Acta Sci. Math. 47 (1984), 297—301

Многообразия квазиортодоксальных полугрупп

Н. Г. ТОРЛОПОВА

Регулярная полугруппа называется ортодоксальной, если множество всех ее идемпотентов образует подполугруппу в ней. Произвольную полугруппу с таким же свойством множества всех ее идемпотентов назовем квазиортодоксальной. Многообразие полугрупп V назовем квазиортодоксальным, если каждая полугруппа из V квазиортодоксальна.

В настоящей работе дан критерий, позволяющий по совокупности тождеств Φ, задающей многообразие полугрупп V, выяснить, является ли V квазиортодоксальным. Кроме того, описаны минимальные неквазиортодоксальные многообразия полугрупп, т.е. такие неквазиортодоксальные многообразия, каждое собственное подмногообразие которых является квазиортодоксальным.

Все необходимые сведения из теории полугрупп можно найти в [1] и [5].

1. Через S_0 обозначим следующую четырехэлементную полугруппу:

	1	2	3	0
1	1	3	3	0
2	0	2	0	0
3	0	3	0	0
0	0	0	0	0

Через S_p обозначим вполне простую полугруппу над циклической группой простого порядка p с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & g \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

где g — образующий элемент группы, 1 — ее единица.

2. Предложение 1. *Если многообразие полугрупп V не является квазиортодоксальным, то либо $S_p \in V$ для некоторого простого p, либо $S_0 \in V$.*

Поступило 10 ноября 1982, в переработанной форме 10 марта 1983.

Доказательство. Так как V не является квазиортодоксальным, то V содержит полугруппу S, порожденную идемпотентами e и f, такими, что $ef \neq (ef)^2$. Рассмотрим идеал I полугруппы S, порожденный элементами efe и fef. Возможен один из случаев: 1) $ef \in I$ и $fe \in I$; 2) $ef \notin I$ или $fe \notin I$.

Используя результаты работы [2], заключаем, что в первом случае существует натуральное число k, такое, что $ef=(ef)^k$, $fe=(fe)^k$, $k>2$ и k — наименьшее из всех чисел с таким свойством. Обозначим через $H_{e,e}=\{(ef)^\alpha e\}$, $H_{f,e}=\{(fe)^\alpha\}$, $H_{e,f}=\{(ef)^\alpha\}$, $H_{f,f}=\{(fe)^\alpha f\}$, где $\alpha=1, 2, \ldots, k-1$. Каждое из этих множеств есть, очевидно, подгруппа в I; $H_{i,j} \cap H_{m,l}=\emptyset$ при $i \neq m$ или $j \neq l$ $(i, j, m, l \in \{e, f\})$, а поэтому $I=\bigcup\limits_{i,j \in \{e,f\}} H_{i,j}$ есть прямоугольная связка групп, а значит (см. [5], стр. 114), I — вполне простая полугруппа. Обозначим через $\Lambda=\{e, f\}$, через G циклическую группу порядка $k-1$: $G=\{a, a^2, \ldots, a^{k-1}=1\}$. Тогда $I \cong \mathcal{M}(G, \Lambda, \Lambda, P)$, где $P=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{M}(G, \Lambda, \Lambda, P)$ — регулярная рисовская полугруппа матричного типа над группой G.

Так как $k-1>1$, то существует простое число p, такое, что $k-1$ делится на p. А значит, существует подгруппа H группы G порядка p. Пусть h — образующий элемент группы H. Тогда существует гомоморфизм φ группы G на H, при котором $\varphi(a)=h$. А значит, как известно (см. [5], 3.11), регулярная рисовская полугруппа $\mathcal{M}(H, \Lambda, \Lambda, P^*)$, где $P^*=\begin{pmatrix} 1 & h \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, является гомоморфным образом полугруппы $\mathcal{M}(G, \Lambda, \Lambda, P)$. Так как $S \in V$, V — многообразие полугрупп, то $\mathcal{M}(H, \Lambda, \Lambda, P^*) \in V$. Но полугруппа $\mathcal{M}(H, \Lambda, \Lambda, P^*)$ есть ничто иное, как S_p. Итак, если $ef \in I$ и $fe \in I$, то нашлось такое простое число p, что $S_p \in V$.

Если $ef \notin I$, $fe \in I$, то фактор-полугруппа Риса S/I изоморфна полугруппе S_0. Если $ef \notin I$ и $fe \notin I$, то фактор-полугруппа Риса $(S/I)/I^*$ полугруппы S/I по идеалу $I^*=I \cup \{fe\}$ изоморфна S_0. Таким образом, если $ef \notin I$ или $fe \notin I$, то $S_0 \in V$.

Предложение 1 доказано полностью.

3. Пусть $u=v$ — тождество над счетным алфавитом X. Через $l_z(u)$ обозначим число вхождений буквы z в слово u; $l_{xy}(u)$ — число вхождений слова xy в слово u; $h(u)$ — первую букву слова u; $t(u)$ — последнюю букву слова u; $\chi(u)$ — множество букв алфавита X, участвующих в записи слова u; если $\chi(u)=\chi(v)$, то, как обычно, назовем тождество $u=v$ нормальным. Через $\operatorname{Var} A$ обозначим многообразие полугрупп, порожденное полугруппой A. Равенство элементов в полугруппе слов над алфавитом X будем обозначать так: $\equiv$.

4. Используя результаты работы [7] или [8], нетрудно убедиться в том, что справедливо

Предложение 2. $\operatorname{Var} S_p=\Pi\left((xy)^p x=x,\ x^2yx=xyx^2\right)$.

5. Определение. Тождество $u=v$ над счетным алфавитом X назовем квазиортодоксальным, если $u=v$ не является нормальным, либо $u=v$ нормально и для него имеет место дизъюнкция следующих двух условий:

1) одно из слов, например, u, можно представить в виде $u\equiv u_1u_2$, где $\chi(u_1)\cap\chi(u_2)=\emptyset$, а слово $v\equiv v_1yxv_2$, где $y\in\chi(u_2)$, $x\in\chi(u_1)$.

2) одно из слов u и v, например, u, представимо в виде: $u\equiv u_1zu_2$, $\chi(u_1)\cap\chi(u_2)=\emptyset$, $l_z(u)=1$, причем либо $l_z(v)>1$, либо $l_z(v)=1$, $v\equiv v_1zv_2$, $\chi(v_1)\cap\chi(u_2)\neq\emptyset$ или $\chi(v_2)\cap\chi(u_1)\neq\emptyset$.

6. Предложение 3. *Тождество $u=v$ выполняется в полугруппе S_0 тогда и только тогда, когда оно не является квазиортодоксальным.*

Доказательсто. Необходимость. Пусть тождество $u=v$ выполняется в полугруппе S_0. Допустим, что $u=v$ не является нормальным, т.е. существует буква $z\in\chi(u)$ и $z\notin\chi(v)$. Строим отображение φ: $X\to S_0$ следующим образом: $\varphi z=2$, $\varphi x=1$, $\forall x\neq z$. Тогда $\varphi v=1$, $\varphi u=3$ или $\varphi u=0$ или $\varphi u=2$.

Значит, тождество $u=v$ нормально. Допустим, что $u=v$ квазиортодоксально. Тогда имеет место хотя бы одно из условий определения квазиортодоксального тождества. Пусть имеет место первое условие, т.е. слово u представимо в виде: $u\equiv u_1u_2$, $\chi(u_1)\cap\chi(u_2)=\emptyset$, а $v\equiv v_1yxv_2$, где $y\in\chi(u_2)$, $x\in\chi(u_1)$. Строим отображение φ: $X\to S_0$ следующим образом: полагаем $\varphi x_i=1$ $\forall x_i\in\chi(u_1)$, $\varphi y_j=2$ $\forall y_j\in\chi(u_2)$. Тогда $\varphi u=1\cdot 2=3$, $\varphi v=\varphi v_1\cdot 2\cdot 1\cdot\varphi v_2=0$. Противоречие.

Пусть теперь для тождества $u=v$ имеет место второе условие определения квазиортодоксального тождества. Пусть $u\equiv u_1zu_2$, где $\chi(u_1)\cap\chi(u_2)=\emptyset$, $z\notin\chi(u_1)\cup\chi(u_2)$, а $l_z(v)>1$. Зададим отображение φ: $X\to S_0$, положив $\varphi z=3$, $\varphi x=1$ $\forall x\in\chi(u_1)$, $\varphi y=2$ $\forall y\in\chi(u_2)$. Тогда $\varphi u=3$, $\varphi v=0$. Если же $v\equiv v_1zv_2$, где $l_z(v)=1$, $\chi(v_1)\cap\chi(u_2)\neq\emptyset$ или $\chi(v_2)\cap\chi(u_1)\neq\emptyset$, то опять будем иметь $\varphi u=3$, $\varphi v=0$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть тождество $u=v$ нормально и не является квазиортодоксальным. Допустим, что $u=v$ не выполняется в S_0. Значит, существует отображение φ: $X\to S_0$ такое, что $\varphi u\neq\varphi v$. Не может быть $\varphi u=1$ или $\varphi u=2$, так как это означало бы, что все буквы из $\chi(u)$ отображаются при φ в 1 или 2, а так как $\chi(u)=\chi(v)$, то это означало бы, что $\varphi u=\varphi v$. Аналогично, $\varphi v\neq 1$ и $\varphi v\neq 2$. Значит, один из элементов φu и φv, например φu, равен 3, а другой — 0. Итак, пусть $\varphi u=3$, $\varphi v=0$. Если никакая буква из $\chi(u)=\chi(v)$ не отображается при φ в 3, то $\chi(u)$ есть объединение двух непересекающихся множеств $\{x_1, \ldots, x_m\}$, $\{y_1, \ldots, y_t\}$, при этом $\varphi x_i=1$, $\varphi y_j=2$, $i=1, \ldots, m$; $j=1, \ldots, t$. А так как $\varphi u=3$, то $u\equiv u_1u_2$, $\chi(u_1)=\{x_1, \ldots, x_m\}$, $\chi(u_2)=\{y_1, \ldots, y_t\}$. Так как $\varphi v=0$, то в этом случае $v \equiv v_1 y_{j_0} x_{i_0} v_2$, где $j_0 \in \{1, \dots, t\}$, $i_0 \in \{1, \dots, m\}$. А это означает, что $u=v$ является квазиортодоксальным.

Если существует буква $z \in \chi(u)=\chi(v)$ такая, что $\varphi z=3$, то $l_z(u)=1$, так как $\varphi u=3$; $u \equiv u_1 z u_2$, $\chi(u_1) \cap \chi(u_2)=\emptyset$, причем $\varphi(\chi(u_1))=\{1\}$, $\varphi(\chi(u_2))=\{2\}$, если $u_1 \not\equiv \emptyset$ или $u_2 \not\equiv \emptyset$. Так как $\varphi v=0$, то либо $l_z(v)>1$, либо $l_z(v)=1$, но $v \equiv \equiv v_1 z v_2$, где $\chi(v_1) \cap \chi(u_2) \neq \emptyset$ или $\chi(v_2) \cap \chi(u_1) \neq \emptyset$. А это опять означает, что тождество $u=v$ квазиортодоксально.

Предложение 3 доказано.

7. В работах [4], [9] указан базис тождеств полугруппы S_0, а именно:

$$\operatorname{Var} S_0 = \Pi(x^2 = x^3,\ xyx = yxy,\ xyzx = xzyx,\ xyx = xyx^2).$$

Отметим, что доказательство этого факта вытекает из Предложения 3.

8. Введем еще несколько определений. Пусть $u=v$ — тождество над алфавитом X. Через $d(u=v)$ обозначим наибольший общий делитель разностей $|l_x(u)-l_x(v)|$ по всем $x \in X$. Если Φ — некоторая совокупность тождеств, то через $D(\Phi)$ обозначим наибольший общий делитель всех чисел $d(u=v)$ по всем тождествам $u=v$ из Φ. (Эта характеристика была рассмотрена в [3]).

Для каждого слова xy (x и y не обязательно различные буквы алфавита) находим $|l_{xy}(u)-l_{xy}(v)|$ и наибольший общий делитель всех этих чисел назовем двухбуквенной характеристикой тождества $u=v$. Наибольший общий делитель двухбуквенных характеристик всех тождеств из совокупности Φ назовем двухбуквенной характеристикой Φ и обозначим $D^*(\Phi)$. ($D^*(\Phi)$ рассматривалась в [6]). Наибольший общий делитель чисел $D(\Phi)$ и $D^*(\Phi)$ назовем характеристикой совокупности тождеств Φ.

9. Теорема 1. *Следующие свойства для многообразия полугрупп $V=\Pi(\Phi)$ эквивалентны:*

1) *V — квазиортодоксальное многообразие полугрупп;*
2) *V не содержит полугрупп S_0, S_p, где p — произвольное простое число;*
3) *совокупность тождеств Φ удовлетворяет двум условиям:*
   а) *$h(u) \neq h(v)$ или $t(u) \neq t(v)$ для некоторого тождества $u=v$ из Φ, или же характеристика Φ равна* 1;
   б) *среди тождеств Φ есть хотя бы одно квазиортодоксальное тождество.*

Доказательство. Согласно Предложению 1 многообразие V квазиортодоксально (поскольку полугруппы S_0, S_p по всем простым p не квазиортодоксальны) тогда и только тогда, когда V не содержит полугрупп S_0, S_p (по всем простым p). Согласно Предложению 3, V не содержит S_0 тогда и только тогда, когда среди тождеств из Φ есть хотя бы одно квазиортодоксальное тождество.

Согласно Предложению 2 и результатам работ [6], [7], [8], V не содержит полугрупп S_p тогда и только тогда, когда V удовлетворяет условию а).

10. Теорема 2. *Минимальными неквазиортодоксальными многообразиями полугрупп являются следующие:*

$$\mathrm{Var}\, S_p = \Pi\big((xy)^p x = x,\ x^2yx = xyx^2\big),$$

где p-произвольное простое число, и

$$\mathrm{Var}\, S_0 = \Pi(x^2 = x^3,\ xyx = yxy,\ xyzx = xzyx,\ xyx = xyx^2).$$

Доказательство. 1) Каждое из перечисленных многообразий не является квазиортодоксальным, поскольку неквазиортодоксальны полугруппы S_0, S_p.

2) Допустим, что $\mathrm{Var}\, S_p$ не является минимальным. Тогда существует собственное неквазиортодоксальное подмногообразие V' многообразия $\mathrm{Var}\, S_p$. А значит V', а тогда и $\mathrm{Var}\, S_p$, содержит S_0 или S_q, где q — некоторое простое число. Но $S_0 \notin \mathrm{Var}\, S_p$, так как в полугруппе S_0 не выполняется тождество $(xy)^p x = x$. $S_q \notin \mathrm{Var}\, S_p$ при $q \neq p$, так как тождество $(xy)^p x = x$ не выполняется и в полугруппе S_q. Значит, $\mathrm{Var}\, S_p \subset V'$, а тогда $\mathrm{Var}\, S_p = V'$. Значит, $\mathrm{Var}\, S_p$ минимально.

Поскольку тождество $xyx = xyx^2$ не выполняется ни в какой полугруппе S_p, то $\mathrm{Var}\, S_0$ — минимально.

Других минимальных неквазиортодоксальных многообразий полугрупп нет. Это непосредственно следует из Предложения 1.

Литература

[1] А. Я. Айзенштат, В. К. Богута, О решетке многообразий полугрупп, *Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов* (Ленинград, 1979), 3—46.

[2] C. Benzaken et H. C. Mayr, Notion de demi-bande: demi-bandes de type deux, *Semigroup Forum*, **10** (1975), 115—128.

[3] А. П. Бирюков, Полугруппы, заданные тождествами, *Уч. зап. Новосибирского Гос. Пед. ин-та, Физика и математика, Новосибирск*, **18** (1963), 139—169.

[4] C. C. Edmunds, On certain finitely based varieties of semigroups, *Semigroup Forum*, **15** (1977), 21—39.

[5] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups. I*, Amer. Math. Soc. (Providence, R. I., 1968).

[6] Г. И. Машевицкий, О тождествах вполне простых полугрупп над абелевыми группами, *XXXI Герценовские чтения* (Ленинград, 1978), 33—36.

[7] Г. И. Машевицкий, О тождествах в многообразиях вполне простых полугрупп над абелевыми группами, — В сб.: *Современная алгебра* (Ленинград, 1978), 81—89.

[8] V. V. Rasin, On the lattice of varieties of completely simple semigroups, *Semigroup Forum*, **17** (1979), 113—122.

[9] Е. П. Симельгор, О тождествах четырехэлементных полугрупп, — В сб.: *Современная алгебра* (Ленинград, 1978), 146—153.

УЛ. МАРКСА 227, КВ. 15
167000 СЫКТЫВКАР, СССР