Acta Sci. Math., 49 (1985), 169—178

Об одной алгебре функций

П. Л. УЛЬЯНОВ

Посвящается 60-летию со дня рождения К. Тандори — выдающегося специалиста по теории ортогональных рядов

Через Ω будем обозначать множество четных функций $\omega(t)$, которые являются модулями непрерывности при $t\in[0, \infty)$. Хорошо известно, что для любых чисел $\lambda\geqq 0$ и $t\geqq 0$ справедливо неравенство

$$\omega(\lambda t) \leqq \bar{\lambda}\omega(t), \quad \text{где} \quad \bar{\lambda} = \begin{cases} \lambda, & \text{если} \quad \lambda \geqq 0 \quad \text{и целое} \\ 1+[\lambda] & \text{при остальных} \quad \lambda > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a.

Если $\omega\in\Omega$ и существует постоянная B, для которой интеграл

$$\int_0^\delta (\omega(t)/t)\, dt \leqq B\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta\in[0, 1], \tag{2}$$

то будем говорить, что функция $\omega(\delta)$ *удовлетворяет условию Бари* $(\omega\in B)$ на отрезке $[0, 1]$ (см. [2]). Если выполнено неравенство (2) при всех $\delta\geqq 0$, то будем говорить об условии Бари на полупрямой $[0, \infty)$.

Через $L^\infty = L^\infty(0, 1)$ обозначается пространство существенно ограниченных измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \underset{t\in[0,1]}{\text{сущ. верх. гр.}} |f(t)|.$$

Пусть функция $f\in L(0, 1)$ и $a_m(f)=(f, \chi_m)$ — коэффициенты Фурье от f по системе Хаара $\{\chi_m\}_{m=1}^\infty$. Положим

$$A_\omega(f) = \sum_{m=2}^\infty \omega(a_m(f)), \quad A_\omega = \{f\colon A_\omega(f) < \infty\}, \quad A_\omega^{(\infty)} = A_\omega \cap L^\infty,$$

$$\chi_m(t) = \chi_n^{(k)}(t) \quad \text{при} \quad m = 2^n+k, \quad 1 \leqq k \leqq 2^n \quad \text{и} \quad n = 0, 1, \ldots.$$

Поступило 12 декабря, 1984.

Через $\mathrm{Lip}_D\,1$ будем обозначать множество всех функций φ, для которых

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|\leqq D|t_1-t_2| \quad \text{при всех} \quad t_1 \quad \text{и} \quad t_2 \quad \text{из} \quad (-\infty,\infty),$$

где $D=\mathrm{const}$.

Линейное множество функций называют *алгеброй*, если поточечные произведения любых двух функций из этого множества также принадлежит ему.

В этой статье мы дадим доказательство двух теорем, сформулированных нами в работе [4] и относящихся к исследованию коэффициентов Фурье—Хаара от суперпозиции функций (по поводу исторических сведений см. также [3]).

Ниже нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 (Н. К. Бари [2], стр. 295). *Пусть* $\omega(\delta)\in\Omega$ *и* $\omega(\delta)\not\equiv 0$. *Тогда* $\omega(\delta)$ *удовлетворяет условию Бари на отрезке* $[0,1]$ *в том и только том случае, когда найдется постоянная* $A>1$ *такая, что*

$$\varliminf_{\delta\to+0}\omega(A\delta)/\omega(\delta)=\gamma>1. \tag{3}$$

Замечание 1. Если $\omega\in\Omega$ удовлетворяет условию (3), то для любого положительного числа

$$\alpha<\ln\gamma/\ln A=\alpha_0 \tag{4}$$

справедливо соотношение

$$\omega(\delta)=O(\delta^\alpha) \quad \text{при} \quad 0\leqq\delta\leqq 1. \tag{5}$$

Через $\ln a$ и $\lg a$ обозначаются логарифмы числа a по основанию соответственно e и 2.

В самом деле, возьмем любое $\gamma_0\in(1,\gamma)$ и найдем такое $\delta_0\in(0,1)$, что (см. (3))

$$\omega(A\delta)/\omega(\delta)\geqq\gamma_0 \quad \text{при всех} \quad \delta\in(0,\delta_0]. \tag{6}$$

Но тогда, если целое $n\geqq 0$ таково, что $A^n\delta\leqq\delta_0$, то применяя (6) n-раз, получим

$$\omega(\delta)\leqq\omega(A^1\delta)/\gamma_0^1\leqq\omega(A^2\delta)/\gamma_0^2\leqq\ldots\leqq\omega(A^n\delta)/\gamma_0^n \tag{7}$$

при $A^n\delta\leqq\delta_0$. Выберем n таким, что

$$A^n\delta\leqq\delta_0<A^{n+1}\delta, \tag{8}$$

т. е.

$$\ln(\delta_0/\delta)/\ln A-1<n\leqq\ln(\delta_0/\delta)/\ln A. \tag{9}$$

Так как $\gamma_0>1$, то из (7)—(9) получаем, что

$$\omega(\delta)\leqq\omega(\delta_0)/\gamma_0^n=(\gamma_0\omega(\delta_0))/\gamma_0^{n+1}\leqq(\gamma_0\omega(\delta_0))/\gamma_0^{\ln(\delta_0/\delta)/\ln A}=$$

$$=(\gamma_0\omega(\delta_0))/(\delta_0/\delta)^{\ln\gamma_0/\ln A}=C(\gamma_0,\delta_0,A)\delta^{\ln\gamma_0/\ln A}$$

при всех $\delta\in[0, \delta_0]$, где $C(\gamma_0, \delta_0, A)$ — постоянная, не зависящая от $\delta\in[0, \delta_0]$. Так как γ_0 мы можем брать сколь угодно близким к γ, а $\omega(\delta)$ является модулем непрерывности, то из неравенства (10) вытекает соотношение (5) при условии (4).

Отметим, что из условия (3) не обязано вытекать соотношение (5) при $\alpha=\alpha_0$. Для этого достаточно рассмотреть, например, функцию $\omega_0(\delta)=\delta^\beta \ln(2/\delta)$ при $\delta\in[0, 1]$ и $\omega_0(\delta)=\ln 2$ при $\delta>1$, где $\beta\in(0, 1]$ любое число. Для этой функции выполнено условие (3) с любым $A>1$ и $\gamma=\gamma(A)=A^\beta$. Стало быть в этом случае (см. (4)) число $\alpha_0=\ln\gamma/\ln A=\beta$ и, очевидно, что соотношение (5) для функции $\omega_0(\delta)$ не может быть выполнено при $\alpha=\alpha_0$.

Лемма 2. *Если $\omega(\delta)\in\Omega$, а $\varphi\in\mathrm{Lip}_D\,1$, то*

$$A_\omega(\varphi(f)) \leqq A_\omega(Df)+(2/\ln 2)\sum_{m=3}^{\infty}\int_{\|\chi_m\|}^{1}\left(\omega(Da_m(f)t)/t\right)dt \tag{11}$$

для любой функции $f\in L(0, 1)$, где $\|\chi_m\|_1=\int_0^1|\chi_m(t)|\,dt$.

Это утверждение было сформулировано нами в статье [4] (см. там Теорему 1).

Лемма 3. *Если функция $f(t)=\chi_n^{(1)}(t)$, то для почти всех $t\in[0, 1]$ имеем равенство*

$$|f(t)|=\left(1/\sqrt{2^n}\right)\left\{1+\chi_0^{(1)}(t)+\sqrt{2}\,\chi_1^{(1)}(t)+\ldots+\sqrt{2^{n-1}}\,\chi_{n-1}^{(1)}(t)\right\}. \tag{12}$$

Равенство (12) получается простым подсчетом коэффициентов Фурье—Хаара функции $|f(t)|$.

Лемма 4. *Пусть a_n $(n\geqq 0)$ таковы, что $a_n\geqq a_{n+1}$ при $n\geqq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. Тогда найдутся такие b_n, что*

$$\lim_{n\to\infty}b_n=0,\quad b_n\geqq a_n \text{ и } \Delta^2 b_n\geqq 0 \quad\text{при}\quad n\geqq 0,$$

где $\Delta^2 b_n=\Delta b_n-\Delta b_{n+1}$, $\Delta b_n=b_n-b_{n+1}$.

Эта лемма известна (см. [1], стр. 653—654).

Лемма 5. *Пусть функция $y=f(t)$ определена на отрезке $[0, 1]$, не убывает и $f(+0)=f(0)=0$. Тогда существует функция $y=\psi(t)$, которая выпукла вверх на отрезке $[0, 1]$, $\psi(0)=\psi(+0)=0$ и $f(t)\leqq\psi(t)$ при $t\in[0, 1]$.*

Доказательство почти очевидно. Именно, рассмотрим множество G точек плоскости (t, y), ограниченное отрезком $0\leqq t\leqq 1$ оси t, кривой $y=f(t)$ и отрезком $[(1, 0), (1, f(1))]$, т. е. возьмем график функции $y=f(t)$. Пусть

D — наименьшая выпуклая оболочка для G. «Верхняя» граница D при $0 \leqq t \leqq 1$ и будет искомой функцией $y = \psi(t)$, т. е.

$$\psi(t) = \sup \{y\colon (t, y) \in D\} \quad \text{при} \quad 0 \leqq t \leqq 1.$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $\omega(\delta) \in \Omega$. Тогда, чтобы множество $A_\omega^{(\infty)}$ было алгеброй, для которой*

$$A_\omega(f^2) \leqq C_\omega A_\omega(f) \quad \text{при всех} \quad f \in A_\omega^{(\infty)} \text{ с } \|f\|_\infty = 1, \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\omega(\delta)$ удовлетворяла условию Бари на отрезке [0, 1].

Через C_ω и т. п. мы обозначаем постоянные, зависящие лишь от указанных параметров.

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено неравенство (2), а функция $f \in A_\omega^{(\infty)}$. Отметим, что

$$|a_m(f)| \leqq \|f\|_\infty \|\chi_m\|_1 \leqq (\sqrt{2}/\sqrt{m})\|f\|_\infty \quad \text{при} \quad m \geqq 3. \tag{14}$$

Положим

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} t^2 & \text{при} \quad |t| \leqq \|f\|_\infty, \\ \|f\|_\infty^2 & \text{при} \quad |t| > \|f\|_\infty. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_1 \in \mathrm{Lip}_D 1$ с постоянной $D = D(\varphi_1) = D_1 = 2\|f\|_\infty$. Поэтому найдется натуральное число m_0, такое, что (см. (14))

$$D|a_m(f)| \leqq 2 \quad \text{при всех} \quad m > m_0. \tag{15}$$

Но тогда при $m > m_0$ имеем (см. (1), (2) и (15))

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\|\chi_m\|_1}^{1} (\omega(Da_m(f)t)/t)\,dt \leqq 2 \int\limits_{\|\chi_m\|_1}^{1} (\omega((D/2)\,a_m(f)t)/t)\,dt \leqq \\ &\leqq 2 \int\limits_{0}^{(D/2)|a_m(f)|} (\omega(u)/u)\,du \leqq 2B\omega((D/2)a_m(f)) = 2B\omega(\|f\|_\infty a_m(f)). \end{aligned} \tag{16}$$

Стало быть, применяя Лемму 2 к функциям f и φ_1, получаем

$$\begin{aligned} A_\omega(f^2) = A_\omega(\varphi_1(f)) \leqq (2 + 4B/\ln 2) A_\omega(\|f\|_\infty f) + \\ + (2/\ln 2) \sum_{m=3}^{m_0} \int\limits_{\|\chi_m\|_1}^{1} (\omega(Da_m(f)t)/t)\,dt. \end{aligned} \tag{17}$$

Так как $f \in A_\omega^{(\infty)}$, то $A_\omega(\|f\|_\infty f) \leqq (1 + \|f\|_\infty) A_\omega(f) < \infty$. Кроме того, все интегралы, стоящие в правой части неравенства (17), конечны, ибо $\|\chi_m\|_1 > 0$. Из сказанного вытекает, что правая часть неравенства (17) является конечной величиной, если $f\in A_\omega^{(\infty)}$. Но тогда и $f^2\in A_\omega^{(\infty)}$ (см. (17)). Итак, мы доказали, что если $f\in A_\omega^{(\infty)}$, то и $f^2\in A_\omega^{(\infty)}$.

Теперь совсем легко убедиться, что множество $A_\omega^{(\infty)}$ является алгеброй. В самом деле, пусть $f\in A_\omega^{(\infty)}$ и $g\in A_\omega^{(\infty)}$. Тогда $|f(t)g(t)|\leqq f^2(t)+g^2(t)$ и потому $A_\omega(fg)\leqq A_\omega(f^2)+A_\omega(g^2)$ т. е. $fg\in A_\omega^{(\infty)}$.

Наконец, отметим, что если $f\in A_\omega^{(\infty)}$ и $\|f\|_\infty\leqq 1$, то в неравенстве (15) число m_0 можно взять равным 2 (см. еще (14)). Это влечет, что неравенства (16) и (17) верны при $m_0=2$, т. е.

$$(18)\qquad A_\omega(f^2)\leqq(2+4B/\ln 2)A_\omega(\|f\|_\infty f)\quad\text{при}\quad \|f\|_\infty\leqq 1.$$

Тем самым неравенство (13) установлено для $C_\omega=(2+4B/\ln 2)\equiv C(B)$. Достаточность условия (2) доказана.

Необходимость. Пусть неравенство (13) выполнено для всех $f\in A_\omega^{(\infty)}$ и $\|f\|_\infty=1$. Рассмотрим функцию $f_0(t)=2^{-n/2}\chi_n^{(1)}(t)$ при целом $n\geqq 2$, для которой, очевидно, выполнены свойства

$$f_0\in A_\omega^{(\infty)},\quad \|f_0\|_\infty=1,\quad f_0^2(t)=|f_0(t)|=|\chi_n^{(1)}(t)|/2^{n/2}.$$

В силу Леммы 3 имеем, что

$$f_0^2(t)=(1/2^n)\left\{1+\chi_0^{(1)}(t)+\sqrt{2}\,\chi_1^{(1)}(t)+\ldots+2^{(n-1)/2}\chi_{n-1}^{(1)}(t)\right\}$$

и потому должно выполняться неравенство (см. (13))

$$(19)\qquad A_\omega(f_0^2)=A_\omega(|f_0|)=\omega(2^{-n})+\sum_{i=0}^{n-1}\omega(2^{-n+i/2})\leqq C_\omega\omega(2^{-n/2})\quad\text{при}\quad n\geqq 2.$$

Если в (19) положить $n=2m$, а в сумме из (19) взять лишь слагаемые с четными $i=0, 2, \ldots, 2m-2$, то получим неравенство

$$(20)\qquad \sum_{j=m+1}^{2m}\omega(2^{-j})\leqq C_\omega\omega(2^{-m})\quad\text{при всех}\quad m\geqq 1.$$

Предположим, что $\omega(\delta)$ не удовлетворяет условию Бари на отрезке $[0, 1]$. (В этом случае $\omega(\delta)\not\equiv 0$.) Тогда по Лемме 1

$$(21)\qquad \varliminf_{\delta\to+0}\omega(A\delta)/\omega(\delta)=1\qquad\text{при любом}\qquad A>1.$$

Возьмем целое число $p>8C_\omega$ и положим $A=2^p$. В силу (21) существуют такие числа $\delta_i>0$ и натуральные n_i, для которых $\delta_i\downarrow 0$, $n_i>2p$, $1/2^{n_i}\leqq\delta_i<2/2^{n_i}$ и $\omega(A\delta_i)/\omega(\delta_i)\leqq 2$, при всех $i\geqq 1$. Но тогда тем более (см. (1))

$$2\geqq\omega(2^p/2^{n_i})/\omega(2/2^{n_i})\geqq\omega(2^{p-n_i})/2\omega(2^{-n_i})$$

и потому

$$\omega(2^{-n_i}) \geqq \omega(2^{p-n_i})/4 \quad \text{при всех} \quad i \geqq 1. \tag{22}$$

Положив в (20) число $m=n_i-p$, получим (см. еще (22))

$$C_\omega \omega(2^{-m}) = C_\omega \omega(2^{p-n_i}) \geqq \sum_{j=n_i-p+1}^{2(n_i-p)} \omega(2^{-j}) \geqq$$

$$\geqq \sum_{j=n_i-p+1}^{n_i} \omega(2^{-j}) \geqq p\omega(2^{-n_i}) \geqq (p/4)\omega(2^{p-n_i}) = (p/4)\omega(2^{-m}),$$

т. е.

$$C_\omega \omega(2^{-m}) \geqq (p/4)\omega(2^{-m}). \tag{23}$$

Так как $\omega(\delta)\not\equiv 0$, то из (23) вытекает, что $4C_\omega \geqq p$. Но это противоречит неравенству $p>8C_\omega$. Необходимость доказана. Тем самым Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 2. Из доказательства Теоремы 1 видно (см. (18)), что если функция $\omega(\delta)$ удовлетворяет условию Бари на отрезке $[0, 1]$, то выполнено неравенство

$$A_\omega(f^2) \leqq C_\omega A_\omega(\|f\|_\infty f) \tag{24}$$

при всех f с $\|f\|_\infty \leqq 1$ и $C_\omega = C(B)$.

В общем случае неравенство (24) может и не выполняться, если мы будем брать *любые* функции $f \in A_\omega^{(\infty)}$, каким бы C_ω ни выбирать.

В качестве примера достаточно взять $\omega_0(\delta)=\delta$ при $0\leqq\delta\leqq 1$ и $\omega_0(\delta)=1$ при $\delta>1$. Ясно, что это $\omega_0(\delta)$ удовлетворяет условию Бари на отрезке $[0, 1]$ с $B=1$. Но, однако, не существует постоянной C, для которой бы выполнялось неравенство

$$A_{\omega_0}(f^2) \leqq CA_{\omega_0}(\|f\|_\infty f) \quad \text{при всех} \quad f \in A_{\omega_0}^{(\infty)}. \tag{25}$$

В самом деле, если бы неравенство (25) было выполнено, то тогда для любой функции $f(t)=Mf_0(t)$ с постоянной $M>0$ мы бы имели

$$f^2(t) = M^2 f_0^2(t) = M^2|f_0(t)| = (M^2/2^n)\{1+\ldots+2^{(n-1)/2}\chi_{n-1}^{(1)}(t)\}$$

и потому (см. (25), (19) и (20))

$$\sum_{j=m+1}^{2m} \omega_0(M^2/2^j) \leqq C\omega_0(M^2/2^m) \quad \text{при} \quad m \geqq 1. \tag{26}$$

При $M\to\infty$ левая часть неравенства (26) стремится к m, а правая часть стремится к C. Но число m может быть любым и потому неравенство (26) (а стало быть и (25)) противоречиво.

Справедлива также

Теорема 1'. *Если $\omega(\delta)\in\Omega$, то множество $A_\omega^{(\infty)}$ является алгеброй с*

$$A_\omega(f^2)\leqq C_\omega A_\omega(\|f\|_\infty f) \quad \textit{при всех} \quad f\in A_\omega^{(\infty)} \tag{27}$$

тогда и только тогда, когда $\omega\in B$ на полупрямой $[0,\infty)$.

Доказательство. Если $\omega\in B$ на $[0,\infty)$, то (см. доказательство Теоремы 1) неравенство (16) выполненно при всех $m>m_0=2$ и потому (см. (17)) выполнено (27) с $C_\omega=C(B)$. Обратно, пусть (27) выполнено.

Положим $f(t)=(\sqrt{\delta}/2^{n/4})\chi_n^{(1)}(t)$, где $\delta>0$ произвольное число. Тогда $\|f\|_\infty=\sqrt{\delta}2^{n/4}$, а $f^2(t)=\delta|\chi_n^{(1)}(t)|$. Стало быть, по Лемме 3 из (27) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\omega(\delta/2^{j/2})\leqq C_\omega\omega(\delta) \quad \text{при всех} \quad \delta>0,\quad n=1,2,\dots.$$

Поэтому (см. еще (1))

$$C_\omega\omega(\delta)\geqq\sum_{j=1}^{n}\omega(\delta/2^j)\geqq\sum_{j=1}^{n}(1/\ln 2)\int_{\delta/2^{j+1}}^{\delta/2^j}(\omega(t)/t)\,dt=$$

$$=(1/\ln 2)\int_{\delta/2^{n+1}}^{\delta/2}(\omega(t)/t)\,dt\geqq(1/2\ln 2)\int_{\delta/2^{n+1}}^{\delta/2}(\omega(2t)/t)\,dt=(1/2\ln 2)\int_{\delta/2^n}^{\delta}(\omega(u)/u)\,du.$$

Устремляя n к ∞ мы получим неравенство (2) с $B=2C_\omega\ln 2$ при всех $\delta>0$. Что и требовалось доказать.

Замечание 3. Мы рассматриваем подклассы *ограниченных* функций из A_ω. Все дело в том, что если функция $f\in A_\omega$ и не ограничена, то даже для случая $\omega(\delta)=\delta$ функция f^2 уже может не принадлежать A_ω. Для ограниченных же функций f дело обстото иначе (см. по этому поводу [3]).

Теорема 2. *Пусть $\lambda=\{\lambda_m\}_{m=2}^\infty$ — неотрицательная и неубывающая последовательность. Тогда, чтобы для всех $\omega\in\Omega$ и $\varphi\in\mathrm{Lip}_D 1$ выполнялось неравенство*

$$A_\omega(\varphi(f))\leqq C_{\omega,\varphi,\lambda}\sum_{m=2}^{\infty}\omega(a_m(f))\lambda_m \quad \textit{при всех} \quad f\in L^\infty, \tag{28}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_m\geqq C\lg m$ при некотором $C>0$ и всех $m=2,3,\dots$. При этом для всех $\omega\in\Omega$ и $\varphi\in\mathrm{Lip}_D 1$ величина

$$A_\omega(\varphi(f))\leqq\sum_{m=2}^{\infty}\omega(Da_m(f))\lg 2(m-1) \quad \textit{при} \quad f\in L^\infty. \tag{29}$$

Доказательство. Достаточность. Так как

$$\|\chi_m\|_1 = 1/\sqrt{2^n} \geqq 1/\sqrt{m-1} \quad (m = 2^n+k),$$

то в силу Леммы 2 имеем

$$A_\omega(\varphi(f)) \leqq A_\omega(Df)+(2/\ln 2)\sum_{m=3}^{\infty}\omega(Da_m(f))\ln(1/\|x_m\|_1) \leqq$$

$$\leqq A_\omega(Df)+(2/\ln 2)\sum_{m=3}^{\infty}\omega(Da_m(f))\ln\sqrt{m-1} =$$

$$= A_\omega(Df)+\sum_{m=3}^{\infty}\omega(Da_m(f))\lg(m-1) \leqq \sum_{m=2}^{\infty}\omega(Da_m(f))\lg 2(m-1),$$

т. е. (29) справедливо и потому (28) выполнено, например, при

$$\lambda_m = \lg 2(m-1) \quad \text{и} \quad C_{\omega,\varphi,\lambda} = \bar{D}.$$

Необходимость. Пусть $\lambda_m=\eta_m \lg m$ и неравенство (28) выполнено при всех $\omega\in\Omega$, $\varphi\in \mathrm{Lip}_D\, 1$, хотя

(30) $$\varliminf_{m\to\infty} \eta_m = 0.$$

Тем более (28) будет выполнено для функции $\varphi(t)=|t|$. Тогда для каждой $\omega\in\Omega$ найдется постоянная C_ω, для которой

(31) $$A_\omega(|f|) \leqq C_\omega \sum_{m=2}^{\infty}\omega(a_m(f))\eta_m \lg m \quad \text{при всех} \quad f\in L^\infty.$$

Положим $f(t)=\delta\chi_m(t)$, $m=2^n+k$ с $1\leqq k\leqq 2^n$ и $n=1, 2, \dots$, где δ — любое положительное число. Тогда из (31) имеем (см. также Лемму 3)

(32) $$\sum_{j=1}^{n}\omega(\delta/2^j) \leqq C_\omega\omega(\delta)\eta_m \lg m \leqq 2C_\omega\omega(\delta)\eta_m n \quad \text{при} \quad m\geqq 3.$$

В силу (30) найдутся $m_i=2^{n_i}+k_i$ с $1\leqq k_i\leqq 2^{n_i}$ и $n_i<n_{i+1}$, что $\eta_{m_{i+1}}<\eta_{m_i}<1/i^2$ при всех $i\geqq 1$. Построим последовательность $\{\mu_j\}_{j=0}^{\infty}$ такую, что $\mu_j>\mu_{j+1}$ $(j\geqq 0)$ и $\mu_{m_i}=\sqrt{\eta_{m_i}}$ при $i\geqq 1$. По Лемме 4 найдем последовательность $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$ такую, что $\alpha_j\to 0$, $\Delta^2\alpha_j\geqq 0$ при $j\geqq 0$ и $\alpha_j\geqq\mu_j$ при $j\geqq 0$. Известно, что тогда

$$\alpha_j-\alpha_{j+1}\downarrow 0 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty}(\alpha_j-\alpha_{j+1})<\infty$$

и потому

(33) $$\alpha_j-\alpha_{j+1} = o(1/j) \quad \text{при} \quad j\to\infty.$$

Положим $\beta_j = |j\alpha_j - (j-1)\alpha_{j-1}|$ при $j \geqq 1$. Ясно, что (см. (33))

$$\beta_j \geqq 0 \quad \text{при} \quad j \geqq 1 \quad \text{и} \quad \beta_j \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty,$$

ибо

$$\beta_j = |j(\alpha_j - \alpha_{j-1}) + \alpha_{j-1}| = |o(1) + \alpha_{j-1}| = o(1) \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

Найдем $\gamma_j > 0$ $(j \geqq 1)$ такие, что $\gamma_j \geqq \beta_j$, $\gamma_j > \gamma_{j+1}$ и $\gamma_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Построим функцию $f(t)$ на отрезке $[0, 1]$ такую, что $f(0)=0, f(1)=2\gamma_1 \equiv \gamma_0$, $f(2^{-j}) = \gamma_j$ при $j = 1, 2, \ldots$; $f(t)$ линейна на $[2^{-j-1}, 2^{-j}]$ $(j \geqq 0)$. По Лемме 5 найдем выпуклую вверх функцию $\omega_0(\delta)$ на $[0, 1]$ такую, что $\omega_0(\delta) \geqq f(\delta)$ при $0 \leqq \delta \leqq 1$ и $\omega(+0)=0$. Положим $\omega_0(\delta) = \omega_0(1)$ при $\delta > 1$. Ясно, что $\omega_0(\delta)$ является модулем непрерывности на $[0, \infty)$. Для этой функции имеем оценку

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_0(2^{-j}) \geqq \sum_{j=1}^{n} f(2^{-j}) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \geqq \sum_{j=1}^{n} \beta_j \geqq n\alpha_n \geqq n\mu_n \quad \text{при} \quad n \geqq 2. \tag{34}$$

Но тогда из (32) и (34) вытекает для $\delta = 1$, $n = n_i$ и $m = m_i$, что

$$2C_{\omega_0}\omega_0(1)\eta_{m_i} n_i \geqq n_i \mu_{n_i} \geqq n_i \mu_{m_i} = n_i \sqrt{\eta_{m_i}},$$

т. е. $2C_{\omega_0}\omega_0(1)\sqrt{\eta_{m_i}} \geqq 1$, или

$$2C_{\omega_0}\omega_0(1)(1/i) \geqq 1 \quad \text{при} \quad i \geqq 1.$$

Последнее неравенство противоречиво и потому (см. (30))

$$\varliminf_{m \to \infty} \eta_m > 0. \tag{35}$$

Но $\lambda_m > 0$ при всех $m \geqq 2$ (если бы $\lambda_{m_0} = 0$ при некотором m_0, то неравенство (28) (см. также (31)) не могло бы быть выполненным уже для функции $f = \chi_{m_0}$) и потому из (35) следует, что найдется постоянная $C > 0$, для которой

$$\lambda_m \geqq C \lg m \quad \text{при всех} \quad m \geqq 2. \tag{36}$$

Необходимость, а вместе с ней и Теорема 2, доказана.

Замечание 4. При доказательстве необходимости условия (36) в Теореме 2 использовалось выполнение неравенства (28) лишь для $\varphi(t) = |t|$ и $f(t) = \chi_m(t)$ с $m \geqq 3$.

Лутература

[1] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды* (Москва, 1961).

[2] Н. К. Бари, О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций, *Изв. АН СССР, серия матем.*, **19** (1955), 285—302.

[3] П. Л. Ульянов, Абсолютная сходимость рядов Фурье—Хаара от суперпозиций функций, *Analysis Math.*, **4** (1978), 225—236.

[4] П. Л. Ульянов, Об одной алгебре функций и коэффициентах Фурье, *Докл. АН СССР*, **269** (1983), 1054—1056.

СССР, МОСКВА 117234
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО—МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ