Acta Sci. Math., 47 (1984), 223—231

О центрированных системах в $C[0, 1]$

А. В. БАХШЕЦЯН

Система измеримых функций $F=\{f_n\}$ называется центрированной, если для любого n и $\Lambda \in \mathcal{F}_n(F)$ ($\mathcal{F}_n(F)$ — минимальная σ-алгебра, по которой измеримы функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$) имеет место

$$\int_\Lambda f_{n+1}(x)\, dx = 0.$$

Центрированные системы являются хорошо известным объектом теории вероятностей (точнее, теории мартингалов). Классическими примерами центрированных систем, определенных на отрезке [0, 1], являются системы Хаара и Радемахера.

Р. Ганди [1] доказал, что для полной в L^2 центрированной системы F σ-алгебра $\mathcal{F}_n(F)$ содержит ровно n различных атомов.

В работе [2] уточняется это утверждение, а именно, доказывается, что полная в L^2 [0, 1] нормированная центрированная система — с точностью до автоморфизма отрезка [0, 1] и перестановки, не нарушающей центрированность — совпадает с некоторой системой типа Хаара. Там же (см. [2]) строятся примеры нетривиальных неполных центрированных систем, состоящих из непрерывных функций и доказывается, что если $F=\{f_n\}$ бесконечная центрированная система п. в. отличных от нуля непрерывных на [0, 1] функций и некоторое f_{n_0} имеет ограниченную вариацию, то существует множество E с $\mu E=1$ (μ — мера Лебега) такое, что $\mu f_{n_0}(E)=0$. Далее строится контрпример, показывающий, что условие ограниченности вариации нельзя опустить. В данной работе мы усиливаем этот пример, доказывая следующее утверждение:

Теорема. *Пусть* $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — *произвольная система непрерывных на* [0, 1] *функций, удовлетворяющих условию*

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\, dx = 0$$

Поступило 12 сентября 1982 г.

для любого $n \geqq 2$. *Тогда существует центрированная система непрерывных функций* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что* f_n *и* φ_n *равноизмеримы для любого* $n \geqq 1$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, приведем некоторые вспомогательные замечания.

Отображение $T\colon [0, 1] \to [0, 1]$ называется эндоморфизмом, если оно сохраняет меру, т.е. для любого измеримого множества E множество $T^{-1}E$ также измеримо, причем $\mu T^{-1}E = \mu E$. Дополнительно мы потребуем непрерывность отображения T, так как в данной работе мы пользуемся лишь такими эндоморфизмами.

Замечание 1. Пусть $\{f_n(x)\}$ — центрированная система непрерывных функций и T — эндоморфизм. Тогда система $\{f_n(Tx)\}$ также является центрированной, причем для любого n функция $f_n(Tx)$ непрерывна и равноизмерима с $f_n(x)$.

Это сразу следует из соответствующих определений.

Замечание 2. Пусть последовательность эндоморфизмов $S_n(x)$ равномерно сходится к $S(x)$. Тогда $S(x)$ — эндоморфизм.

Действительно. Непрерывность $S(x)$ очевидна. Далее, для любого открытого множества U

$$S^{-1}U \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} S_k^{-1}U = \underline{\lim}\, S_k^{-1}U.$$

Обозначим через χ_A характеристическую функцию множества A. Из леммы Фату имеем

$$\mu(S^{-1}U) \leqq \mu(\underline{\lim}\, S_k^{-1}U) = \int_0^1 \chi_{\underline{\lim}\, S_k^{-1}U}\, dx = \int_0^1 \underline{\lim}\, \chi_{S_k^{-1}U}\, dx \leqq$$

$$\leqq \underline{\lim} \int_0^1 \chi_{S_k^{-1}U}\, dx = \underline{\lim}\, \mu(S_k^{-1}U) = \mu U.$$

Далее, для любого измеримого E и для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество U такое, что $E \subset U$, $\mu E > \mu U - \varepsilon$. Следовательно,

$$\mu^*(S^{-1}E) \leqq \mu(S^{-1}U) < \mu E + \varepsilon\,^{*)}$$

и в пределе $\mu^*(S^{-1}E) \leqq \mu E$. С другой стороны

$$1 - \mu_*(S^{-1}E) = \mu^*(S^{-1}E^c) \leqq \mu E^c = 1 - \mu E$$

($E^c = [0, 1] \setminus E$), т.е. $\mu_*(S^{-1}E) \geqq \mu E$. Этим заканчивается доказательство замечания 2.

---

*) μ^*, μ_* — соответственно, внешняя и внутренная меры Лебега.

Замечание 3. Пусть последовательность эндоморфизмов $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ и числовая последовательность $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ такие, что:

для любого n из $|x-y|<b_n$ следует $|S_n(x)-S_n(y)|<1/n$, где $S_n=T_1\circ T_2\circ\ldots$ $\ldots\circ T_n$;

для любых n и $x\in[0, 1]$ $|T_{n+1}(x)-x|<\alpha_n$, причем $\sum_{i=n}^{\infty}\alpha_i<b_n$.

Тогда последовательность S_n равномерно сходится.

Действительно, при любых k и $x\in[0, 1]$

$$\left|T_{n+1}\left(T_{n+2}\left(\ldots T_{n+k}(x)\right)\right)-x\right| < \alpha_n+\alpha_{n+1}+\ldots+\alpha_{n+k-1} < b_n.$$

Следовательно,

$$|S_{n+k}(x)-S_n(x)| = \left|S_n\left(T_{n+1}\left(\ldots T_{n+k}(x)\right)\right)-S_n(x)\right| < 1/n.$$

Перейдем к доказательству теоремы.

Определение эндоморфизма S_Δ. Для каждого интервала $\delta=(\alpha, \beta)\subset$ $\subset[0, 1]$ определим эндоморфизм S_δ° следующей формулой:

$$S_\delta^{\circ}(x) = \begin{cases} x & \text{при } x\notin\delta; \\ 4x-3\alpha & \text{при } x\in\left(\alpha, (3\alpha+\beta)/4\right]; \\ 3\alpha+2\beta-4x & \text{при } x\in\left((3\alpha+\beta)/4, (\alpha+\beta)/2\right]; \\ 2x-\beta & \text{при } x\in\left((\alpha+\beta)/2, \beta\right). \end{cases} \tag{1}$$

Определим последовательность интервалов $\{\delta^i=(a_i, b_i)\}_1^{\infty}$ индуктивно: $\delta^1=\delta$;

$$\delta^{2n} = \left(\frac{a_n+b_n}{2}, \frac{a_n+3b_n}{4}\right]; \quad \delta^{2n+1} = \left(\frac{a_n+3b_n}{4}, b_n\right).$$

Пусть $S_\delta^n=S_{\delta^1}^{\circ}\circ S_{\delta^2}^{\circ}\circ\ldots\circ S_{\delta^n}^{\circ}$. Докажем, что последовательность $\{S_\delta^n(x)\}$ сходится равномерно. Пусть $n\geqq k\geqq 2^{m+1}>1/\varepsilon$. Очевидно, каждое $x\in\delta^1$ покрывается конечной или бесконечной системой интервалов $\{\delta^{2^j+i_j}\}$ $(0\leqq i_j<2^j)$. Допустим

$$x\in\delta^1\cap\delta^{2+i_1}\cap\delta^{4+i_2}\cap\ldots.$$

Тогда, в силу (1), имеем

$$S_\delta^n(x) = S_{\delta^1}^{\circ}\circ S_{\delta^{2+i_1}}^{\circ}\circ\ldots\circ S_{\delta^{2^r+i_r}}^{\circ}(x),$$

$$S_\delta^k(x) = S_{\delta^1}^{\circ}\circ S_{\delta^{2+i_1}}^{\circ}\circ\ldots\circ S_{\delta^{2^p+i_p}}^{\circ}(x),$$

где либо $r=p$, либо $r>p\geqq m$. Очевидно, в первом случае $S_\delta^n(x)-S_\delta^k(x)=0$. Если же $r>p\geqq m$, то

$$|S_\delta^n(x)-S_\delta^k(x)| = 2^{p+1}|S_{\delta^{2^{p+1}+i_{p+1}}}^{\circ}\circ\ldots\circ S_{\delta^{2^r+i_r}}^{\circ}(x)-x| \leqq$$

$$\leqq 2^{p+1}\mu\delta^{2^{p+1}+i_{p+1}} \leqq 1/2^{p+1} \leqq 1/2^{m+1} < \varepsilon.$$

Мы здесь пользовались тем, что если $x, y \in \delta^{2q+i}$ $(i=0, 1)$, то

$$|S_\delta^q(x) - S_\delta^q(y)| = 2|x-y|.$$

Итак, в силу замечания 2, $\lim\limits_{n\to\infty} S_\delta^n = S_\delta$ — есть эндоморфизм.

Пусть $\Delta = \{\delta_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность непересекающихся интервалов из $[0, 1]$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^\infty \mu\delta_i = 1$. (Далее такие последовательности будем называть разложениями отрезка $[0, 1]$). Очевидно, последовательность эндоморфизмов $\{S_{\delta_1} \circ S_{\delta_2} \circ \ldots \circ S_{\delta_n}\}_{n=1}^\infty$ равномерно сходится. Пусть

$$S_\Delta(x) = \lim_{n\to\infty} S_{\delta_1} \circ S_{\delta_2} \circ \ldots \circ S_{\delta_n}(x).$$

Докажем следующее свойство S_Δ:

(2) пересечение прообраза открытого множества с любым из

$$U_i^k = \delta_i^k \setminus (\bar{\delta}_i^{2k} \cup \delta_k^{2i+1}).$$

симметрично относительно середины интервала U_i^k.

Легко видеть, что $U_i^k \cap \delta_i^n = \emptyset$ при $n=k+1, k+2, \ldots$. Следовательно, на U_i^k

$$S_\Delta(x) = S_{\delta_i}(x) = S_{\delta_i}^k(x) = S_{\delta_i}^{k-1} \circ S_{\delta_i^k}^{\circ}(x).$$

Но, в силу (1), $S_{\delta_i^k}^{\circ}$ обладает указанным свойством.

Построение функции $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \Delta)$. Пусть φ непрерывная на $[0, 1]$ функция, $\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx = 0$ и $\Delta = \{\delta_i = (\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^\infty$ — разложение $[0, 1]$. Мы хотим построить непрерывную на $[0, 1]$ функцию $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \Delta)$, равноизмеримую с $\varphi(x)$ со следующими свойствами:

(3) $\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} \tilde{\varphi}(x)\,dx = 0$ для любого i;

(4) для любого i существует $\gamma_i \in (\alpha_i, \beta_i)$ такое, что $\tilde{\varphi}(x) \leqq 0$ при $\alpha_i \leqq x \leqq \gamma_i$, $\tilde{\varphi}(x) \geqq 0$ при $\gamma_i \leqq x \leqq \beta_i$;

(5) для любого i

$$\tilde{\varphi}(\gamma_i' - x) = \tilde{\varphi}(\gamma_i' + x) \quad \text{при} \quad |x| \leqq (\gamma_i - \alpha_i)/2$$

и

$$\tilde{\varphi}(\gamma_i'' - x) = \tilde{\varphi}(\gamma_i'' + x) \quad \text{при} \quad |x| \leqq (\beta_i - \gamma_i)/2,$$

где $\gamma_i' = (\alpha_i + \gamma_i)/2$, $\gamma_i'' = (\gamma_i + \beta_i)/2$;

(6) на каждом из интервалов (α_i, γ_i'), (γ_i', γ_i'') и (γ_i'', β_i) $(i=1,2, \ldots)$ функция

$\tilde{\varphi}(x)$ монотонна;

$$\frac{\mu(\{x\colon \tilde{\varphi}(x)=0\}\cap[\alpha_i, \gamma_i])}{\gamma_i-\alpha_i}=\frac{\mu(\{x\colon \tilde{\varphi}(x)=0\}\cap[\gamma_i, \beta_i])}{\beta_i-\gamma_i}. \tag{7}$$

Не нарушая общности, можем предположить, что функция φ неубывающая. Пусть γ_1 и $\sigma_1>0$ такие, что

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_1+\sigma_1}\varphi(x)\,dx=0, \qquad \max_{\gamma_1\leqq x\leqq\gamma_1+\sigma_1}|\varphi(x)|<M/2,$$

где $M=\|\varphi\|_c$. Существует натуральное n_1 такое, что $\sum_{i=1}^{n_1}(\beta_i-\alpha_i)>1-\sigma_1$. Обозначим $\sum_{i=1}^{n_1}(\beta_i-\alpha_i)=A_1$, $A_1-1+\sigma_1=a$.

Построим функцию ψ_1.

$$\psi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x) \quad \text{при} \quad 0\leqq x<\gamma_1;\\ \varphi(\sigma_1(x-\gamma_1)/a+\gamma_1) \quad \text{при} \quad \gamma_1\leqq x<\gamma_1+a;\\ \varphi(x+1-A_1) \quad \text{при} \quad \gamma_1+a\leqq x<A_1;\\ \varphi(\sigma_1(x-A_1)/(1-A_1)+\gamma_1) \quad \text{при} \quad A_1\leqq x\leqq 1.\end{cases}$$

Следующие свойства функции ψ_1 очевидны:

(8) ψ_1 равноизмерима с φ;

(9) на интервалах $[0, A_1)$ и $[A_1, 1]$ ψ_1 непрерывна и неубывающая;

$$\max_{A_1\leqq x\leqq 1}|\psi_1(x)|<M/2; \tag{10}$$

$$\int_{A_1}^{1}\psi_1(x)\,dx=0. \tag{11}$$

Существуют $\gamma_2>A_1$ и $\sigma_2>0$ такие, что

$$\int_{\gamma_2}^{\gamma_2+\sigma_2}\psi_1(x)\,dx=0 \quad \text{и} \quad \max_{\gamma_2\leqq x\leqq\gamma_2+\sigma_2}|\psi_1(x)|\leqq M/3.$$

Выберем n_2 такое, что $\sum_{i=1}^{n_2}(\beta_i-\alpha_i)=A_2>1-\sigma_2$. Как и выше построим функцию ψ_2, удовлетворяющую условиям:

(12) $\psi_2(x)=\psi_1(x)$ на $[0, A_1)$;

(13) ψ_2 равноизмерима с φ;

(14) на интервалах $[0, A_1)$, $[A_1, A_2)$ и $[A_2, 1]$ ψ_2 непрерывна и неубывающая;

$$\max_{A_2\leqq x\leqq 1}|\psi_2(x)|<M/3; \tag{15}$$

$$\int_{A_2}^{1}\psi_2(x)\,dx=0. \tag{16}$$

Продолжая таким образом, мы получим последовательности $\{n_i\}_1^\infty$ и $\{\psi_i\}_1^\infty$ такие, что для любого i

(17) $$\psi_{i+1}(x) = \psi_i(x) \quad \text{на } [0, A_i), \text{ где } A_i = \sum_{k=1}^{n_i} (\beta_k - \alpha_k);$$

(18) ψ_i равноизмерима с φ;

(19) на интервалах $[A_k, A_{k+1})$ $(k=0, \ldots, i-1;\ A_0=0)$ и $[A_i, 1]$ ψ_i непрерывна и неубывающая;

(20) $$\sup_{A_k \leqq x < A_{k+1}} |\psi_i(x)| < M/(k+1) \quad (k = 0, 1, \ldots, i-1)$$

$$\text{и} \quad \max_{A_i \leqq x \leqq 1} |\psi_i(x)| < M/(i+1);$$

(21) $$\int_{A_k}^{A_{k+1}} \psi_i(x)\, dx = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, i-1 \quad \text{и} \quad \int_{A_i}^{1} \psi_i(x)\, dx = 0.$$

Из этих свойств сразу вытекает, что существует $\lim\limits_{i\to\infty} \psi_i(x) = \psi(x)$, причем ψ равноизмерима с φ, непрерывна при $x \neq A_i$ $(i=1, 2, \ldots)$, неубывающая на интервалах непрерывности и $\psi(1)=0$.

Обозначим

$$\bar{\bar{C}}'_k = \min\{x\colon x \geqq A_k, \psi(x) = 0\}, \quad \bar{\bar{C}}''_k = \max\{x\colon x \leqq A_{k+1}, \psi(x) = 0\}.$$

Пусть $A_{k+1} - c''_k = p_k(c'_k - A_k)$. Положим $c_k = (p_k c'_k + c''_k)/(p_k+1)$ и для $i = n_k+1$ $n_k+2, \ldots, n_{k+1}$; $\gamma_i = (p_k\alpha_i + \beta_i)/(p_k+1)$. Легко проверить, что функция

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \psi\big((A_k - c_k)(x-\alpha_i)/(\gamma'_i - \alpha_i) + c_k\big) & \text{при} \quad \alpha_i \leqq x \leqq \gamma'_i; \\ \psi\big((A_{k+1} - A_k)(x-\gamma'_i)/(\gamma''_i - \gamma'_i) + A_k\big) & \text{при} \quad \gamma'_i < x \leqq \gamma''_i; \\ \psi\big((c_k - A_{k+1})(x-\gamma''_i)/(\beta_i - \gamma''_i) + A_{k+1}\big) & \text{при} \quad \gamma''_i < x \leqq \beta_i, \\ \qquad i = n_k+1, \ldots, n_{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots \quad (n_0 = 0); & \\ 0 \quad \text{при} \quad x \in [0, 1] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \delta_i, & \end{cases}$$

где $\gamma'_i = (\alpha_i + \gamma_i)/2$, $\gamma''_i = (\gamma_i + \beta_i)/2$ — есть искомая.

Построение эндоморфизма $T_{\tilde{\varphi}}$.

Пусть $\Delta = \{\delta_i = (\alpha_i, \beta_i)\}_1^\infty$ — разложение $[0, 1]$ и функция $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет условиям (3)—(7). Для каждого $x \in [\alpha_i, \beta_i]$ $(i=1, 2, \ldots)$ положим

$$\tilde{x} = \begin{cases} \beta_i - (\beta_i - \gamma_i)(x-\alpha_i)/(\gamma_i - \alpha_i) & \text{если } x \leqq \gamma_i \text{ и } \tilde{\varphi}(x) = 0; \\ \alpha_i - (\gamma_i - \alpha_i)(x-\beta_i)/(\beta_i - \gamma_i) & \text{если } x > \gamma_i \text{ и } \tilde{\varphi}(x) = 0. \end{cases}$$

Если же $\tilde{\varphi}(x) \neq 0$, то $\tilde{x}$ определим из условия

(22) $$\int_x^{\tilde{x}} \tilde{\varphi}(t)\, dt = 0 \quad (\tilde{x} \in [\alpha_i, \beta_i]).$$

Отметим некоторые свойства отображения $x \to \tilde{x}$, выполняющиеся в силу (3)—(7).

(23) Равенство (22) выполняется при любом $x \in [\alpha_i, \beta_i]$ $(i=1, 2, \ldots)$.

(24) Отображение взаимно-однозначно.

(25) $\tilde{\varphi}(\tilde{x})=0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}(x)=0$.

(26) Для любого $x \in [\alpha_i, \beta_i]$, $\tilde{\tilde{x}}=x$.

(27) $\tilde{x}>x$ при $\alpha_i \leqq x < \gamma_i$, $\tilde{x}<x$ при $\gamma_i < x \leqq \beta_i$ и $\tilde{\gamma}_i=\gamma_i$.

(28) Если $\tilde{x}-x=\tilde{y}-y$, то $x=y$.

Это следует из того, что $\tilde{x}$ строго убывает при возрастании x.

Определим непрерывное отображение $T_{\tilde{\varphi}}$ следующей формулой:

$$T_{\tilde{\varphi}}(x) = \begin{cases} \beta_i - |\tilde{x}-x| & \text{при } x \in \delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots); \\ x & \text{при } x \in [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i. \end{cases}$$

В силу (26), для любого $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i$ имеем $T_{\tilde{\varphi}} x = T_{\tilde{\varphi}} \tilde{x}$. Докажем, что $T_{\tilde{\varphi}}$ есть эндоморфизм. Действительно, пусть $0 < \bar{C} \leqq (\beta_i - \alpha_i)/2$ и $x \in [\alpha_i, \gamma_i]$ такое, что $T_{\tilde{\varphi}}(x) = (\alpha_i + \beta_i)/2 - c$. Тогда, в силу (28),

$$\begin{aligned} \mu T_{\tilde{\varphi}}^{-1}\big((\alpha_i+\beta_i)/2-c, (\alpha_i+\beta_i)/2\big) &= \mu\big((x, \gamma_i') \cup (\gamma_i'', \tilde{x})\big) = \\ &= \gamma_i' - x + \tilde{x} - \gamma_i'' = -(\gamma_i'' - \gamma_i') + \beta_i - T_{\tilde{\varphi}}(x) = \\ &= -(\beta_i - \alpha_i)/2 + \beta_i - (\alpha_i + \beta_i)/2 + c = c. \end{aligned}$$

Аналогично, получим

$$\mu T_{\tilde{\varphi}}^{-1}\big((\alpha_i+\beta_i)/2, (\alpha_i+\beta_i)/2+c\big) = c$$

и, следовательно, для любого открытого $U \subset (\alpha_i, \beta_i)$, $\mu T_{\tilde{\varphi}}^{-1}(U) = \mu U$.

Отсюда рассуждениями, аналогичными приведенным при доказательстве замечания 2, получаем, что $T_{\tilde{\varphi}}$ есть эндоморфизм.

Легко также проверить, что если измеримое множество $E \subset [\alpha_i, \beta_i]$ симметрично относительно точки $(\alpha_i + \beta_i)/2$, то

(29) $$\int_{T_{\tilde{\varphi}}^{-1}(E)} \tilde{\varphi}(t)\, dt = 0.$$

Построение системы $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим $\Delta_1 = \{(0, 1)\}$ и $\hat{f}_{11} = \varphi_1 \circ S_{\Delta_1}$. Пусть $\tilde{\Delta}_1 = \{\tilde{\delta}_{i,1}\}_1^{\infty}$ — разбиение $[0, 1]$ такое, что

(30) $$\hat{f}_{11}(c_{i,1} - x) = \hat{f}_{11}(c_{i,1} + x) \quad \text{при} \quad |x| < \mu \tilde{\delta}_{i,1}/2,$$

где $\bar{C}_{i,1}$ — середина интервала $\tilde{\delta}_{i,1}$ $(i=1, 2, \ldots)$. Существование $\tilde{\Delta}_1$ вытекает из (2).

Построим функцию $\tilde{\varphi}_2(x)=\tilde{\varphi}_2(x, \tilde{\Delta}_1)$ и эндоморфизм $T_{\tilde{\varphi}_2}$.

Положим $f_{11}=\hat{f}_{11}\circ T_{\tilde{\varphi}_2}$, $f_{21}=\tilde{\varphi}_2$. Очевидно, $f_{i,1}$ равноизмерима с φ_i $(i=1, 2)$.

В силу (30), для любого открытого множества пересечение $\tilde{\delta}_{i,1}\cap S_{\Delta_1}^{-1}\varphi_1^{-1}(U)$ симметрично относительно середины интервала $\tilde{\delta}_{i,1}$. Пусть $\tilde{\mathscr{F}}_{11}$ — минимальная σ-алгебра, содержащая множества вида $S_{\Delta_1}^{-1}\varphi_1^{-1}(U)$, а $\mathscr{F}_{11}$ — минимальная σ-алгебра, по которой измерима f_{11}. Очевидно, $\mathscr{F}_{11}=T_{\tilde{\varphi}_2}^{-1}\tilde{\mathscr{F}}_{11}$. Следовательно, для любого $\Lambda=T_{\tilde{\varphi}_2}^{-1}(\tilde{\Lambda})\in\mathscr{F}_{11}$, в силу (29),

$$\int_{\Lambda} f_{21}(t)\,dt = \int_{T_{\tilde{\varphi}_2}^{-1}(\tilde{\Lambda})} \tilde{\varphi}_2(t)\,dt = 0,$$

т.е. система из двух функций $\{f_{11}, f_{21}\}$ центрирована.

Далее, пусть $S_{\Delta_1}\circ T_{\tilde{\varphi}_2}=T_1$ и b_1 такое, что $|T_1(x)-T_1(y)|<1$ при $|x-y|<b_1$. Построим разбиение отрезка $[0, 1]$, $\Delta_2=\{\delta_{i,2}\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющую условию: $\max\limits_i \mu\delta_{i,2}<b_1/2$.

Обозначим: $\hat{f}_{k,2}=f_{k,1}\circ S_{\Delta_2}$ $(k=1, 2)$.

Пусть $\tilde{\Delta}_2=\{\tilde{\delta}_{i,2}\}_{i=1}^{\infty}$ — такое разбиение $[0, 1]$, что

$$\hat{f}_{k,2}(c_{i,2}-x) = \hat{f}_{k,2}(c_{i,2}+x) \quad \text{при} \quad |x| < \mu\tilde{\delta}_{i,2}/2 \quad (k = 1, 2).$$

Положим $f_{32}(x)=\tilde{\varphi}_3(x)=\tilde{\varphi}_3(x, \tilde{\Delta}_2)$, $f_{k,2}=\hat{f}_{k,2}\circ T_{\tilde{\varphi}_3}$ $(k=1, 2)$. Как и выше, легко показать что система $\{f_{k,2}\}_{k=1}^{3}$ — центрирована.

Продолжим таким образом, на каждом шаге требуя, чтобы для любого k выполнялось

$$\max_i \mu\delta_{i,k} < \min(b_1/2^{k-1}, b_2/2^{k-2}, \ldots, b_{k-1}/2), \tag{31}$$

где b_k такое, что из $|x-y|<b_k$ следует, что для $i=1, 2, \ldots, k$

$$|T_i\circ T_{i+1}\circ\ldots\circ T_k(x)-T_i\circ T_{i+1}\circ\ldots\circ T_k(y)| < 1/k \quad (T_m = S_{\Delta_m}\circ T_{\tilde{\varphi}_{m+1}}).$$

Получим последовательность функций $\{f_{k,i}\}_{i=k-1}^{\infty}$ $(k=1, 2, \ldots;\ f_{10}=\varphi_1)$ и эндоморфизмов $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям:

(32) $f_{k,i}$ равноизмерима с φ_k $(i=k-1, k, \ldots)$;
(33) для любого i система $\{f_{k,i}\}_{k=1}^{i+1}$ центрирована;
(34) $f_{k,i}=f_{k,i-1}\circ T_i$, $i=1, 2, \ldots;\ k=1, 2, \ldots, i$;
(35) для любого $x\in[0, 1]$ $|T_k(x)-x|<\max\limits_i \mu\delta_{i,k}$.

Из (35) и (31) следует, что любая последовательность эндоморфизмов $\{S_n^k=T_k\circ T_{k+1}\circ\ldots\circ T_n\}_{n=k}^{\infty}$ $(k=1, 2, \ldots)$ удовлетворяет условиям замечания 3 и, следовательно, сходится равномерно: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^k(x)=S^k(x)$.

Из (34) следует, что

$$\lim_{i\to\infty} f_{k,i}(x) = \lim_{i\to\infty} f_{k,m-1}(S_i^k(x)) = f_{k,m-1}(S^m(x)) \quad (m \geqq k).$$

Очевидно, предельная функция не зависит от m, так как для любого $n \geqq 1$, $T_n \circ T_{n+1} \circ \ldots \circ T_{m-1} \circ S^m = S^n$.

Обозначим: $f_{k,m-1}(S^m(x)) = f_k(x)$. Система $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — искомая. Действительно, для любого i

$$f_k(x) = f_{k,i-1}(S^i(x)), \quad k = 1, 2, \ldots, i.$$

Но S^i — эндоморфизм. Следовательно, в силу (32), (33) и замечания 1, f_k равноизмерима с φ_k и $\{f_k\}_{k=1}^{i}$ — центрирована.

Теорема полностью доказана.

Литература

[1] R. F. Gundy, Martingale theory and pointwise convergence of certain orthogonal series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **124** (1966), 228—248.

[2] А. В. Бахшецян, О структуре некоторых классов центрированных систем, *Изв. АН Арм. ССР. Сер. Мат.*, **13** (1978), 301—314.

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
УЛ. МРАВЯНА, 1
375049 ЕРЕВАН, СССР