Acta Sci. Math., 48 (1985), 297—313

Toeplitz-Kriterien für Matrizenklassen bei Räumen stark limitierbarer Folgen

EBERHARD MALKOWSKY

Herrn Prof. K. Tandori gewidmet zum sechzigsten Geburtstag

Kapitel 1. Einleitung, Bezeichnungen und grundlegende Ergebnisse. Im Satz von Toeplitz wird die Klasse (c, c) aller unendlichen Matrizen bestimmt, die den Raum c der konvergenten Folgen in sich abbilden; dabei wird (c, c) durch Bedingungen für die Matrixelemente charakterisiert, die sogenannten Toeplitz-Kriterien. Wir wollen Toeplitz-Kriterien für Klassen (X, Y) angeben, wo X oder Y Räume stark limitierbarer Folgen sind. Für einige interessante Fälle ist es in allgemeinen Sätzen gelungen, die Charakterisierung von (X, Y) auf die Bestimmung der zugehörigen Köthe-Toeplitz-Dualräume zurückzuführen. Für spezielle Wahl von X bzw. Y erhält man daraus Sätze, die unter anderem bekannte Ergebnisse von Maddox aus [1] verallgemeinern. Darüber hinaus werden Toeplitz-Kriterien für Matrixabbildungen zwischen Räumen absolut und stark limitierbarer Folgen angegeben.

Zunächst benötigen wir einige Bezeichnungen. Wir setzen die Begriffe „r-normierter Raum" und „Schauder-Basis" oder kurz „Basis" als bekannt voraus (s. [2], S. 94 und S. 87).

Mit A bezeichnen wir unendliche Matrizen $(a_{nk})_{n,k\in\mathrm{N}}$ komplexer Zahlen und mit A' die zu A transponierte Matrix.

Mit s bezeichnen wir die Menge aller komplexen Folgen $x=(x_k)_k$.

Wir benutzen die üblichen Bezeichnungen für die Folgenräume l_p $(0<p<\infty)$, l_∞, c_0 und c sowie $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_\infty$ für die zugehörigen p-Normen $(0<p<1)$ bzw. Normen $(1\leqq p\leqq\infty)$.

Wir schreiben $e^{(m)}$ $(m\in\mathrm{N})$ für die Folge mit $e_k^{(m)}:=1$ für $k=m$ und $e_k^{(m)}:=0$ für $k\neq m$, e für die Folge mit $e_k:=1$ $(k=1, 2, \ldots)$.

Sind X und Y Teilmengen von s, so schreiben wir:

(X, Y) für die Klasse aller Matrizen A, für die

Eingegangen am 10 November, 1983.

$A_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ für alle $x \in X$ und für alle $n \in \mathbf{N}$ existiert und
$A(x) := (A_n(x))_n \in Y$ für alle $x \in X$;
$|X, Y| := \{A \in (X, Y) | \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} x_k| < \infty$ für alle $n \in \mathbf{N}$ und für alle $x \in X\}$;
$(X, Y)' := \{A | A' \in (X, Y)\}$ und $|X, Y|' := \{A | A' \in |X, Y|\}$.
Ist X ein r-normierter Raum, so setzen wir

$$S_X := \{x \in X | \; \|x\| = 1\}.$$

Ist B ein beschränkter linearer Operator von einem r-normierten Raum X in einen normierten Raum Y, so definieren wir die Operatornorm von B wie üblich durch

$$\|B\| := \sup \{\|B(x)\| \; | x \in S_X\}.$$

Für Teilmengen X von s definieren wir die folgenden Dualräume von X

$$X^{\dagger} := \Big\{a \in s \Big| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ konvergiert für alle } x \in X\Big\},$$

den Köthe—Toeplitz-Dualraum von X,

$$X^{|\dagger|} := \Big\{a \in s \Big| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty \quad \text{für alle } x \in X\Big\}$$

und falls X ein r-normierter Teilraum von s ist

$$X^{\|\dagger\|} := \Big\{a \in s | \sup_{x \in S_X} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| < \infty\Big\}$$

und weiter

$$\|a\|^{\dagger} := \sup_{x \in S_X} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k\Big| \quad \text{sowie} \quad \|a\|^{\|\dagger\|} := \sup_{x \in S_X} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k|\Big) \tag{1.1}$$

für alle $a \in s$, für die die Ausdrücke rechts existieren.

Für beliebige lineare metrische Räume X bezeichnen wir mit X^* den Raum der stetigen linearen Funktionale auf X. Sind zwei lineare metrische Räume X und Y isometrisch isomorph, so schreiben wir $X \cong Y$.

Im folgenden sei X stets eine Teilmenge von s.

Ist $a \in X$, so wird durch

$$f_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{für alle } x \in X \tag{1.2}$$

ein lineares Funktional auf X definiert. Wir schreiben $X^{\dagger} \subset X^*$, wenn aus $a \in X^{\dagger}$ folgt $f_a \in X^*$; analog ist die Schreibweise $X^{|\dagger|} \subset X^*$ und $X^{\|\dagger\|} \subset X^*$ zu verstehen.

In [3] haben wir die folgenden Sätze bewiesen:

Satz I. *Sei X ein r-normierter Teilraum von s mit Basis $(e^{(k)})_k$. Gilt $X^\dagger \subset X^*$, so folgt $X^\dagger \cong X^*$.*

Satz II. *Sei X ein vollständiger r-normierter Teilraum von s. Gilt $X^\dagger \subset X^*$, so folgt*

$$A \in (X, l_\infty) \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbf{N}} \|(a_{nk})_k\|^\dagger < \infty.$$

Satz III. *Sei Y ein Teilraum von s und $(Y^\dagger, \|\cdot\|_\dagger)$ ein normierter Raum. Gilt $Y^{\dagger\|\dagger\|} := (Y^\dagger)^{\|\dagger\|} = Y$, so folgt*

$$A \in (l_\infty, Y) \Leftrightarrow \sup_{N \subset \mathbf{N}} \Big\|\Big(\sum_{k \in N} a_{nk}\Big)_n\Big\|_\dagger^{\|\dagger\|} < \infty.$$

Die Klasse (X, c) können wir durch den folgenden Satz bestimmen:

Satz 1.1. *Sei X ein vollständiger r-normierter Teilraum von s mit Basis $(e^{(k)})_k$. Dann gilt*

$$A \in (X, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & M := \sup_{n \in \mathbf{N}} \|(a_{nk})_k\|^\dagger < \infty \\ \text{(ii)} & \lim_{n \to \infty} a_{nk} = a_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Beweis. Es folgt, daß X ein FK-Raum ist (s. [8], Korollar 1, S. 208), und daher ist $X^\dagger \subset X^*$ (s. [8], Problem 1, S. 205).

Es gelte $A \in (X, c)$. Wegen $c \subset l_\infty$ folgt $A \in (Y, l_\infty)$ und daher (i) mit Satz II. Wegen $(A_n(x))_n \in c$ für alle $x \in X$ gibt es zu jedem $e^{(k)} \in X$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ein $a_k \in \mathbf{C}$ mit $\lim_{n \to \infty} A_n(e^{(k)}) = \lim_{n \to \infty} a_{nk} = a_k$.

Umgekehrt seien (i) und (ii) erfüllt. Wegen (i) und (1.1) existiert $A_n(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ für alle $x \in X$ und für alle $n \in \mathbf{N}$. Es ist $(a_k)_k \in X^\dagger$, denn: Sei $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{(k)} \in X$ beliebig; sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $k_0 \in \mathbf{N}$ so groß, daß für alle $l, m > k_0$ $(m > l)$ mit $x^{(l,m)} := \sum_{k=l}^{m} x_k e^{(k)}$ gilt: $\|x^{(l,m)}\| < (\varepsilon/M)^r$ $(M \neq 0$; für $M = 0$ ist die Behauptung klar). Dann gilt für alle $l, m > k_0$ und für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\Big|\sum_{k=l}^{m} a_k x_k\Big| \leqq \Big|\sum_{k=l}^{m} (a_k - a_{nk}) x_k\Big| + \Big|\sum_{k=l}^{m} a_{nk} x_k\Big| \leqq$$

$$\leqq \Big|\sum_{k=l}^{m} (a_k - a_{nk}) x_k\Big| + \|(a_{nk})_k\|^\dagger \cdot \|x^{(l,m)}\|^{1/r} \leqq \Big|\sum_{k=l}^{m} (a_{nk} - a_k) x_k\Big| + \varepsilon.$$

Mit (ii) folgt daraus für $n \to \infty$: $\Big|\sum_{k=l}^{m} a_k x_k\Big| \leqq \varepsilon$ für alle $m, l > k_0$. Also konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in X$, d. h. $(a_k)_k \in X^\dagger$. Wegen $X^\dagger \subset X^*$ gilt $f_a \in X^*$, wobei $f_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in X$. Sei $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{(k)} \in X$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $k_0 \in \mathbf{N}$

so groß, daß

$$\Big\|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} x_k e^{(k)}\Big\|^{1/r} < \frac{\varepsilon}{2(M+\|f_a\|)}.$$

Wähle nun $N_0 \in \mathbf{N}$, so daß für alle $n > N_0$

$$\Big|\sum_{k=1}^{k_0} (a_{nk}-a_k)x_k\Big| < \varepsilon/2.$$

Dann gilt für alle $n > N_0$:

$$|A_n(x)-f_a(x)| = \Big|A_n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{(k)}\Big)-f_a\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{(k)}\Big)\Big| \leqq$$

$$\leqq \Big|\sum_{k=1}^{k_0} (a_{nk}-a_k)\, x_k\Big| + \Big|A_n\Big(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} x_k e^{(k)}\Big)\Big| + \Big|f_a\Big(\sum_{k=k_0+1}^{\infty} x_k e^{(k)}\Big)\Big| <$$

$$< \varepsilon/2 + (M+\|f_a\|)\Big\|\sum_{k=k_0+1}^{\infty} x_k e^{(k)}\Big\|^{1/r} < \varepsilon.$$

Somit ist $(A_n(x))_n \in c$ für alle $x \in X$, und der Satz ist bewiesen.

Man erhält sofort:

Korollar 1.1. *Sei X ein vollständiger r-normierter Teilraum von s mit Basis $(e^{(k)})_k$. Dann gilt*

$$A \in (X, c_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & M < \infty \qquad (M \text{ wie in Satz } 1.1) \\ \text{(ii)} & \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{cases}.$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit benutzen wir noch die folgenden Bezeichnungen: Ist z eine beliebige komplexe Zahl, so schreiben wir:

$$\operatorname{sgn} z := \begin{cases} \dfrac{|z|}{z} & \text{für} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad z = 0. \end{cases}$$

(1.3) $$\tilde{p} := \begin{cases} \max\{1, 1/p\} & \text{für} \quad 0 < p < \infty \\ 1 & \text{für} \quad p = \infty \end{cases} \qquad q := \begin{cases} \infty & \text{für} \quad 0 < p \leqq 1 \\ \dfrac{p}{p-1} & \text{für} \quad 1 < p < \infty \\ 1 & \text{für} \quad p = \infty, \end{cases}$$

so daß $l_p^\dagger = l_q$ für alle p mit $0 < p \leqq \infty$, und wir erhalten damit für alle $x \in l_p$ und für alle $y \in l_q$

(1.4) $$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leqq \|x\|_p^{\tilde{p}} \|y\|_q;$$

$N^{(\nu)} := \{l \in \mathbf{N} \mid 2^\nu \leqq l \leqq 2^{\nu+1}-1\}$ für alle $\nu \in \mathbf{N}_0$, Σ_ν bzw. $\max_\nu$ als die Summe bzw. das Maximum gebildet über alle Indizes $l \in N^{(\nu)}$.

Für alle $\alpha \in \mathbf{R}$ und für alle $n=0, 1, \ldots$ bezeichnen wir mit A_n^α den n-ten Cesaro-Koeffizienten der Ordnung α, also $A_n^\alpha := \binom{n+\alpha}{n}$. Ist $x \in s$ beliebig, so schreiben wir für alle $\alpha > 0$ und für alle $t \in \mathbf{R}$ $x(\alpha; t)$ für die Folge $\left(x_k(\alpha; t)\right)_k$ mit

$$x_k(\alpha; t) := \left[\frac{A_{2^{\nu+1}-k}^{\alpha-1}}{A_{2^\nu-1}^{\alpha}}\right]^{1/t} \cdot x_k \quad \text{für} \quad k \in N^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

und für alle $\nu \in \mathbf{N}_0$ schreiben wir $x^{(\nu)}(\alpha; t)$ für die Folge $\left(x_k^{(\nu)}(\alpha; t)\right)_k$ mit

$$x_k^{(\nu)}(\alpha; t) := \begin{cases} x_k(\alpha; t) & \text{für} \quad k \in N^{(\nu)} \\ 0 & \text{für} \quad k \notin N^{(\nu)}. \end{cases}$$

Kapitel 2. Die Räume $[\tilde{C}_\alpha]^p$, $[\tilde{C}_\alpha]_0^p$ und $[\tilde{C}_\alpha]_\infty^p$. In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit bestimmten Räumen stark limitierbarer Folgen. Dazu definieren wir:

Definition 2.1. Für alle $\alpha > 0$ und für alle p mit $0 < p < \infty$ definieren wir die Mengen

$$[\tilde{C}_\alpha]^p := \left\{x \in s \,|\, \text{Es gibt ein } l \in \mathbf{C} \text{ mit } \left(\|(x-le)^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p\right)_\nu \in c_0\right\},$$

$$[\tilde{C}_\alpha]_0^p := \left\{x \in s \,|\, \left(\|x^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p\right)_\nu \in c_0\right\}$$

und

$$[\tilde{C}_\alpha]_\infty^p := \left\{x \in s \,|\, \left(\|x^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p\right)_\nu \in l_\infty\right\}.$$

Bemerkungen. (1) $x \in [\tilde{C}_\alpha]^p$ bedeutet nach der von Borwein in [4] eingeführten Schreibweise für die starke Limitierbarkeit, daß die Folge x zu einem $l \in \mathbf{C}$ $[\tilde{C}_\alpha, I]^p$-limitierbar* ist, $x \in [\tilde{C}_\alpha]_0^p$ bedeutet, daß die Folge x zu 0 $[\tilde{C}_\alpha, I]^p$-limitierbar ist, und $x \in [\tilde{C}_\alpha]_\infty^p$ bedeutet, daß die Folge x $[\tilde{C}_\alpha, I]^p$-beschränkt ist; dabei bezeichnet $\tilde{C}_\alpha$ das modifizierte Cesaro-Verfahren der Ordnung α mit der zugehörigen Matrix $\tilde{C}_\alpha = (\tilde{C}_{nk}^\alpha)_{n,k}$ mit

$$\tilde{C}_{nk}^\alpha := \begin{cases} e_k(\alpha; 1) & \text{für} \quad k \in N^{(\nu)}, \quad n = 2^\nu \\ 0 & \text{sonst} \quad (\nu = 0, 1 \ldots). \end{cases}$$

(2) Ist $x \in [\tilde{C}_\alpha]^p$, dann ist das $l \in \mathbf{C}$ mit $\|(x-le)^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p = o(1)$ $(\nu \to \infty)$ eindeutig bestimmt. (Das zeigt man leicht; oder s. [5], Satz 2.)

Um im folgenden die Bezeichnungen zu vereinfachen, schreiben wir $[\tilde{C}]$ für die Mengen $[\tilde{C}_\alpha]^p$, $[\tilde{C}_\alpha]_0^p$ und $[\tilde{C}_\alpha]_\infty^p$.

Man sieht sofort, daß die Mengen $[\tilde{C}]$ mit der üblichen Addition von Folgen und der üblichen Multiplikation von Folgen mit einem Skalar zu linearen Räumen werden.

Definition 2.2. Für alle $\alpha > 0$ und für alle p mit $0 < p < 1$ definieren wir die p-Norm und für alle p mit $1 \leqq p < \infty$ die Norm $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]}$ für die Räume $[\tilde{C}]$ durch $\|x\|_{[\tilde{C}]} := \left\|\left(\|x^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p\right)_\nu\right\|_\infty$ für alle $x \in [\tilde{C}]$.

*) I bezeichnet die Einheitsmatrix bzw. des entsprechende Limitierungsverfahren.

Wir beweisen als erstes einen Satz über die Struktur der Räume $[\tilde{C}]$.

Satz 2.1.

(a) *Für alle* $\alpha>0$ *und für alle* p *mit* $0<p<\infty$ *sind die Räume* $[\tilde{C}]$ *mit* $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]}$ *vollständig.*

(b) *Für alle* $\alpha>0$ *und für alle* p *mit* $0<p<\infty$ *ist* $(e^{(k)})_k$ *eine Basis für* $[\tilde{C}_\alpha]_0^p$, *und die Folgen* $e, e^{(k)}$ $(k\in\mathbf{N})$ *bilden eine Basis für* $[\tilde{C}_\alpha]^p$.

Beweis. (a) Die Vollständigkeit von $[\tilde{C}_\alpha]_0^p$ und von $[\tilde{C}_\alpha]_\infty^p$ bzgl. $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]}$ folgt mit [6], S. 318, und die Vollständigkeit von $[\tilde{C}_\alpha]^p$ bzgl. $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]}$ folgt mit Satz 5 (ii) aus [6].

(b) Man sieht leicht, daß für alle $k\in\mathbf{N}$ $e^{(k)}\in[\tilde{C}]$ und $e\in[\tilde{C}_\alpha]^p$. Sei $x=(x_k)_k\in[\tilde{C}_\alpha]_0^p$ beliebig. Dann ist für alle $m\in\mathbf{N}$

$$\sum_{k=1}^{m} x_k e^{(k)}\in[\tilde{C}_\alpha]_0^p.$$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Wegen $x\in[\tilde{C}_\alpha]_0^p$ gibt es ein $\nu_0\in\mathbf{N}_0$, so daß für alle $\nu\geqq\nu_0$ $\|x^{(\nu)}(\alpha;p)\|_p<\varepsilon$. Dann gilt für alle $m\geqq 2^{\nu_0}$

$$\Big\|x-\sum_{k=1}^{m} x_k e^{(k)}\Big\|_{[\tilde{C}]}<\varepsilon.$$

Also hat x die Darstellung $x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k e^{(k)}$, und man sieht leicht, daß diese Darstellung eindeutig ist.

Genauso zeigt man, daß jedes $x\in[\tilde{C}_\alpha]^p$ mit $\|(x-le)^{(\nu)}(\alpha;p)\|_p=o(1)$ $(\nu\to\infty)$ die eindeutige Darstellung $x=le+\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-l)e^{(k)}$ hat.

Wir wollen nun einige Bemerkungen machen, die unter anderem die Verbindung der Räume $[\tilde{C}_\alpha]^p$ zu den bekannten Räumen w_p herstellen: In [1] sind die Räume w_p der $[C_1, I]^p$-limitierbaren Folgen für $0<p<\infty$ untersucht worden:

$$w_p:=\left\{x\in s \,|\, \text{Es gibt ein } l\in C \text{ mit } \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k-l|^p\right)_n\in c_0\right\}$$

mit den durch

$$\|x\|_{w_p}^{(1)}:=\sup_{n\in\mathbf{N}}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)\quad\text{und}\quad \|x\|_{w_p}:=\|x\|_{[\tilde{C}_1]_\infty^p}$$

für alle $x\in w_p$ definierten und auf w_p äquivalenten p-Normen $(0<p<1)$ bzw. Normen $(1\leqq p<\infty)$ $\|\cdot\|_{w_p}^{(1)}$ und $\|\cdot\|_{w_p}$ (s. [1], S. 286).

Wenn wir für alle $\alpha>0$ und für alle p mit $0<p<\infty$

$$[C_\alpha]^p:=\{x\in s \,|\, \text{Es gibt ein } l\in C \text{ mit } (\sigma_n^\alpha(|x-le|^p)_n\in c_0)\},$$

$$[C_\alpha]_0^p:=\{x\in s \,|\, (\sigma_n^\alpha(|x|^p))_n\in c_0\}\quad\text{und}\quad [C_\alpha]_\infty^p:=\{x\in s \,|\, (\sigma_n^\alpha(|x|^p))_n\in l_\infty\}$$

schreiben, wobei für alle $n=1,2,\ldots$ und für alle $x\in s$

$$\sigma_n^\alpha(x):=\frac{1}{A_{n-1}^\alpha}\sum_{k=1}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1}x_k \quad \text{und} \quad |x|^p \quad \text{für die Folge} \quad (|x_k|^p)_k$$

geschrieben wird, so ist für $\alpha:=1$ $[C_1]^p=w_p$. Wir schreiben kurz $[C]$ für $[C_\alpha]^p$, $[C_\alpha]_0^p$ und $[C_\alpha]_\infty^p$. Es gilt:

Satz 2.2. *Für alle p mit $0<p<\infty$ ist*
(a) $[C]\subset[\tilde{C}]$ *für alle* $\alpha>0$ *(d. h.* $[C_\alpha]^p\subset[\tilde{C}_\alpha]^p$ *usw.);*
(b) $[C]=[\tilde{C}]\Leftrightarrow\alpha=1$;
(c) $[C]$ *ist vollständig mit* $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]}\Leftrightarrow\alpha=1$.

Beweis. (a) ergibt sich sofort aus der Definition der Mengen $[C]$ und $[\tilde{C}]$.

(b) Sei $\alpha=1$. Wegen Teil (a) müssen wir zeigen $[\tilde{C}]\subset[C]$. Wir zeigen die Behauptung nur im Fall $[\tilde{C}]=[\tilde{C}_1]_\infty^p$ und $[C]=[C_1]_\infty^p$; die anderen Fälle gehen vollkommen analog. Sei $x\in[\tilde{C}_1]_\infty^p$ beliebig. Zu jedem $n\in\mathbf{N}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $\nu(n)\in\mathbf{N}_0$ mit $n\in N^{(\nu(n))}$, und es gilt

$$\sigma_n^1(|x|^p)\leqq\sum_{j=0}^{\nu(n)}\frac{1}{n}\sum\nolimits_j|x_k|^p=\sum_{j=0}^{\nu(n)}\frac{2^j}{n}\left(\frac{1}{2^j}\sum\nolimits_j|x_k|^p\right)\leqq 2\|x\|_{[\tilde{C}]}^{\max\{1,p\}}.$$

Sei umgekehrt $\alpha\neq1$. Wir zeigen: $[C]\neq[\tilde{C}]$.
Sei zunächst $[C]=[C_\alpha]_\infty^p$ und $[\tilde{C}]=[\tilde{C}_\alpha]_\infty^p$. Wir definieren die Folge $x^{(\alpha)}$ durch:

für $\alpha<1$:

$$x_k^{(\alpha)}:=\begin{cases}2^{\nu/p} & \text{für } k=2^\nu+1\\ 0 & \text{für } k\neq2^\nu+1\end{cases}\qquad(\nu=0,1,\ldots)$$

und für $1<\alpha$:

$$x_k^{(\alpha)}:=\begin{cases}2^{\nu\alpha/p} & \text{für } k=2^{\nu+1}-1\\ 0 & \text{für } k\neq2^{\nu+1}-1\end{cases}\qquad(\nu=0,1,\ldots).$$

Sei nun $[C]=[C_\alpha]^p$ und $[\tilde{C}]=[\tilde{C}_\alpha]^p$ sowie $l\in\mathbf{C}$. Wir definieren die Folge $x^{(\alpha)}$ durch:

für $\alpha<1$:

$$x_k^{(\alpha)}:=\begin{cases}2^{\nu\alpha/p}+l & \text{für } k=2^\nu+1\\ l & \text{für } k\neq2^\nu+1\end{cases}\qquad(\nu=0,1,\ldots)$$

und für $1<\alpha$:

$$x_k^{(\alpha)}:=\begin{cases}2^{\nu/p}+l & \text{für } k=2^{\nu+1}-1\\ l & \text{für } k\neq2^{\nu+1}-1\end{cases}\qquad(\nu=0,1,\ldots).$$

($l=0$ ergibt den Fall $[C]=[C_\alpha]_0^p$ und $[\tilde{C}]=[\tilde{C}_\alpha]_0^p$.) Mit diesen Folgen gilt $x^{(\alpha)}\in[\tilde{C}]\setminus[C]$.

(c) Wir müssen zeigen, daß für $\alpha\neq1$ $[C]$ mit $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]}$ nicht vollständig ist.

Dazu definieren wir für alle $m \in \mathbf{N}_0$ die Folge $(x_k^{(\alpha,\beta;m)})_k$ durch:

für $\alpha < \beta < 1$:

$$x_k^{(\alpha,\beta;m)} := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \geqq 2^{m+1} \\ 2^{\nu\beta/p} & \text{für} \quad k = 2^\nu + 1 \\ 0 & \text{für} \quad k \neq 2^\nu + 1 \end{cases} \quad (0 \leqq \nu \leqq m)$$

und für $1 < \beta < \alpha$:

$$x_k^{(\alpha,\beta;m)} := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad k \geqq 2^{m+1} \\ 2^{\nu\beta/p} & \text{für} \quad k = 2^{\nu+1} - 1 \\ 0 & \text{für} \quad k \neq 2^{\nu+1} - 1 \end{cases} \quad (0 \leqq \nu \leqq m).$$

Dann ist $(x^{(\alpha,\beta;m)})_m$ eine Cauchy-Folge in $[C_\alpha]_0^p \subset [C_\alpha]^p$, $[C_\alpha]_\infty^p$ bezüglich $\|\cdot\|_{[C]}$, jedoch konvergiert die Folge nicht in $[C_\alpha]_\infty^p$.

Wegen Satz 2.2 (b) haben wir für den Fall $\alpha = 1$ insbesondere $[\tilde{C}_1]^p = w_p$.

Kapitel 3. Die Dualräume der Räume $[\tilde{C}]$. Wir definieren nun weitere Mengen, die sich in Satz 3.1 als Köthe-Toeplitz-Dualräume von $[\tilde{C}]$ herausstellen werden.

Definition 3.1. Für alle $\alpha > 0$ und für alle p mit $0 < p < \infty$ definieren wir die Mengen $\mathscr{C}_p(\alpha)$ bzw. $\mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha)$ durch $\mathscr{C}_p(\alpha) := \{a \in s \,|\, (\|a^{(\nu)}(\alpha; -p)\|_q)_\nu \in l_1\}$ bzw. durch $\mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha) := \{\tilde{a} = (a_k)_{k \in \mathbf{N}_0} \in s \,|\, a_0 \in \mathbf{C},\ a = (a_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \mathscr{C}_p(\alpha)\}$ und die Normen $\|\cdot\|_{\mathscr{C}_p(\alpha)}$ bzw. $\|\cdot\|_{\mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha)}$ durch $\|a\|_{\mathscr{C}_p(\alpha)} := \|(\|a^{(\nu)}(\alpha; -p)\|_q)_\nu\|_1$ für alle $a \in \mathscr{C}_p(\alpha)$ bzw. durch $\|\tilde{a}\|_{\mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha)} := |a_0| + \|a\|_{\mathscr{C}_p(\alpha)}$ für alle $\tilde{a} \in \mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha)$.

Man sieht sofort, daß die Mengen $\mathscr{C}_p(\alpha)$ und $\mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha)$ mit der üblichen Addition von Folgen und der üblichen Multiplikation von Folgen mit einem Skalar zu einem linearen Raum werden und daß $\|\cdot\|_{\mathscr{C}_p(\alpha)}$ und $\|\cdot\|_{\mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha)}$ eine Norm für die Räume $\mathscr{C}_p(\alpha)$ und $\mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha)$ sind.

Wir bestimmen nun die Dualräume der Räume $[\tilde{C}]$:

Satz 3.1. *Für alle* $\alpha > 0$ *gilt:*

(a) $[\tilde{C}]^\dagger = \mathscr{C}_p(\alpha)$ *falls* $0 < p < \infty$;

(b) $([\tilde{C}_\alpha]_0^p)^* \cong [\tilde{C}]^\dagger$ *falls* $0 < p < \infty$;

(c) $([\tilde{C}_\alpha]^p)^* \cong \mathbf{C} \times [\tilde{C}]^\dagger$ *(bzgl.* $\|\cdot\|_{\mathbf{C} \times [\tilde{C}]^\dagger}$*)* *falls* $0 < p < \infty$;

(d) $[\tilde{C}]^{\dagger\dagger} = [\tilde{C}_\alpha]_\infty^p$ *falls* $1 \leqq p < \infty$.

(Dabei wird $\mathbf{C} \times [\tilde{C}]^\dagger$ *anstelle von* $\mathbf{C} \times \mathscr{C}_p(\alpha)$ *geschrieben.)*

Beweis. (a)

(i) $\mathscr{C}_p(\alpha) \subset [\tilde{C}]^\dagger$. Sei $a \in \mathscr{C}_p(\alpha)$ beliebig, dann gilt für alle $x \in [\tilde{C}]$ mit $\tilde{p}$ und q wie in (1.3) mit zweimaliger Anwendung von (1.4)

$$(3.1)\quad \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_\nu |a_k(\alpha; -p)|\,|x_k(\alpha; p)| \leqq \\ \leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} \|a^{(\nu)}(\alpha; -p)\|_q \|x^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p^{\tilde{p}} \leqq \\ \leqq \|(\|a^{(\nu)}(\alpha; -p)\|_q)_\nu\|_1 \|(\|x^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p^{\tilde{p}})_\nu\|_\infty = \\ = \|a\|_{\mathscr{C}_p(\alpha)} \|x\|_{[C]}^{\tilde{p}} < \infty, \end{cases}$$

d. h. $a\in[\tilde{C}]^\dagger$. Wir bemerken noch, daß aus (3.1) für alle $a\in\mathscr{C}_p(\alpha)$ folgt

$$\|a\|^\dagger \leqq \|a\|_{\mathscr{C}_p(\alpha)} < \infty, \tag{3.2}$$

d. h. $\|a\|^\dagger$ ist auf ganz $\mathscr{C}_p(\alpha)$ definiert ($\|\cdot\|^\dagger$ wie in (1.1)).

(ii) $[\tilde{C}]^\dagger\subset\mathscr{C}_p(\alpha)$. Sei $a\in[\tilde{C}]^\dagger$ beliebig. Dann konvergiert die Reihe $A(x):=$ $:=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x\in[\tilde{C}]$. Für alle $\nu\in\mathbf{N}_0$ definieren wir die Abbildung $f_\nu:=[\tilde{C}]\to\mathbf{C}$ durch $f_\nu(x):=\Sigma_\nu a_k x_k$ für alle $x\in[\tilde{C}]$. Dann ist $f_\nu\in[\tilde{C}]^*$ für alle $\nu\in\mathbf{N}_0$, denn f_ν ist trivialerweise linear, und wie in (3.1) erhalten wir für alle $x\in[\tilde{C}]$

$$|f_\nu(x)| \leqq \|a^{(\nu)}(\alpha;\,-p)\|_q \|x\|^{\tilde{p}}_{[\tilde{C}]}. \tag{3.3}$$

Also gilt für die Abbildung A mit $A(x)=\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{m} f_\nu(x)$

$$A\in[\tilde{C}]^*,$$

d. h. es gibt eine Konstante $M\in\mathbf{R}$, so daß für alle $x\in[\tilde{C}]$

$$|A(x)| \leqq M\|x\|^{\tilde{p}}_{[\tilde{C}]}. \tag{3.4}$$

Sei nun $m\in\mathbf{N}_0$ beliebig. Wir definieren die Folge $x^{(m)}\in[\tilde{C}]$ durch:
für $0<p\leqq 1$

$$x_k^{(m)} := \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad k \geqq 2^{m+1} \\ e_{k(\nu)}(\alpha;\,-p)\operatorname{sgn} a_{k(\nu)} \quad \text{für} \quad k=k(\nu), \text{ wobei } k(\nu) \text{ die kleinste} \\ \qquad \text{Zahl } k\in N^{(\nu)} \text{ ist, für die } |a_{k(\nu)}(\alpha;\,-p)| = \|a^{(\nu)}(\alpha;\,-p)\|_\infty \\ 0 \quad \text{für} \quad k\neq k(\nu) \qquad\qquad (0\leqq\nu\leqq m) \end{cases} \tag{3.5}$$

und für $1<p<\infty$

$$x_k^{(m)} := \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad k\geqq 2^{m+1} \\ (e_k(\alpha;\,-p))^q |a_k|^{q/p} \|a(\alpha;\,-p)\|_q^{-q/p} \operatorname{sgn} a_k \text{ für alle } k\in N^{(\nu)} \text{ für} \\ \qquad \text{diejenigen } \nu\leqq m, \text{ für die } \|a^{(\nu)}(\alpha;\,-p)\|_q\neq 0 \\ 0 \quad \text{sonst} \qquad\qquad (0\leqq\nu\leqq m). \end{cases} \tag{3.6}$$

Dann gilt mit (3.4) für alle p mit $0<p<\infty$ mit (3.5) bzw. (3.6)

$$\sum_{\nu=0}^{m} \|a^{(\nu)}(\alpha;\,-p)\|_q = |A(x^{(m)})| \leqq M \quad (q \text{ wie in } (1.3)). \tag{3.7}$$

Da $m\in\mathbf{N}_0$ beliebig war, erhalten wir daraus $a\in\mathscr{C}_p(\alpha)$ für alle p mit $0<p<\infty$. Damit ist Teil (a) gezeigt.

Wir bemerken noch, daß für alle $m\in\mathbf{N}_0$ und für alle $a\in[\tilde{C}]$ für $0<p\leqq 1$ mit dem $x^{(m)}$ aus (3.5) und für $1<p<\infty$ mit dem $x^{(m)}$ aus (3.6) wegen $x^{(m)}\in S_{[\tilde{C}]}$ folgt

$$\sum_{\nu=0}^{m} \|a^{(\nu)}(\alpha;\,-p)\|_q \leqq \|a\|^\dagger$$

und da $m \in \mathbf{N}_0$ beliebig war $\|a\|_{\mathscr{C}_p(\alpha)} \leqq \|a\|^\dagger$. Im folgenden schreiben wir stets $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]^\dagger}$ für $\|\cdot\|_{\mathscr{C}_p(\alpha)}$ und erhalten mit (3.2)

$$\|a\|_{[\tilde{C}]^\dagger} = \|a\|^\dagger \quad \text{für alle } a \in [\tilde{C}]^\dagger. \tag{3.8}$$

(b) Die Folgen $e^{(k)}$ $(k \in \mathbf{N})$ bilden nach Satz 2.1 (b) eine Basis für $[\tilde{C}_\alpha]_0^p$. Wir haben in (a) Teil (ii) gesehen, daß $[\tilde{C}]^\dagger \subset [\tilde{C}]^*$. Daher folgt die Behaptung mit Satz I und (3.8).

(c) Seien $f \in ([\tilde{C}_\alpha]^p)^*$ und $x \in [\tilde{C}_\alpha]^p$ mit $\|(x-le)^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p \to 0$ $(\nu \to \infty)$. Dann gilt nach der Bemerkung im Beweis von Satz 2.1 (b) für $x = (x_k)_k$

$$x = le + x_0 \quad \text{mit} \quad x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - l) e^{(k)} \in [\tilde{C}_\alpha]_0^p.$$

Wegen Teil (b) gibt es eine Folge $a = (a_k)_{k \in \mathbf{N}} \in [\tilde{C}]^\dagger$ mit

$$f(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x_k - l).$$

Wegen $a \in [\tilde{C}]^\dagger$ und (3.1) konvergieren die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ absolut, und wir erhalten mit $a_0 := f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ wegen $f \in ([\tilde{C}_\alpha]^p)^*$

$$f(x) = l a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k. \tag{3.9}$$

Wegen $|l| \leqq \|x\|_{[\tilde{C}]}^{\tilde{p}}$ ($\tilde{p}$ aus (1.3)) erhalten wir

$$|f(x)| \leqq (|a_0| + \|a\|_{[\tilde{C}]^\dagger}) \|x\|_{[\tilde{C}]}^{\tilde{p}} \text{ d. h.}$$

$$\|f\| \leqq (|a_0| + \|a\|_{[\tilde{C}]^\dagger}) = \|\tilde{a}\|_{c \times [\tilde{C}]^\dagger} \text{ mit } \tilde{a} = (a_0, a_1, \ldots).$$

Für alle $m \in \mathbf{N}$ definieren wir die Folge $y^{(m)} := x^{(m)} + z^{(m)}$, wo $x^{(m)}$ wie in (3.5) bzw. (3.6) und

$$z_k^{(m)} := \begin{cases} 0 & \text{für } k \leqq 2^{m+1} - 1 \\ 0 & \text{für } k = 2^\nu \\ \operatorname{sgn} a_0 & \text{für } k \neq 2^\nu \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \nu \geqq m+1.$$

Dann gilt: $y^{(m)} \in [\tilde{C}_\alpha]^p$, denn $\|(y^{(m)} - \operatorname{sgn} a_0 \cdot e)^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p \to 0$ $(\nu \to \infty)$, $\|y^{(m)}\|_{[\tilde{C}]} \leqq 1$ und

$$|f(y^{(m)})| = \left| |a_0| + \sum_{\nu=0}^{m} \|a^{(\nu)}(\alpha; -p)\|_q + \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \sum_{k=2^\nu+1}^{2^{\nu+1}-1} a_k \operatorname{sgn} a_0 \right| \leqq \|f\|.$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ geht die letzte Summe auf der linken Seite für $m\to\infty$ gegen Null, und es folgt

$$|a_0|+\sum_{\nu=0}^{\infty}\|a^{(\nu)}(\alpha;\,-p)\|_q=|a_0|+\|a\|_{[\tilde{C}]^\dagger}=\|\tilde{a}\|_{C\times[\tilde{C}]^\dagger}\leqq\|f\|,$$

d. h. insgesamt $\|a\|_{C\times[\tilde{C}]^\dagger}=\|f\|$.

Es ist klar, daß umgekehrt die rechte Seite von (3.9) ein $f\in([\tilde{C}_\alpha]^p)^*$ definiert, wenn $a_0\in C$ und $a=(a_k)_{k\in\mathbf{N}}\in[\tilde{C}]^\dagger$ vorgegeben sind. Da die Darstellung von f in (3.9) eindeutig ist, definieren wir die Abbildung

$$T\colon([\tilde{C}_\alpha]^p)^*\to C\times[\tilde{C}]^\dagger$$
$$f\mapsto\tilde{a}$$

mit $\tilde{a}$ aus (3.9). Man sieht leicht, daß T die gewünschten Eigenschaften hat.

(d) Sei $1\leqq p<\infty$. Trivialerweise gilt $[\tilde{C}]\subset[\tilde{C}]^{\dagger\dagger}$. Sei $a\in[\tilde{C}]^{\dagger\dagger}$ beliebig. Dann konvergiert die Reihe $A(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx_k$ für alle $x\in[\tilde{C}]^\dagger$. Für alle $\nu\in\mathbf{N}_0$ definieren wir die Abbildung $f_\nu\colon[\tilde{C}]^\dagger\to\mathbf{C}$ wie in Teil (a). Dann ist $f_\nu\in([\tilde{C}]^\dagger)^*$, denn f_ν ist trivialerweise linear, und für alle $x\in[\tilde{C}]^\dagger$ gilt wie in (3.3) mit Vertauschen der Rollen von a und x

$$|f_\nu(x)|\leqq\|a^{(\nu)}(\alpha;\,p)\|_p\|x\|_{[\tilde{C}]^\dagger}.$$

Da $A(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{\nu=0}^{m}f_\nu(x)$ für alle $x\in[\tilde{C}]^\dagger$ existiert und wegen Teil (b) $[\tilde{C}]^\dagger$ vollständig ist, ist $A\in([\tilde{C}]^\dagger)^*$, d. h. es gibt eine Konstante $M\in\mathbf{R}$, so daß für alle $x\in[\tilde{C}^\dagger]$

$$|A(x)|\leqq M\|x\|_{[\tilde{C}]^\dagger}. \tag{3.10}$$

Sei nun $m\in\mathbf{N}_0$ beliebig. Wir definieren die Folge $x^{(m)}\in[\tilde{C}]^\dagger$ durch:
für $p=1$

$$x_k^{(m)}:=\begin{cases}0 & \text{für } k\geqq 2^{m+1}\\ e_k(\alpha;\,1)\operatorname{sgn}a_k & \text{für } k\in N^{(\nu_0)}, \text{ wobei } \nu_0 \text{ die kleinste}\\ & \quad\text{Zahl } \nu\leqq m \text{ ist, für die } \|a^{(\nu_0)}(\alpha;\,1)\|_1=\max\limits_{\nu\leqq m}\|a^{(\nu)}(\alpha;\,1)\|_1\\ 0 & \text{sonst} \qquad\qquad (0\leqq\nu\leqq m)\end{cases} \tag{3.11}$$

und für $1<p<\infty$

$$x_k^{(m)}:=\begin{cases}0 \quad \text{für } k\geqq 2^{m+1}\\ (e_k(\alpha;\,p))^p|a_k|^{p-1}\|a^{(\nu_0)}(\alpha;\,p)\|_p^{-p/q}\operatorname{sgn}a_k \text{ für } k\in N^{(\nu_0)}, \text{ wobei } \nu_0\\ \quad \text{die kleinste Zahl } \nu\leqq m \text{ ist, für die } \|a^{(\nu_0)}(\alpha;\,p)\|_p=\\ \quad =\max\limits_{\nu\leqq m}\|a^{(\nu)}(\alpha;\,p)\|_p, \text{ sofern } \|a^{(\nu_0)}(\alpha;\,p)\|_p\neq 0,\\ 0 \quad \text{sonst.}\end{cases} \tag{3.12}$$

Mit (3.10) erhalten wir für alle p mit $1\leqq p<\infty$ $\max\limits_{\nu\leqq m}\|a^{(\nu)}(\alpha;p)\|_p\leqq M$, und da $m\in\mathbf{N}_0$ beliebig war $a\in[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$.

Wir bemerken noch, daß aus (3.1) mit Vertauschen der Rollen von a und x für alle $a\in[\tilde{C}]^{\dagger\dagger}=[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ und für alle $x\in S_{[\tilde{C}]^\dagger}$ folgt

$$\|a\|^\dagger \leqq \|a\|_{[\tilde{C}]} < \infty \quad (\|\cdot\|^\dagger \text{ aus (1.1)}, \ X=[\tilde{C}]^\dagger),$$

d. h. $\|a\|^\dagger$ ist auf ganz $[\tilde{C}]^{\dagger\dagger}$ definiert. Andererseits folgt $\|a\|_{[\tilde{C}]}\leqq\|a\|^\dagger$ wie im Anschluß an Teil (a), so daß wir insgesamt

(3.13) $\qquad \|a\|^\dagger = \|a\|_{[\tilde{C}]}$ für alle $a\in[\tilde{C}]^{\dagger\dagger}$ $(1\leqq p<\infty)$ erhalten.

Wir benötigen noch

Lemma 3.1. *Für alle* $\alpha>0$ *und für alle* p *mit* $1\leqq p<\infty$ *gilt:*

(a) $\qquad [\tilde{C}]^{\dagger\|\dagger\|} = [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ *und* $\|x\|^{\|\dagger\|}_{[\tilde{C}]^\dagger} = \|x\|_{[\tilde{C}]}$ *für alle* $x\in[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$,

(b) $\qquad [\tilde{C}]^{\dagger\dagger\|\dagger\|} = [\tilde{C}]^\dagger$ *und* $\|x\|^{\|\dagger\|}_{[\tilde{C}]} = \|x\|_{[\tilde{C}]^\dagger}$ *für alle* $x\in[\tilde{C}]^\dagger$.

Beweis. (a) Sei $1\leqq p<\infty$. Wir schreiben kurz $\|\cdot\|$ für $\|\cdot\|^{\|\dagger\|}_{[\tilde{C}]^\dagger}$.
Aus (3.1) folgt für alle $x\in[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ $\|x\|\leqq\|x\|_{[\tilde{C}]}$, d. h. $[\tilde{C}]^{\dagger\|\dagger\|}\subset[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$.
Wenn wir im Beweis von Satz 3.1 (d) die Rollen von x und a vertauschen, erhalten wir wegen $a^{(m)}\in S_{[\tilde{C}]^\dagger}$ für alle $m\in\mathbb{N}_0$:

$$\max_{\nu\leqq m} \|x^{(\nu)}(\alpha;p)\|_p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(m)} x_k| \leqq \|x\|, \quad \text{d. h.} \quad \|x\|_{[\tilde{C}]} \leqq \|x\|,$$

d. h. insgesamt $\|x\|_{[\tilde{C}]}=\|x\|$ für alle $x\in[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$, und es ist $[\tilde{C}]^{\dagger\|\dagger\|}=[C_\alpha]^p_\infty$.
(b) Analog Teil (a).

Kapitel 4. Toeplitz-Kriterien für (X, Y), wo entweder $X=[\tilde{C}]$ oder $Y=[\tilde{C}]$. Wir sind nun in der Lage, Toeplitz-Kriterien für einige Matrizenklassen im Zusammenhang mit den Räumen $[\tilde{C}]$ herzuleiten. Für alle $\alpha>0$ gelten die folgenden Sätze:

Satz 4.1. $A\in([\tilde{C}], l_\infty)\Leftrightarrow\sup_{n\in\mathbb{N}}\|(a_{nk})_k\|_{[\tilde{C}]^\dagger}<\infty$ *für* $0<p<\infty$.

Satz 4.2. $A\in(l_\infty, [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty)\Leftrightarrow\sup_{N\subset\mathbb{N}}\left\|\left(\sum_{k\in N} a_{nk}\right)_n\right\|_{[\tilde{C}]}<\infty$ *für* $1\leqq p<\infty$.

Satz 4.3. $A\in(l_1, [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty)\Leftrightarrow\sup_{n\in\mathbb{N}}\|(a_{kn})_k\|_{[\tilde{C}]}<\infty$ *für* $1\leqq p<\infty$.

Satz 4.4. $A\in([\tilde{C}], l_1)\Leftrightarrow\sup_{N\subset\mathbb{N}}\left\|\left(\sum_{k\in N} a_{kn}\right)_n\right\|_{[\tilde{C}]^\dagger}<\infty$ *für* $0<p<\infty$.

Satz 4.5.

$$A\in([\tilde{C}_\alpha]^p_0, c)\Leftrightarrow\begin{cases}\text{(i)} & \sup_{n\in\mathbb{N}}\|(a_{nk})_k\|_{[\tilde{C}]^\dagger}<\infty\\ \text{(ii)} & a_{nk}\to a_k \quad (n\to\infty) \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\dots\end{cases}$$

für $0<p<\infty$.

Satz 4.6.

$$A\in([\tilde{C}_\alpha]^p, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \sup_{n\in\mathbf{N}} \|(a_{nk})_k\|_{[\tilde{C}]^\dagger} < \infty. \\ \text{(ii)} & a_{nk} \to a_k \quad (n\to\infty) \quad \textit{für alle} \quad k=1,2,\dots \\ \text{(iii)} & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \to a \quad (n\to\infty) \end{cases}$$

für $0<p<\infty$.

Satz 4.7. $A\in(c, [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty)=(l_\infty, [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty)=(c_0, [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty)$ *für* $1\leqq p<\infty$.

Beweis von Satz 4.1. Die Behauptung folgt wegen Satz 2.1 (a) und (3.8) aus Satz II.

Beweis von Satz 4.2. Satz 4.2 folgt wegen Lemma 3.1 (a) aus Satz III.

Beweis von Satz 4.3. Es ist bekannt, daß $|X, Y|=(X, Y)$, wenn X ein normaler Folgenraum ist (s. [7], S. 373). Nach einem bekannten Satz von ALLEN (s. [7], Satz 3) ist

$$|l_1, [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty|' = |[\tilde{C}]^\dagger, l_\infty|,$$

da $l_1^{|\dagger|}=l_\infty$ und $[\tilde{C}]^\dagger=[\tilde{C}]^{|\dagger|}$, wie man sofort am Beweis von Satz 3.1 (a) sieht. Wegen der Normalität der Folgenräume l_1 und $[\tilde{C}]^\dagger$ erhalten wir damit $(l_1, [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty)'=$ $=([\tilde{C}]^\dagger, l_\infty)$ und daher

$$(l_1, [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty) = ([\tilde{C}]^\dagger, l_\infty)'. \tag{4.1}$$

Wegen Satz 3.1 (b) und (3.13) folgt mit Satz II

$$A'\in([\tilde{C}]^\dagger, l_\infty) \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbf{N}} \|(a_{kn})_k\|_{[\tilde{C}]}<\infty$$

und daher mit (4.1) die Behauptung des Satzes.

Beweis von Satz 4.4. Sei $0<p<\infty$ und $[\tilde{C}]=[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ oder $[\tilde{C}]=[\tilde{C}_\alpha]^p_0$. Mit dem Satz von Allen erhalten wir wie oben

$$([\tilde{C}], l_1) = (l_\infty, [\tilde{C}]^\dagger)'. \tag{4.2}$$

(Hier wird nur $[\tilde{C}]^{\dagger\dagger}\supset[\tilde{C}]$ gebraucht. Da $[\tilde{C}_\alpha]^p$ im allgemeinen kein normaler Folgenraum ist, können wir den Satz von Allen für $[\tilde{C}_\alpha]^p$ nicht anwenden.)

Sei $1\leqq p<\infty$. Wir wenden Satz III mit $Y:=[\tilde{C}]^\dagger$ und $Y^\dagger=[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ mit $\|\cdot\|_\dagger=$ $=\|\cdot\|_{[\tilde{C}]}$ an. Wegen $[\tilde{C}_\alpha]^p_0\subset[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ ist $e^{(k)}\in[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ für alle $k\in\mathbf{N}$. Satz 4.4 folgt für $1\leqq p<\infty$ aus Satz III mit Lemma 3.1 (b).

Sei nun $0<p<1$. Wenn wir den Beweis von Satz III (s. [3], S. 9—11) mit $Y=[\tilde{C}]^\dagger$ und $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]^\dagger}$ anstelle von $\|\cdot\|_\dagger^{\|\dagger\|}$ durchführen, so erhalten wir die Behauptung des Satzes für $[\tilde{C}]=[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ und $[\tilde{C}]=[\tilde{C}_\alpha]^p_0$ auch für $0<p<1$. Wegen

$([\tilde{C}_\alpha]_0^p, l_1) = ([\tilde{C}_\alpha]_\infty^p, l_1)$ und $[\tilde{C}_\alpha]_0^p \subset [\tilde{C}_\alpha]^p \subset [\tilde{C}_\alpha]_\infty^p$ gilt

$$([\tilde{C}_\alpha]_0^p, l_1) \subset ([\tilde{C}_\alpha]^p, l_1) \subset ([\tilde{C}_\alpha]_0^p, l_1),$$

d. h. Satz 4.4 gilt auch für $[\tilde{C}_\alpha]^p$.

Beweis von Satz 4.5. Satz 4.5 folgt mit den Sätzen 2.1 (a), (b) und 3.1 (b) aus Satz 1.1.

Aus Satz 4.5 folgt sofort

Korollar 4.1.

$$A \in ([\tilde{C}_\alpha]_0^p, c_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \sup_{n\in\mathbf{N}} \|(a_{nk})_k\|_{[\tilde{C}]^\dagger} < \infty \\ \text{(ii)} & \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad \textit{für alle } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

für alle $\alpha > 0$ *und für alle* p *mit* $0 < p < \infty$.

Beweis von Satz 4.6. Es ist klar, daß aus $A \in ([\tilde{C}_\alpha]^p, c)$ die Bedingungen (i), (ii) und (iii) folgen.

Umgekehrt seien (i), (ii) und (iii) erfüllt. Wir setzen

$$M := \sup_{n\in\mathbf{N}} \|(a_{nk})_k\|_{[\tilde{C}]^\dagger}.$$

Es ist klar, daß

$$\|(a_k)_k\|_{[\tilde{C}]^\dagger} \leqq M. \tag{4.3}$$

Wir schreiben für alle $x \in [\tilde{C}_\alpha]^p$

$$A_n(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k + \sum_{k=1}^\infty (a_{nk} - a_k)(x_k - l) + \sum_{k=1}^\infty (a_{nk} - a_k) l$$

$$\left(\text{wo } l \in C \text{ mit } \lim_{\nu\to\infty} \|(x - le)^{(\nu)}(\alpha; p)\|_p = 0\right).$$

Wegen (4.3) existieren $\sum_{k=1}^\infty a_k x_k$ für alle $x \in [\tilde{C}_\alpha]^p$, $\sum_{k=1}^\infty a_k$ (da $e \in [\tilde{C}_\alpha]^p$) und wegen (iii) $\sum_{k=1}^\infty a_{nk}$ für alle $n \in \mathbf{N}$, und es ist $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^\infty a_{nk}$. Sei $\tilde{A} := (\tilde{a}_{nk})_{n,k}$ mit $\tilde{a}_{nk} := a_{nk} - a_k$ für alle $n, k = 1, 2, \dots$. Dann ist $\tilde{A} \in ([\tilde{C}_\alpha]_0^p, c_0)$ nach Korollar 4.1. Wegen $x - le \in [\tilde{C}_\alpha]_0^p$ gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n(x - le) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^\infty (a_{nk} - a_k)(x_k - l) = 0.$$

Daher ist für alle $x \in [\tilde{C}_\alpha]^p$: $\lim_{n\to\infty} A_n(x) = \sum_{k=1}^\infty a_k x_k + al - l \sum_{k=1}^\infty a_k$, d. h. $(A_n(x))_n \in c$.

Aus Satz 4.6 folgt sofort:

Korollar 4.2.

$$A \in ([\tilde{C}_\alpha]^p, c_0) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \sup\limits_{n \in \mathrm{N}} \|(a_{nk})_k\|_{[\tilde{C}]^\dagger} < \infty \\ \text{(ii)} & \lim\limits_{n \to \infty} a_{nk} = 0 \quad \textit{für alle} \quad k = 1, 2, \ldots \\ \text{(iii)} & \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 0 \end{cases}$$

für alle $\alpha > 0$ *und für alle* p *mit* $0 < p < \infty$.

Beweis von Satz 4.7. Da l_∞ und c_0 normale Folgenräume sind, folgt Satz 4.7 mit Satz 3.1 (d) und einem bekannten Ergebnis von ALLEN (s. [7], Korollar 1 zu Satz 3, S. 375).

Zum Abschlluß dieses Kapitels bestimmen wir noch die Toeplitz-Kriterien für die Klasse $([\tilde{C}_\alpha]^p_\infty, c)$. Der Beweis des entsprechenden Satzes verläuft ähnlich wie der des Satzes 6 in [2], S. 169. Im folgenden schreiben wir $\|\cdot\|_\dagger$ für $\|\cdot\|_{[\tilde{C}]^\dagger}$. Zunächst benötigen wir

Lemma 4.1. *Für alle* $\alpha > 0$ *und für alle* p *mit* $0 < p < \infty$ *folgt aus* $\|b_{nk}\|_\dagger < \infty$ *für alle* $n \in \mathrm{N}$ *und aus* $\lim\limits_{n \to \infty} \|(b_{nk})_k\|_\dagger = 0$ *die gleichmäßige Konvergenz von* $\|(b_{nk})_k\|_\dagger$ *in* n.

Beweis. Wegen $\|(b_{nk})_k\|_\dagger \to 0$ $(n \to \infty)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathrm{N}$, so daß für alle $n > n_0$ gilt $\|(b_{nk})_k\|_\dagger < \varepsilon$. Wegen $\|(b_{nk})_k\|_\dagger < \infty$ gibt es für alle n mit $1 \leqq n \leqq n_0$ ein $m := m(n; \varepsilon)$, so daß $R_q^-(2^{m+1}, (b_{nk})_k) < \varepsilon$, wobei für alle $x \in [\tilde{C}]^\dagger$ und für alle $\mu \in \mathrm{N}_0$

$$R_q^-(\mu, x) := \sum_{\nu = \mu}^{\infty} \|x^{(\nu)}(\alpha; -p)\|_q \quad (q \text{ wie in } (1.3)).$$

Wähle $\nu_0 := 2^{m_0+1}$ mit $m_0 := \max\{m(n; \varepsilon) | 1 \leqq n \leqq n_0\}$. Dann gilt für alle $\mu \geqq \nu_0$

$$R_q^-(\mu, (b_{nk})_k) < \varepsilon \quad \text{für alle } n \in \mathrm{N}.$$

Satz 4.8. *Für alle* $\alpha > 0$ *und für alle* p *mit* $0 < p < \infty$ *gilt*

$$A \in ([\tilde{C}_\alpha]^p_\infty, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & \|(a_{nk})_k\|_\dagger \textit{ konvergiert gleichmäßig in } n \in \mathrm{N} \\ \text{(ii)} & \lim\limits_{n \to \infty} a_{nk} = a_k \quad \textit{für alle} \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Beweis. Die Bedingungen (i) und (ii) seien erfüllt. Aus (i) folgt, daß die Reihen $A_n(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ für alle $x \in [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ gleichmäßig in n und absolut konvergieren. Also existiert $\lim\limits_{n \to \infty} A_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ für alle $x \in [\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ mit (ii).

Umgekehrt gelte $A \in ([\tilde{C}_\alpha]^p_\infty, c)$.

Dann folgt (ii) sofort. Wegen $c \subset l_\infty$ gilt weiter $([\tilde{C}_\alpha]^p_\infty, c) \subset ([\tilde{C}_\alpha]^p_\infty, l_\infty)$ und daher mit Satz 4.1

(4.4)
$$M := \sup_{n\in\mathbf{N}} \|(a_{nk})_k\|_\dagger < \infty.$$

Für alle $n, k\in\mathbf{N}$ setzen wir $b_{nk} := a_{nk} - a_k$ mit $a_k := \lim_{n\to\infty} a_{nk}$. Aus (4.4) und (ii) folgt leicht, daß $\|(a_k)_k\|_\dagger \leqq M$. Also gilt

(4.5)
$$\big(B_n(x)\big)_n := \Big(\sum_{k=1}^\infty b_{nk} x_k\Big)_n \in c \quad \text{für alle} \quad x\in[\tilde{C}_\alpha]_\infty^p.$$

Wir werden zeigen, daß daraus folgt

(4.6)
$$\lim_{n\to\infty} \|(b_{nk})_k\|_\dagger = 0.$$

Wenn wir (4.6) gezeigt haben, folgt mit Lemma 4.1 die gleichmäßige Konvergenz von $\|(b_{nk})_k\|_\dagger$ in n und daher nach der Definition von $B=(b_{nk})_{n,k}$ auch die gleichmäßige Konvergenz von $\|(a_{nk})_k\|_\dagger$ in n. Wir zeigen nun (4.6): Annahme, es wäre $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|(b_{nk})_k\|_\dagger = c > 0$. Sei o.B.d.A. $\lim_{m\to\infty} \|(b_{mk})_k\|_\dagger = c$. Da $b_{mk}\to 0$ $(m\to\infty)$ für alle $k\in\mathbf{N}$, können wir ein $m(1)\in\mathbf{N}$ so wählen, daß

$$\Big\|\big(b^{(0)}_{m(1),k}(\alpha; -p)\big)_k\Big\|_q < \frac{c}{10} \quad \text{und} \quad \big|\|(b_{m(1),k})_k\|_\dagger - c\big| < \frac{c}{10}.$$

Wegen $\|(b_{m,k})_k\|_\dagger < \infty$ für alle $m\in\mathbf{N}$ gibt es ein $\nu(2)\geqq 1$ mit

$$R_q^-\big(\nu(2)+1, (b_{m(1),k})_k\big) < \frac{c}{10}.$$

Damit gilt $\Big|\sum_{\nu=1}^{\nu(2)} \big\|\big(b^{(\nu)}_{m(1),k}(\alpha; -p)\big)_k\big\|_q - c\Big| < 3c/10$. Zur Abkürzung schreiben wir für alle m, l_1, l_2

$$B(m, l_1, l_2) := \sum_{v=l_1}^{l_2} \Big\|\big(b^{(\nu)}_{mk}(\alpha; -p)\big)_k\Big\|_q.$$

Wir wählen nun $m(2) > m(1)$, so daß

$$\big|B\big(m(2), 1, \infty\big) - c\big| < \frac{c}{10} \quad \text{und} \quad B\big(m(2), 1, \nu(2)\big) < \frac{c}{10}$$

und weiter $\nu(3) > \nu(2)$, so daß $B\big(m(2), \nu(3)+1, \infty\big) < c/10$. Damit folgt

$$\big|B\big(m(2), \nu(2)+1, \nu(3)\big) - c\big| < \frac{3c}{10}.$$

Wenn wir so fortfahren, können wir rekursiv zwei Folgen natürlicher Zahlen $\big(m(r)\big)_r$ und $\big(\nu(r)\big)_r$ definieren mit $m(1) < m(2) < \ldots$ und $0 = \nu(1) < \nu(2) < \ldots$, für die für alle $r = 1, 2, \ldots$ gilt: $B\big(m(r), 1, \nu(r)\big) < c/10$; $B\big(m(r), \nu(r+1)+1, \infty\big) < c/10$;

$|B(m(r), v(r)+1, v(r+1))-c|<3c/10$. Wir definieren nun eine Folge $x\in[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ mit $\|x\|_{[\tilde{C}]}\leqq 1$ durch:

für $0<p\leqq 1$

$$x_k := \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad k=1 \\ (-1)^r e_{k(v)}(\alpha; -p)\cdot \operatorname{sgn} b_{m(r),k(v)} \quad \text{für} \quad k=k(v), \text{ wobei } k(v) \text{ die} \\ \quad \text{kleinste Zahl } k\in N^{(v)} \text{ ist, für die } |b_{m(r),k(v)}(\alpha; -p)| = \left\|\left(b^{(v)}_{m(r),k}(\alpha; -p)\right)_k\right\|_\infty \\ 0 \quad \text{für} \quad k\neq k(v); \\ \qquad\qquad v(r)<v\leqq v(r+1); \quad r=1,2\ldots \end{cases}$$

und für $1<p<\infty$

$$x_k := \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad k=1 \\ (-1)^r \left(e_k(\alpha; -p)\right)^q |b_{m(r),k}|^{q/p} \left\|\left(b^{(v)}_{m(r),k}(\alpha; -p)\right)_k\right\|_q^{-q/p} \operatorname{sgn} b_{m(r),k} \text{ für alle} \\ \quad k\in N^{(v)} \text{ für diejenigen } v, \text{ für die } \left\|\left(b^{(v)}_{m(r),k}(\alpha; -p)\right)_k\right\|_q \neq 0, \\ 0 \quad \text{sonst}; \\ \qquad\qquad v(r)<v\leqq v(r+1); \quad r=1,2,\ldots \end{cases}$$

Für diese Folgen gilt

$$\left|\sum_{k=1}^\infty b_{m(r),k}x_k-(-1)^r c\right| < \frac{c}{2} \quad (r=1,2,\ldots),$$

so daß $(B_n(x))_n=\left(\sum_{k=1}^\infty b_{nk}x_k\right)_n$ keine Cauchy-Folge ist und daher nicht konvergiert. Gilt (4.5) nicht, dann gibt es also ein $x\in[\tilde{C}_\alpha]^p_\infty$ mit $(B_n(x))_n\notin c$ im Widerspruch zu (4.5). Also muß (4.6) gelten, und der Satz ist bewiesen.

Für die Anregung und freundliche Unterstützung dieser Arbeit danke ich meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. K. Endl.

Literatur

[1] I. J. Maddox, On Kuttner's Theorem, *J. London Math. Soc.* (2), **43** (1968), 285—290.

[2] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press (New York—London, 1970).

[3] E. Malkowsky, Toeplitz-Kriterien für Matrizenklassen bei Räumen absolut limitierbarer Folgen, *Mitt. Math. Sem. Giessen*, **158** (1983).

[4] D. Borwein, On Strong and Absolute Summability, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **4** (1960), 123—139.

[5] I. J. Maddox, Spaces of Strongly Summable Sequences, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **18** (1967), 345—355.

[6] I. J. Maddox, Some Properties of Paranormed Sequence Spaces, *London J. Math. Soc. (2)*, **1** (1969), 316—322.

[7] H. S. Allen, Transformations of Sequence Spaces, *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), 374—376.

[8] A. Wilansky, *Functional Analysis*, Blaisdell Publishing Company (1964).

MATHEMATISCHES INSTITUT
JUSTUS—LIEBIG—UNIVERSITÄT
6300 GIESSEN
BRD