, wenn sie die Vereinigung endlichvieler Intervalle ist.)

Hilfssatz II ist eine einfache Folgerung von [2], Hilfssatz VIII.

Hilfssatz III. *Es seien b eine Zahlenfolge und N eine positive ganze Zahl derart, dass*

$$\sum_{n=1}^{N} b_n^2 \leqq \frac{C_2^2 C_3}{8} \|b\|^2. \tag{8}$$

Dann gibt es ein orthonormiertes System $\{\Psi_n(x)\}_1^N$ *der Treppenfunktionen in* $(0, 1)$ *und paarweise disjunkte Intervalle* $I_1, \dots, I_N$ $(\subseteqq (0, C_3/8))$ *mit* $\operatorname{mes} I_i = C_3/8N$ $(i=1, \dots, N)$ *derart, dass mit gewissen Indizes* m_i $(1 \leqq m_i \leqq N)$

$$\left.\begin{aligned} b_1 \Psi_1(x) + \dots + b_{m_i} \Psi_{m_i}(x) &\geqq \frac{C_2}{2} \|b\|, \\ b_{m_i+1} \Psi_{m_i+1}(x) + \dots + b_N \Psi_N(x) &\leqq -\frac{C_2}{2} \|b\| \end{aligned}\right\} \quad (x \in I_i)$$

$(i=1, \dots, N)$ *erfüllt sind.*

Beweis des Hilfssatzes III. Durch Anwendung des Hilfssatzes II gibt es ein orthonormiertes System $\{\psi_n(x)\}_1^N$ der Treppenfunktionen in $(0, 1)$ und eine einfache Menge $E(\subseteqq (0, 1))$ mit (6) und (7). Es sei

$$G = \left\{ x \in (0, 1) : \left| \sum_{n=1}^{N} b_n \Psi_n(x) \right| \geqq \frac{C_2}{2} \|b\| \right\}.$$

G ist einfach und nach der Tschebyschevschen Ungleichung folgt

$$\operatorname{mes} G \leqq 4 \frac{\sum_{n=1}^{N} b_n^2}{C_2^2 \|b\|^2} \leqq \frac{C_3}{2}$$

auf Grund von (8). Für jedes $x \in (0, 1)$ sei $i(x)$ die kleinste positive ganze Zahl mit

$$b_1 \Psi_1(x) + \dots + b_{i(x)} \Psi_{i(x)}(x) = \max_{1 \leqq m \leqq N} (b_1 \Psi_1(x) + \dots + b_m \Psi_m(x)),$$

und sei $H_i=\{x\in=(0,1): i(x)=i\}$ $(i=1,\dots,N)$. Wir setzen $H_i^*=H_i\setminus G$ $(i=1,\dots,N)$. Offensichtlich sind die Mengen H_i^* einfach, paarweise disjunkt, weiterhin gelten

$$\operatorname{mes}\bigcup_{i=1}^{N} H_i^* \geqq \frac{C_3}{2},$$

$$\left.\begin{aligned} b_1\Psi_1(x)+\dots+b_i\Psi_i(x) &\geqq \frac{C_2}{2}\|b\|,\\ b_{i+1}\Psi_{i+1}(x)+\dots+b_N\Psi_N(x) &\leqq -\frac{C_2}{2}\|b\| \end{aligned}\right\} \quad (x\in H_i^*)$$

$(i=1,\dots,N)$. Ferner gibt es solche umkehrbar eindeutige, messtreue Transformation T_1 von $(0,1)$ auf sich selbst derart, dass jede Menge $\bar H_i=T_1H_i^*$ $(i=1,\dots,N)$ ein Intervall ist, die Funktionen $\bar\Psi_n(x)=\Psi_n(T_1^{-1}x)$ $(n=1,\dots,N)$ Treppenfunktionen sind, und sie ein orthonormiertes System in $(0,1)$ bilden. Es seien $1\leqq i_1<\dots<i_\varrho\leqq N$ die Indizes i, für die $\operatorname{mes}\bar H_i\geqq C_3/4N$ bestehen. Offensichtlich besteht

$$\sum_{r=1}^{\varrho}\operatorname{mes}\bar H_{i_r}\geqq\frac{C_3}{4}.$$

Dann gilt

$$\operatorname{mes}\bar H_{i_r}=\bar\alpha_r\frac{C_3}{8N}+\beta_r\frac{C_3}{8N};$$

wobei $\bar\alpha_r$ eine positive ganze Zahl und $0\leqq\beta_r<1$ $(r=1,\dots,\varrho)$ ist. Es sei $\bar{\bar H}_{i_r}$ ein Teilintervall von $\bar H_{i_r}$ mit

$$\operatorname{mes}\bar{\bar H}_{i_r}=\bar\alpha_i\frac{C_3}{8N}\quad(r=1,\dots,\varrho).$$

Dann besteht

$$\sum_{r=1}^{\varrho}\operatorname{mes}\bar{\bar H}_{i_r}=(\bar\alpha_1+\dots+\bar\alpha_\varrho)\frac{C_3}{8N}\geqq\frac{C_3}{8},$$

woraus $\bar\alpha_1+\dots+\bar\alpha_\varrho\geqq N$ folgt. Es seien $\alpha_1,\dots,\alpha_\varrho$ positive ganze Zahlen mit $\alpha_r\leqq\leqq\bar\alpha_r$ $(r=1,\dots,\varrho)$ und $\alpha_1+\dots+\alpha_\varrho=N$. Weiterhin sei J_r ein Teilintervall von $\bar{\bar H}_{i_r}$ mit $\operatorname{mes}J_r=C_3\alpha_r/8N$ $(r=1,\dots,\varrho)$. Dann gilt

$$\sum_{r=1}^{\varrho}\operatorname{mes}J_r=\frac{C_3}{8}.$$

Wir teilen das Intervall J_r in α_r paarweise disjunkte Teilintervalle $J_r^{(l)}$ $(l=1,\dots,\alpha_r)$ mit

$$\operatorname{mes}J_r^{(l)}=\frac{C_3}{8N}\quad(l=1,\dots;\alpha_r,\ r=1,\dots,\varrho).$$

Die Intervalle $J_r^{(l)}$ ($l=1, \dots, \alpha_r$; $r=1, \dots, \varrho$) bezeichnen wir der Reihe nach mit $\bar{I}_1, \dots, \bar{I}_N$. Offensichtlich gibt es solche umkehrbar eindeutige, messtreue Transformation T_2 von $(0, 1)$ auf sich selbst derart, dass jede Menge $I_i = T_2 \bar{I}_i$ ($i=1, \dots, N$) ein Intervall ist, die Funktionen $\Psi_n(x) = \bar{\Psi}_n(T_2^{-1}x)$ ($n=1, \dots, N$) Treppenfunktionen sind, und sie ein orthonormiertes System in $(0, 1)$ bilden, weiterhin $\bigcup_{i=1}^{N} I_i = (0, C_3/8)$ erfüllt ist.

Für diese Funktionen $\Psi_n(x)$ ($n=1, \dots, N$) und für diese Intervalle I_i ($i=1, \dots, N$) sind alle Forderungen des Hilfssatzes III erfüllt.

Auf Grund der Bedingungen des Satzes B gibt es eine ganze Zahl σ (0 oder 1), für die

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\sum_{n=N_{2\nu+\sigma-1}+1}^{N_{2\nu+\sigma}} a_n^2 \log^2 n} = \infty \tag{9}$$

ist. Weiterhin sei ν_0 eine positive ganze Zahl mit

$$1 \leqq \frac{C_1^2 C_2^2 C_3}{16} \log^2 \frac{2^{2^{2\nu+\sigma-1}}}{2} \quad (\nu \geqq \nu_0). \tag{10}$$

Im Folgenden bezeichnet $r_n(x)$ die n-te Rademachersche Funktion: $r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x$ ($n=0, 1, \dots$).

Hilfssatz IV. *Es seien ν_1, ν_2 ganze Zahlen mit $\nu_0 \leqq \nu_1 \leqq \nu_2$, und $\{a_n\}_1^\infty$ eine Folge mit* (5). *Dann gibt es ein orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}_{N_{2\nu_1+\sigma-1}+1}^{N_{2\nu_2+\sigma+1}}$ der Treppenfunktionen in* $(0, 4)$ *und eine Folge der paarweise disjunkten, einfachen Mengen $I_i(\nu_2)$ $(\subseteqq (0, 1))$ $(i=1, \dots, 2^{2^{2\nu_2+\sigma}})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

Es ist

$$\operatorname{mes} I_i(\nu_2) = \frac{1}{2^{2^{2\nu_2+\sigma}}} \quad (i = 1, \dots, 2^{2^{2\nu_2+\sigma}}). \tag{11}$$

Es gilt

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} r_n(x), & x \in (3, 4), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (N_{2\nu+\sigma} < n \leqq N_{2\nu+\sigma+1};\ \nu = \nu_1, \dots, \nu_2). \tag{12}$$

Es gibt nichtleere Intervalle $J_1(\nu_2)$ $(\subseteqq (1, 2))$, $J_2(\nu_2)$ $(\subseteqq (2, 3))$ derart, dass

$$\Phi_n(x) = 0 \quad \big(x \in J_1(\nu_2) \cup J_2(\nu_2);\ n = N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\nu_2+\sigma+1}\big) \tag{13}$$

gilt. Weiterhin besitzt die Summe

$$\sum_{n=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1}^{N_{2\nu_2+\sigma+1}} a_n \Phi_n(x)$$

eine Anordnung

$$\sum_{k=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1}^{N_{2\nu_2+\sigma+1}} a_{n_k(\nu_2)}\Phi_{n_k(\nu_2)}(x)$$

ihrer Glieder derart, dass mit gewissen Indizes $m_1(i, \nu_2)$, $m_2(i, \nu_2)$ $(N_{2\nu_1+\sigma-1} < m_1(i, \nu_2) \leqq m_2(i, \nu_2) \leqq N_{2\nu_2+\sigma+1})$

(14)

$$\sum_{k=m_1(i,\nu_2)}^{m_2(i,\nu_2)} a_{n_k(\nu_2)}\Phi_{n_k(\nu_2)}(x) \geqq \frac{C_1C_2\sqrt{C_3}}{\sqrt{128}} \sum_{\nu=\nu_1}^{\nu_2} \sqrt{\sum_{n=N_{2\nu+\sigma-1}+1}^{N_{2\nu+\sigma}} a_n^2 \log^2 n} \quad (x\in I_i(\nu_2))$$

$(i = 1, \dots, 2^{2^{2\nu_2+\sigma}})$ *besteht.*

Beweis des Hilfssatzes IV. Wir können den Hilfssatz III für die Folge $b=\{a_{N_{2\nu_1+\sigma-1}+1}, \dots, a_{N_{2\nu_1+\sigma}}, 0, \dots\}$ anwenden; nämlich wegen (10) ist (8) offensichtlich erfüllt. Die sich ergebenden Funktionen, bzw. Intervalle bezeichnen wir mit $\Psi_n(x)$ $(n=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\nu_1+\sigma})$, bzw. mit I_i $(i=1, \dots, 2^{2^{2\nu_1+\sigma}})$. Wir setzen

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{C_3}{8}}\,\Psi_n\left(\frac{C_3}{8}x\right), & x\in(0, 1), \\ \Psi_n(x-1), & x\in(1+C_3/8, 2), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (n = N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\nu_1+\sigma}),$$

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} r_n(x), & x\in(3, 4), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$(n=N_{2\nu_1+\sigma}+1, \dots, N_{2\nu_1+\sigma+1})$, $J_1(\nu_1)=(1, 1+C_3/8)$, $J_2(\nu_1)=(2, 3)$. Weiterhin sei $I_i(\nu_1)$ $(i=1, \dots, 2^{2^{2\nu_1+\sigma}})$, dasjenige Intervall, welches aus I_i mit der Transformation $y=8/C_3\cdot x$ entsteht. Endlich sei $n_k(\nu_1)=k$ $(k=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\nu_1+\sigma+1})$. Auf Grund der Hilfssätze I, III sind (11)—(14) für das System $\{\Phi_n(x)\}_{N_{2\nu_1+\sigma-1}+1}^{N_{2\nu_1+\sigma+1}}$, für die Mengen $I_i(\nu_1)$ $(i=1, \dots, 2^{2^{2\nu_1+\sigma}})$, für die Intervalle $J_1(\nu_1)$, $J_2(\nu_1)$ und für die Anordnung $n_k(\nu_1)$ $(k=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\nu_1+\sigma+1})$ im Falle $\nu_2=\nu_1$ erfüllt.

Wenn $\nu_2>\nu_1$ ist, dann sei ν^* eine ganze Zahl mit $\nu_1\leqq\nu^*<\nu_2$. Wir nehmen an, dass das orthonormierte System $\{\Phi_n(x)\}_{N_{2\nu_1+\sigma-1}+1}^{N_{2\nu^*+\sigma+1}}$ der Treppenfunktionen in $(0, 4)$, die paarweise disjunkten, einfachen Mengen $I_i(\nu^*)$ $(i=1, 2\dots, 2^{2^{2\nu^*+\sigma}})$ und die Anordnung $n_k(\nu^*)$ $(k=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\nu^*+\sigma+1})$ derart definiert sind, dass (11)—(14) mit gewissen nichtleeren Intervallen $J_1(\nu^*)$ $(\subseteqq(1, 2))$, $J_2(\nu^*)$ $(\subseteqq(2, 3))$ und mit gewissen Indizes $m_1(i, \nu^*)$, $m_2(i, \nu^*)$, $(N_{2\nu_1+\sigma-1}<m_1(i, \nu^*)\leqq m_2(i, \nu^*)\leqq N_{2\nu^*+\sigma+1})$ im Falle $\nu_2=\nu^*$ erfüllt sind.

Füı jede ganze Zahl i, $1 \leqq i \leqq 2^{2^{2\nu^*+\sigma}}$ setzen wir die Indexmengen

$$Z_i^{(1)} = \{a+(i-1)c_0+1, \ldots, a+(i-1)c_0+c_0/2\} \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{s=1}^{2^{2\nu^*+\sigma+1}-1} \{a+2^s b+(i-1)c_s+1, \ldots, a+2^s b+(i-1)c_s+c_s/2\} \right),$$

$$Z_i^{(2)} = \{a+(i-1)c_0+c_0/2+1, \ldots, a+ic_0\} \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{s=1}^{2^{2\nu^*+\sigma+1}-1} \{a+2^s b+(i-1)c_s+c_s/2+1, \ldots, a+2^s b+ic_s\} \right),$$

$$Z_i = \{a+(i-1)c_0+1, \ldots, a+ic_0\} \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{s=1}^{2^{2\nu^*+\sigma+1}-1} \{a+2^s b+(i-1)c_s+1, \ldots, a+2^s b+ic_s\} \right),$$

wobei $a = N_{2\nu^*+\sigma+1}$, $b = 2^{2^{2\nu^*+\sigma+1}}$, $c_0 = 2^{2^{2\nu^*+\sigma+1}+1}/2^{2^{2\nu^*+\sigma}}$, $c_s = 2^{2^{2\nu^*+\sigma+1}+s}/2^{2^{2\nu^*+\sigma}}$ $(s=1, \ldots, 2^{2\nu^*+\sigma+1}-1)$ ist. Offensichtlich sind die Mengen $Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}$ $(i=1, \ldots$ $\ldots, 2^{2^{2\nu^*+\sigma}})$ paarweise disjunkt, es gelten

$$Z_i^{(1)} \cup Z_i^{(2)} = Z_i \quad (i=1, \ldots, 2^{2^{2\nu^*+\sigma}}), \qquad \bigcup_{i=1}^{2^{2^{2\nu^*+\sigma}}} Z_i = \{N_{2\nu^*+\sigma+1}+1, \ldots, N_{2(\nu^*+1)+\sigma}\},$$

die Mächtigkeiten der Mengen $Z_i^{(1)}, Z_i^{(2)}$ sind gleich mit $2^{2^{2(\nu^*+1)+\sigma}}/2 \cdot 2^{2^{2\nu^*+\sigma}} = M_0$. Die Elemente von $Z_i^{(1)}$ bezeichnen wir in natürlicher Anordnung mit $l_1(i), \ldots, l_{M_0}(i)$, weiterhin bezeichnen wir die Elemente von $Z_i^{(2)}$ in natürlicher Anordnung mit $l_{M_0+1}(i), \ldots, l_{2M_0}(i)$ $(i=1, \ldots, 2^{2^{2\nu^*+\sigma}})$. Auf Grund von (5) sind die Folgen $\{a_{l_1(i)}, \ldots, a_{l_{M_0}(i)}\}$, $\{a_{l_{M_0+1}(i)}, \ldots, a_{l_{2M_0}(i)}\}$ mit dieselber Folge gleich; diese Folge bezeichnen wir mit $b^{(0)} = \{b_1^{(0)}, \ldots, b_{M_0}^{(0)}, 0, \ldots\}$.

Für jede ganze Zahl i $(1 \leqq i \leqq 2^{2^{2\nu^*+\sigma}})$ werden wir die Funktionen $\Phi_{l_j(i)}(x)$ $(j=1, \ldots, 2M_0)$ definieren. Es seien $I_1^*(i)$ $(\subseteqq J_1(\nu^*))$, $I_2^*(i)$ $(\subseteqq J_2(\nu^*))$ $(i=1, \ldots$ $\ldots, 2^{2^{2\nu^*+\sigma}})$ paarweise disjunkte, nichtleere Intervalle mit

$$J_1^*(\nu^*+1) = J_1(\nu^*) \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{2^{2\nu^*+\sigma}}} I_1^*(i) \neq \emptyset, \quad J_2(\nu^*+1) = J_2(\nu^*) \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{2^{2\nu^*+\sigma}}} I_2^*(i) \neq \emptyset.$$

Wir wenden den Hilfssatz III auf die Folge $b^{(0)}$ an; wegen (10) besteht (8) offensichtlich, und so kann man den Hilfssatz III anwenden. Die sich ergebenden Funktionen, bzw. Intervalle bezeichnen wir mit $\Psi_n(x)$ $(n=1, \ldots, M_0)$ bzw. mit I_j $(j=1, \ldots$

..., M_0). Wir setzen

$$\Psi_n^{(1)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{C_3}{8}}\,\Psi_n\left(\dfrac{C_3}{8}x\right), & (x\in(0,1), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\Psi_n^{(2)}(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{8-C_3}{8}}\,\Psi_n\left(\left(1-\dfrac{C_3}{8}\right)x+\dfrac{C_3}{8}\right), & (x\in(0,1), \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

($n=1, \ldots, M_0$). Weiterhin sei $\bar{I}_j$ ($j=1, \ldots, M_0$) das Intervall, welches aus I_j mit der Transformation $y=\frac{C_3}{8}x$ entsteht.

Für eine in $(0, 1)$ definierte Funktion $f(x)$ und für ein Intervall $I=(\alpha, \beta)$ $\big(\subseteqq(0, 1)\big)$ sei

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right), & \alpha < x < \beta, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

weiterhin, für eine Menge H $\big(\subseteqq(0, 1)\big)$ sei $H(I)$ die Menge, die aus H mit der Transformation $y=(\beta-\alpha)x+\alpha$ entsteht.

Da die Funktionen $\Phi_n(x)$ ($n=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \ldots, N_{2\nu^*+\sigma+1}$) Treppenfunktionen sind, gibt es eine Einteilung von $I_i(\nu^*)$ in paarweise disjunkte Intervalle $J_r(i)$ ($r=1, \ldots, \varrho$) derart, dass jede Funktion $\Phi_n(x)$ ($n=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \ldots, N_{2\nu^*+\sigma+1}$) in jedem Intervall $J_r(i)$ ($r=1, \ldots, \varrho$) konstant ist; die zwei Hälfte von $J_r(i)$ bezeichnen wir mit $J_r'(i)$, bzw. mit $J_r''(i)$ ($r=1, \ldots, \varrho$). Wir setzen

$$\Psi_n(i; x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{mes} I_i(\nu^*)}}\left(\sum_{r=1}^{\varrho}\Psi_n^{(1)}(J_r'(i); x)-\sum_{r=1}^{\varrho}\Psi_n^{(1)}(J_r''(i); x)\right)+\frac{1}{\sqrt{\operatorname{mes} I_1^*(i)}}\,\Psi_n^{(2)}(I_1^*(i); x)$$

($n=1, \ldots, M_0$), und

$$I_{(i-1)2M_0+j}(\nu^*+1) = \bigcup_{r=1}^{\varrho} \bar{I}_j(J_r'),$$

$$I_{(i-1)2M_0+M_0+j}(\nu^*+1) = \bigcup_{r=1}^{\varrho} \bar{I}_j(J_r'') \quad (j=1, \ldots, M_0).$$

Auf Grund des Hilfssatzes III und der Definition ist es offensichtlich, dass die Mengen $I_l(\nu^*+1)$ $\big(\subseteqq(0, 1)\big)$ ($l=1, \ldots, 2^{2^{2(\nu^*+1)+\sigma}}$) paarweise disjunkt und einfach sind, weiterhin (11) für $\nu_2=\nu^*+1$ besteht. Wir setzen

$$\overline{\Psi}_n(i;x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_n(i;x), & x\in(0,2),\\ 0, & x\in(0,4)\setminus I_2^*(i)\end{cases}\qquad (n=1,\dots,M_0).$$

$$\overline{\Psi}_n(i;x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_n(i;x), & x\in(0,2),\\ 0, & x\in(0,4)\setminus I_2^*(i)\end{cases}\qquad (n=M_0+1,\dots,2M_0).$$

Man kann die Funktionen $\overline{\Psi}_n(i;x)$ $(n=1,\dots,2M_0)$ in $I_2^*(i)$ leicht derart definieren, dass sie in $I_2^*(i)$ Treppenfunktionen sind, und ein orthonormiertes System in $(0,4)$ bilden. Wir setzen

$$\Phi_{l_j(i)}(x)=\overline{\Psi}_j(i;x)\quad (j=1,\dots,2M_0;\ i=1,\dots,2^{2^{2\nu^*+\sigma}}).$$

Auf Grund des Hilfssatzes III und der Definition ist es offensichtlich, dass diese Funktionen in $(0,4)$ Treppenfunktionen sind, und die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1,\dots,N_{2(\nu^*+1)+\sigma})$ ein orthonormiertes System in $(0,4)$ bilden, weiterhin (13) für $\nu_2=\nu^*+1$ gilt. Auf Grund der Hilfssätze I, III und der Definition folgt durch einfache Rechnung, dass mit gewissen Indizes $\mu_j(i)$ $(1\leqq\mu_j(i)\leqq M_0;\ j=1,\dots,M_0)$

$$a_{l_{M_0+1}(i)}\Phi_{l_{M_0+1}(i)}(x)+\dots+a_{l_{M_0+\mu_j(i)}(i)}\Phi_{l_{M_0+\mu_j(i)}(i)}(x)\geqq$$

$$\geqq\frac{C_1C_2\sqrt{C_3}}{\sqrt{128}}\sqrt{\sum_{n=N_{2\nu^*+\sigma+1}+1}^{N_{2(\nu^*+1)+\sigma}}a_n^2\log^2 n}\quad (x\in I_{(i-1)2M_0+j}),$$

(15)

$$a_{l_{\mu_j(i)}(i)}\Phi_{l_{\mu_j(i)}(i)}(x)+\dots+a_{l_{M_0}(i)}\Phi_{l_{M_0}(i)}(x)\geqq$$

$$\geqq\frac{C_1C_2\sqrt{C_3}}{\sqrt{128}}\sqrt{\sum_{n=N_{2\nu^*+\sigma+1}+1}^{N_{2(\nu^*+1)+\sigma}}a_n^2\log^2 n}\quad (x\in I_{(i-1)2M_0+M_0+j})$$

$(j=1,\dots,M_0;\ i=1,\dots,2^{2^{2\nu^*+\sigma}})$ gelten. Wir setzen endlich

$$\Phi_n(x)=\begin{cases}r_n(x), & x\in(3,4),\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}$$

$(n=N_{2(\nu^*+1)+\sigma}+1,\dots,N_{2(\nu^*+1)+\sigma+1})$. Offensichtlich sind die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1,\dots,N_{2(\nu^*+1)+\sigma+1})$ Treppenfunktionen und bilden ein orthonormiertes System in $(0,4)$, weiterhin gilt (12) für $\nu_2=\nu^*+1$.

Für jede ganze Zahl i, $0\leqq i<2^{2^{2\nu^*+\sigma}}$, definieren wir eine Anordnung $n_k(i,\nu^*)$ $\left(k=N_{2\nu_1+\sigma-1}+1,\dots,N_{2\nu^*+\sigma+1}+2M_0(i+1)\right)$ der Indizes

$$n\in\{N_{2\nu_1+\sigma-1}+1,\dots,N_{2\nu^*+\sigma+1}\}\cup\left(\bigcup_{j=1}^{i+1}Z_j\right).$$

Es sei $n_k(0, \nu^*) = n_k(\nu^*)$ $(k = N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\nu^*+\sigma+1})$, und

$$n_k(i+1, \nu^*) = \begin{cases} n_k(i, \nu^*), & k = N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, m_1(i+1, \nu^*)-1, \\ m_1(i+1, \nu^*)-1+l_{k-m_1(i+1,\nu^*)+1}(i+1), & \\ \qquad & k = m_1(i+1, \nu^*), \dots, m_1(i+1; \nu^*)+M_0-1, \\ n_{k-M_0}(i, \nu^*), & k = m_1(i+1, \nu^*)+M_0, \dots, m_2(i+1; \nu^*)+M_0; \\ m_2(i+1, \nu^*)+l_{k-m_2(i+1,\nu^*)}(i+1), & \\ \qquad & k = m_2(i+1, \nu^*)+M_0+1, \dots, m_2(i+1, \nu^*)+2M_0, \\ n_{k-2M_0}(i, \nu^*), & k = m_2(i+1, \nu^*)+2M_0+1, \dots, N_{2\nu^*+\sigma+1}+2M_0(i+1) \end{cases}$$

$(i=1, \dots, 2^{2^{2\nu^*+\sigma}}-1)$. Wir setzen

$$n_k(\nu^*+1) = \begin{cases} n_k(2^{2^{2\nu^*+\sigma}}, \nu^*), & k = N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2(\nu^*+1)+\sigma}, \\ k, & k = N_{2(\nu^*+1)+\sigma}+1, \dots, N_{2(\nu^*+1)+\sigma+1}. \end{cases}$$

Auf Grund der Voraussetzung, der Definitionen und der Ungleichungen (15) kann man leicht sehen, dass (14) für die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(n = N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2(\nu^*+1)+\sigma+1})$, für die Mengen $I_i(\nu^*+1)$ $(i=1, \dots, 2^{2^{2(\nu^*+1)+\sigma}})$ und für die Anordnung $n_k^*(\nu^*+1)$ $(k = N_{2\nu_1+\sigma-1}+1, \dots, N_{2(\nu^*+1)+\sigma+1})$ mit gewissen Indizes $m_1(i, \nu^*+1)$, $m_2(i, \nu^*+1)$ $(N_{2\nu_1+\sigma-1} < m_1(i, \nu^*+1) \leqq m_2(i, \nu^*+1) \leqq N_{2(\nu^*+1)+\sigma+1})$ im Falle $\nu_2 = \nu^*+1$ erfüllt ist.

Den Hilfssatz IV bekommen wir dann durch Induktion.

3. Beweis des Satzes B. Aus (9) folgt, dass eine Indexfolge $\{\bar\nu_s\}_1^\infty$ mit $\nu_0 \leqq \bar\nu_1 < \dots < \bar\nu_s < \dots$ und

$$\text{(16)} \qquad \sum_{\nu=\bar\nu_s+1}^{\bar\nu_{s+1}} \frac{C_1 C_2 \sqrt{C_3}}{\sqrt{128}} \sqrt{\sum_{n=N_{2\nu+\sigma-1}}^{N_{2\nu+\sigma}} a_n^2 \log^2 n} \geqq 2s \quad (s = 1, 2, \dots)$$

existiert. Für jede ganze Zahl s $(s=1, 2, \dots)$ wenden wir den Hilfssatz IV im Falle $\nu_1 = \bar\nu_s+1$, $\nu_2 = \bar\nu_{s+1}$ an. Die sich ergebenden Funktionen, bzw. die sich ergebende Anordnung bezeichnen wir mit $\Phi_n(s; x)$ $(n = N_{2(\bar\nu_s+1)+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\bar\nu_{s+1}+\sigma+1})$, bzw. mit $\bar n_k(s)$ $(k = N_{2(\bar\nu_s+1)+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\bar\nu_{s+1}+\sigma+1})$. Auf Grund des Hilfssatzes IV sind diese Funktionen Treppenfunktionen, und sie bilden ein orthonormiertes System in $(0, 4)$, weiterhin auf Grund von (16) gilt

$$\text{(17)} \qquad \max_{N_{2(\bar\nu_s+1)+\sigma-1} < i \leqq j \leqq N_{2\bar\nu_{s+1}+\sigma+1}} \left| \sum_{k=i}^{j} a_{\bar n_k(s)} \Phi_{\bar n_k(s)}(s; x) \right| \geqq 2s \quad (x \in (0, 1))$$

$(s = 1, 2, \dots)$. Wir setzen

$$\bar\Phi_n(x) = \frac{1}{2} \Phi_n\left(s; \frac{x}{4}\right) \quad (x \in (0, 1);\ n = N_{2(\bar\nu_s+1)+\sigma-1}+1, \dots, N_{2\bar\nu_{s+1}+\sigma+1}).$$

Aus (17) folgt

$$(18)\qquad \max_{N_{2(\bar{\nu}_s+1)+\sigma-1}<i\leqq j\leqq N_{2\bar{\nu}_{s+1}+\sigma+1}}\left|\sum_{k=i}^{j} a_{\bar{n}_k(s)}\bar{\Phi}_{\bar{n}_k(x)}(x)\right|\geqq s\quad\left(x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)=H\right)$$

$(s=1,2,\ldots)$.

Es sei $\varphi_n(x)=r_n(x)$ $(n=1,\ldots,N_{2(\bar{\nu}_1+1)+\sigma-1})$. Es sei s_0 eine nichtnegative ganze Zahl. Wir nehmen an, dass die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1,\ldots,N_{2\bar{\nu}_{s_0+1}+\sigma+1})$ und die Mengen $E_1,\ldots,E_{s_0}$ $(\subseteqq(0,1))$ schon derart definiert sind, dass diese Funktionen Treppenfunktionen sind, sie ein orthonormiertes System in (0, 1) bilden, diese Mengen einfach und stochastisch unabhängig sind, weiterhin

$$(19)\qquad \operatorname{mes} E_s=1/4,$$

und

$$(20)\qquad \max_{N_{2(\bar{\nu}_s+1)+\sigma-1}<i\leqq j\leqq N_{2\bar{\nu}_{s+1}+\sigma+1}}\left|\sum_{k=i}^{j} a_{\bar{n}_k(s)}\varphi_{\bar{n}_k(s)}(x)\right|\geqq s\quad(x\in E_s)$$

für $s=1,\ldots,s_0$ erfüllt sind. Da die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1,\ldots,N_{2\bar{\nu}_{s_0+1}+\sigma+1})$ Treppenfunktionen und die Mengen $E_1,\ldots,E_{s_0}$ einfach sind, gibt es eine Einteilung von (0, 1) in paarweise disjunkte Intervalle $J_1,\ldots,J_\varrho$ derart, dass jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(n=1,\ldots,N_{2\bar{\nu}_{s_0+1}+\sigma+1})$ in jedem Intervall J_r $(r=1,\ldots,\varrho)$ konstant ist, und jede Menge E_s $(s=1,\ldots,s_0)$ die Vereinigung gewisser J_r ist. Die zwei Hälfte von J_r bezeichnen wir mit J_r', bzw. mit J_r'' $(r=1,\ldots,\varrho)$. Wir setzen

$$\varphi_n(x)=\sum_{r=1}^{\varrho}\bar{\Phi}_n(J_r';\,x)-\sum_{r=1}^{\varrho}\bar{\Phi}_n(J_r'';\,x)\quad(n=N_{2\bar{\nu}_{s_0}+1+\sigma-1}+1,\ldots,N_{2\bar{\nu}_{s_0}+2+\sigma+1}),$$

$$E_{s_0+1}=\left(\bigcup_{r=1}^{\varrho}H(J_r')\right)\cup\left(\bigcup_{r=1}^{\varrho}H(J_r'')\right).$$

Nach Obigen und nach der Definitionen sind die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=N_{2\bar{\nu}_{s_0}+1+\sigma-1}+1,\ldots,N_{2\bar{\nu}_{s_0}+2+\sigma+1})$ Treppenfunktionen, die Menge E_{s_0+1} ist einfach, die Funktionen $\varphi_n(x)$ $(n=1,\ldots,N_{2\bar{\nu}_{s_0}+2+\sigma+1})$ bilden ein orthonormiertes System in (0, 1), die Mengen $E_1,\ldots,E_{s_0+1}$ sind stochastisch unabhängig, für $s=s_0+1$ gilt (19), weiterhin aus (18) sich ergibt, dass (20) für $s=s_0+1$ auch erfüllt wird. Durch Induktion erhalten wir ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ der Treppenfunktionen in (0, 1), und eine Folge der einfachen, und stochastisch unabhängigen Mengen E_s $(\subseteqq(0,1))$ $(s=1,2,\ldots)$ derart, dass (19) und (20) für jedes s $(=1,2,\ldots)$ erfüllt werden.

Es seien $n_k=k$ $(k=1,\ldots,N_{2(\bar{\nu}_1+1)+\sigma-1})$, und $n_k=\bar{n}_k(s)$ $(N_{2(\bar{\nu}_s+1)+\sigma-1}<k\leqq$ $\leqq N_{2\bar{\nu}_{s+1}+\sigma+1};\ s=1,2,\ldots)$. Dann gilt

$$(21)\qquad \max_{N_{2(\bar{\nu}_s+1)+\sigma-1}<i\leqq j\leqq N_{2\bar{\nu}_{s+1}+\sigma+1}}\left|\sum_{k=i}^{j} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x)\right|\geqq s\quad(x\in E_s)$$

für jedes $s=1, 2, \ldots,$ auf Grund von (20). Da die Mengen E_s $(s=1, 2, \ldots)$ stochastisch unabhängig sind, aus (19) folgt mes $\overline{\lim\limits_{s\to\infty}} E_s=1$. Weiterhin aus (21) bekommen wir

$$\overline{\lim_{i,j\to\infty}} \left|\sum_{k=i}^{j} a_{n_k}\varphi_{n_k}(x)\right| = \infty \quad (x\in \overline{\lim_{s\to\infty}} E_s).$$

Damit haben wir Satz B vollständig bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 185—221.

[2] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math.*, **25** (1964), 219—232.

BOLYAI INSTITUT
UNIVERSITÄT SZEGED
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, UNGARN