Acta Sci. Math., 49 (1985), 179—210

Über die Cesàrosche Summierbarkeit von mehrfachen Orthogonalreihen

KÁROLY TANDORI

Professor László Leindler zum 50. Geburtstag gewidmet

1. In dieser Arbeit werden wir uns mit gewissen Divergenzeigenschaften der Cesàroschen Mittel von mehrfachen Orthogonalreihen beschäftigen.

Um die Sätze zu befassen, schicken wir gewisse Bezeichnungen vor.

Für eine Zahlenfolge $a=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ und für ein Funktionensystem $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ setzen wir

$$s_m(a, \varphi; x) = \sum_{k=1}^{m} a_k\varphi_k(x), \quad \sigma_m(a, \varphi; x) = \sum_{k=1}^{m} (1-(k-1)/m)a_k\varphi_k(x)$$

$$(m = 1, 2, \ldots).$$

Weiterhin, für eine Zahlenfolge $a=\{a_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ und für ein Funktionensystem $\varphi=\{\varphi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$ seien

$$s_{mn}(a, \varphi; x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\varphi_{kl}(x),$$

$$\sigma_{mn}(a, \varphi; x) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} (1-(k-1)/m)(1-(l-1)/n)a_{kl}\varphi_{kl}(x) \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Im Folgenden bedeutet $a=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\in l^2$, bzw. $a=\{a_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}\in l^2$, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty, \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^2 < \infty$$

besteht, weiterhin bedeuten $\log \alpha$ den Logarithmus der Zahl α mit der Basis 2, und E den Einheitsquadrat $(0, 1)\times(0, 1)$.

Eingegangen am 20. Oktober 1983.

Für eine Zahlenfolge $a=\{a_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ setzen wir

$$A_{pq}=\sqrt{\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}}\sum_{l=2^q+1}^{2^{q+1}}a_{kl}^2}\quad (p,q=0,1,\dots),$$

$$A_{-1,q}=\sqrt{\sum_{l=2^q+1}^{2^{q+1}}a_{1l}^2}\ (q=0,1,\dots),\quad A_{p,-1}=\sqrt{\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}}a_{k1}^2}\quad (p=0,1,\dots),$$

$$A_{-1,-1}=|a_{11}|.$$

Der folgende Satz von S. Kaczmarz und D. E. Menchoff ist bekannt. (S. z. B. [2], S. 125.)

Satz A. *Gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2(\log\log(k+3))^2<\infty, \tag{1}$$

dann existiert $\lim_{m\to\infty}\sigma_m(a,\varphi;x)$ *für jedes in einem Maßraum* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *orthonormierte System* $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *in* X *μ-fast überall.*

Der Verf. hat gezeigt, daß für gewisse Koeffizientenfolgen $a=\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ (1) notwendig dafür ist, daß $\lim_{m\to\infty}\sigma_m(a,\varphi;x)$ bei jedem orthonormierten System $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ fast überall existiert. Es gilt nämlich der folgende Satz. (S. z. B. [2], S. 114.)

Satz B. *Gilt* $k^2a_k^2\geqq(k+1)^2a_{k+1}^2$ $(k=1,2,\dots)$ *und*

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2(\log\log(k+3))^2=\infty,$$

so gibt es ein orthonormiertes System $\Phi=\{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *im Intervall* $(0,1)$ *derart, daß die Folge* $\{\sigma_m(a,\Phi;x)\}_{m=1}^{\infty}$ *in* $(0,1)$ *fast überall divergiert.*

Das Analogon des Satzes A hat F. Móricz [4] für mehrfache Orthogonalreihen bewiesen.

Satz C. *Gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{kl}^2(\log\log(k+3))^2(\log\log(l+3))^2<\infty, \tag{2}$$

dann existiert $\lim_{\min(m,n)\to\infty}\sigma_{mn}(a,\varphi;x)$ *für jedes in einem Maßraum* $(X,\mathscr{A},\mu)$ *orthonormierte System* $\varphi=\{\varphi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$ *in* X *μ-fast überall.*

F. Móricz hat das Problem aufgeworfen, ob das Analogon des Satzes B für mehrfache Orthogonalreihen richtig ist. Als Antwort werden wir den folgenden Satz beweisen.

Satz I. *Es sei* $a=\{a_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ *eine Zahlenfolge mit den Eigenschaften*

(3) $$A_{pq} \geqq A_{p,q+1},\ A_{p+1,q} \quad (p, q = -1, 0, 1, \ldots),$$

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^2 (\log\log(k+3))^2(\log\log(l+3))^2 = \infty.$$

Dann gibt es ein in E orthonormiertes System $\Phi=\{\Phi_{kl}(x,y)\}_{k,l=1}^{\infty}$ *von Treppenfunktionen derart, daß*

$$\overline{\lim_{\min(m,n)\to\infty}} |\sigma_{mn}(a,\Phi;\ x,y)| = \infty$$

in E fast überall besteht.

A. N. Kolmogoroff hat den folgenden Satz bewiesen. (S. z. B. [2], S. 118.)

Satz D. *Gilt* $a=\{a_k\}_{k}^{\infty}\in l^2$, *dann ist*

$$\lim_{m\to\infty}\left(s_{2^m}(a,\varphi;x)-\sigma_{2^m}(a,\varphi;x)\right)=0$$

für jedes in einem Maßraum $(X,\mathscr{A},\mu)$ *orthonormierte System* $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *in* X μ*-fast überall.*

L. Csernyák [3] hat bewiesen, daß das Analogon des Satzes D für mehrfache Orthogonalreihen im Allgemeinen nicht richtig ist; weiterhin hat F. Móricz [4] den folgenden Satz bewiesen.

Satz E. *Gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^2(\log\log(\max(k,l)+3))^2 < \infty,$$

dann ist bei jedem in einem Maßraum $(X,\mathscr{A},\mu)$ *orthonormierten System* $\varphi=\{\varphi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$

$$\lim_{\min(m,n)\to\infty}\left(s_{2^m,2^n}(a,\varphi;\ x)-\sigma_{2^m,2^n}(a,\varphi;\ x)\right)=0$$

in X μ*-fast überall.*

F. Móricz hat das Problem aufgeworfen, ob diese Behauptung ohne die Bedingung des Satzes E im Allgemeinen nicht richtig ist. Betreffs dieses Problems beweisen wir den folgenden Satz.

Satz II. *Es sei* $\lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *eine monoton wachsende Folge von positiven Zahlen mit*

$$\lambda_k = o(\log\log k),$$

und sei $\mu=\{\mu_l\}_{l=1}^{\infty}$ *eine beliebige monoton wachsende Folge von positiven Zahlen.*

1. *Dann gibt es eine Koeffizientenfolge* $a=\{a_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ *und ein orthonormiertes System* $\Phi=\{\Phi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$ *im Intervall* $(0, 1)$ *derart, daß*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^2 \lambda_k^2 \mu_l^2 < \infty \tag{5}$$

ist, $\lim_{\min(m,n)\to\infty} s_{2^m, 2^n}(a, \Phi; x)$ *in* $(0, 1)$ *überall existiert, und*

$$\overline{\lim_{\min(m,n)\to\infty}} |\sigma_{2^m, 2^n}(a, \Phi; x)| = \infty$$

in $(0, 1/2)$ *fast überall besteht.*

2. *Weiterhin gibt es eine Koeffizientenfolge* $b=\{b_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ *und ein orthonormiertes System* $\Psi=\{\Psi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$ *in* $(0, 1)$ *derart, dass*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} b_{kl}^2 \lambda_k^2 \mu_l^2 < \infty \tag{6}$$

ist, $\lim_{\min(m,n)\to\infty} \sigma_{2^m, 2^n}(b, \Psi; x)$ *in* $(0, 1)$ *fast überall existiert, und*

$$\overline{\lim_{\min(m,n)\to\infty}} |s_{2^m, 2^n}(b, \Psi; x)| = \infty$$

in $(0, 1/2)$ *fast überall gilt.*

Wir machen den Leser aufmerksam darauf, daß in diesem Satz μ eine beliebig schnell ins Unendliche strebende Folge sein kann.

2. Vorbereitungen. Im Folgenden bezeichnen $c_1, c_2, \ldots$ positive absolute Konstanten. Unter Intervall, bzw. Rechteck verstehen wir ein Intervall (a, b) mit $b-a>0$, bzw. ein Rechteck $(a, b)\times(c, d)$ mit $b-a$, $d-c>0$. Die in einem Intervall I definierte Funktion $f(x)$ nennen wir eine Treppenfunktion, wenn eine Zerlegung von I in endlichviele, paarweise disjunkte Intervalle I_i derart existiert, daß f in jedem I_i konstant ist; weiterhin nennen wir die in einem Rechteck T definierte Funktion $f(x, y)$ eine Treppenfunktion, wenn eine Zerlegung von T in endlichviele, paarweise disjunkte Rechtecke T_i derart existiert, daß f in jedem T_i konstant ist. Eine lineare Menge nennen wir einfach, wenn sie die Vereinigung endlichvieler Intervalle ist; weiterhin nennen wir eine zweidimensionale Menge einfach, wenn sie die Vereinigung endlichvieler Rechtecke ist. Es sei $I=(a, b)$ ein Intervall. Für eine in I definierte Funktion $f(x)$ und für eine Menge $H(\subseteq(0, 1))$ seien

$$f(I;\, x) = \begin{cases} f((x-a)/(b-a)), & x\in I, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und $H(I)$ diejenige Menge, die aus H mit der Transformation $\bar{x}=(b-a)x+a$ entsteht. Es sei $T=(a, b)\times(c, d)$. Für eine in T definierte Funktion $f(x, y)$ und für eine Menge $H(\subseteqq E)$ sei

$$f(T;x,y)=\begin{cases} f((x-a)/(b-a),\ (y-c)/(d-c)), & (x,y)\in T,\\ 0, & \text{sonst},\end{cases}$$

und sei $H(T)$ diejenige Menge, die aus H mit der Transformation $\bar{x}=(b-a)x+a$, $\bar{y}=(d-c)y+c$ entsteht. Im Folgenden bezeichnet $r=\{r_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ das Rademachersche Funktionensystem, wobei also $r_k(x)=\operatorname{sign}\sin 2^k\pi x$ $(k=1,2,\ldots)$ ist.

Zum Beweis unserer Sätze benötigen wir gewisse Hilfssätze.

Von D. E. Menchoff und H. Rademacher stammt der folgende Hilfssatz. (S. z. B. [2], S. 79.)

Hilfssatz I. *Es gibt eine positive Zahl c_1 mit folgender Eigenschaft. Für eine beliebige Folge $\{a_k\}_{k=1}^{N}$ und für ein beliebiges in einem Maßraum $(X,\mathscr{A},\mu)$ definiertes orthonormiertes System $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{N}$ gilt*

$$\int_X \max_{1\leqq m\leqq N}\Big(\sum_{k=1}^{m} a_k\chi_k(x)\Big)^2 d\mu \leqq c_1\log^2(N+1)\sum_{k=1}^{N} a_k^2.$$

Das Analogon des Hilfssatzes I ist richtig für mehrfache Summen von orthogonalen Funktionen. (S. z. B. [1].)

Hilfssatz II. *Es gibt eine positive Zahl c_2 mit folgender Eigenschaft. Für jede Folge a_{kl} $(k=1,\ldots,M,\ l=1,\ldots,N)$ und für jedes in einem Maßraum $(X,\mathscr{A},\mu)$ orthonormierte System $\chi_{kl}(x)$ $(k=1,\ldots,M,\ l=1,\ldots,N)$ gilt*

$$\int_X \max_{\substack{1\leqq m\leqq M\\ 1\leqq n\leqq N}}\Big(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\chi_{kl}(x)\Big)^2 d\mu \leqq c_2\log^2(M+1)\log^2(N+1)\sum_{k=1}^{M}\sum_{l=1}^{N} a_{kl}^2.$$

Von D. E. Menchoff stammt der folgende Hilfssatz. (S. z. B. [7].)

Hilfssatz III. *Es gibt positive Konstanten c_3, c_4, c_5 mit den folgenden Eigenschaften. Ist $p(\geqq 2)$ eine ganze Zahl, dann gibt es ein orthonormiertes System $\{f_l(p;x)\}_{l=1}^{2p^2}$ von Treppenfunktionen in $(0,1)$ und eine einfache Menge $E(p)$ $(\subseteqq(0,1))$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\operatorname{mes} E(p)\geqq c_3,$$

$$|f_l(p;x)|\leqq c_4 \quad (x\in(0,1);\ l=1,\ldots,2p^2),$$

und für jeden Punkt $x\in E(p)$ gibt es einen Index $m(x)$ $(p^2\leqq m(x)<2p^2)$ mit

$$f_l(p;x)\geqq 0 \quad (x\in E(p);\ l=1,\ldots,m(x)),$$

und

$$\sum_{l=1}^{m(x)} f_l(p;x)\geqq c_5\,p\log p \quad (x\in E(p)).$$

Aus Hilfssatz III ergibt sich unmittelbar der folgende:

Hilfssatz IV. *Es gibt eine positive ganze Zahl p_0 und positive Konstanten c_6, c_7 mit den folgenden Eigenschaften. Ist $p(\geqq p_0)$ eine ganze Zahl, dann gibt es ein orthonormiertes System $\{f_l(p; x)\}_{l=1}^{2p}$ von Treppenfunktionen in $(0, 1)$ und eine einfache Menge $E(p)$ $(\subseteqq (0, 1))$ derart, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\operatorname{mes} E(p) \geqq c_6,$$

und für jeden Punkt $x \in E(p)$ gibt es einen Index $m(x)$ $(1 < m(x) < 2p)$ mit

$$f_l(p;\ x) \geqq 0 \quad (x \in E(p);\ l = 1, \dots, m(x))$$

und

$$\sum_{l=1}^{m(x)-1} f_l(p; x) \geqq c_7 \sqrt{p} \log p \quad (x \in E(p)).$$

Es sei nämlich $\bar{p}$ eine positive ganze Zahl mit $\bar{p}^2 \leqq p < (\bar{p}+1)^2$, und wir wenden den Hilfssatz III im Falle $\bar{p}$. Die so erhaltenen Funktionen, bzw. Menge bezeichnen wir mit $\{f_l(p; x)\}_{l=1}^{2\bar{p}^2}$, bzw. mit $E(p)$. Da diese Funktionen Treppenfunktionen sind, können wir leicht solche Treppenfunktionen $f_l(p; x)$ $(l = 2\bar{p}^2 + 1, \dots, 2p)$ angeben, daß das System $\{f_l(p; x)\}_{l=1}^{2p}$ in $(0, 1)$ orthonormiert ist. Es ist klar, daß für das System $\{f_l(p; x)\}_{l=1}^{2p}$ und für die Menge $E(p)$ alle Erforderungen des Hilfssatzes IV mit geeigneten absoluten Konstanten c_6, c_7 erfüllt werden, wenn nur p genügend groß ist.

Es sei $R = \{r_k(x) r_l(y)\}_{k,l=1}^{\infty}$.

Hilfssatz V. *Ist $a = \{a_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty} \notin l^2$, dann gilt*

$$\lim_{\min(m,n) \to \infty} |\sigma_{mn}(a, R;\ x, y)| = \infty$$

fast überall in E.

Diesen Hilfssatz kann man ähnlich, wie den entsprechenden Satz von A. Zygmund über einfache Rademachersche Reihen beweisen. (S. z. B. [8], S. 212.)

Hilfssatz VI. *Unter den Bedingungen*

$$\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} a_k^2 \geqq \sum_{k=2^{p+1}+1}^{2^{p+2}} a_k^2 \quad (p = 0, 1, \dots),$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} a_k^2 \Big) \log^2 (p+2) = \infty,$$

gibt es ein orthonormiertes System $\Phi = \{\Phi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen in $(0, 1)$ derart, daß die Folge $\{s_{2^p}(a, \Phi; x)\}_{p=0}^{\infty}$ in $(0, 1)$ fast überall divergiert.

Dieser Hilfssatz folgt leicht aus bekannten Sätzen. (S. [5], Satz II und [6], Satz VII.) Aus dem Beweis des Satzes II in [5] ergibt sich, daß man die Funktionen $\Phi_k(x)$ als Treppenfunktionen wählen kann.

Aus dem Hilfssatz VI folgt der folgende:

Hilfssatz VII. *Unter den Bedingungen des Hilfssatzes VI gibt es ein orthonormiertes System* $\varphi=\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *von Treppenfunktionen in* $(0, 1)$ *derart, dass*

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\, |s_{2^p}(a, \varphi;\ x)| = \infty$$

in $(0, 1)$ *fast überall besteht.*

Beweis. Wir sollen zwei Fälle unterscheiden.

Ist $a\notin l^2$, dann gilt

$$\overline{\lim_{p\to\infty}}\, |s_{2^p}(a, r;\ x)| = \infty$$

in $(0, 1)$ fast überall, nach dem zitierten Satz von A. Zygmund. (S. z. B. [8], S. 212.)

Wir nehmen also $a\in l^2$ an. Dann gibt es eine monoton abnehmende, zu 0 strebende Folge $\lambda=\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ von positiven Zahlen mit

$$\sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \lambda_k^2 a_k^2 \geqq \sum_{k=2^{p+1}+1}^{2^{p+2}} \lambda_k^2 a_k^2 \quad (p=0, 1, \ldots),$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Big\{ \sum_{k=2^p+1}^{2^{p+1}} \lambda_k^2 a_k^2 \Big\} \log^2(p+2) = \infty.$$

Auf Grund des Hilfssatzes VI gibt es dann ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System φ derart, daß die Folge $\{s_{2^p}(\lambda a, \varphi; x)\}_{p=0}^{\infty}$ in $(0, 1)$ fast überall divergiert, wobei λa die Folge $\{\lambda_k a_k\}_{k=1}^{\infty}$ bezeichnet. Durch Abelsche Umformung ergibt sich, daß für jedes p

$$s_{2^p}(\lambda a, \varphi;\ x) = \sum_{k=1}^{2^p-1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k(a, \varphi;\ x) + \lambda_{2^p} s_{2^p}(a, \varphi;\ x) \quad \big(x\in(0, 1)\big) \tag{7}$$

ist. Da, wegen $a\in l^2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \int_0^1 |s_k(a, \varphi;\ x)|\, dx \leqq \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) \Big\{ \sum_{l=1}^{k} a_l^2 \Big\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \Big\{ \sum_{l=1}^{\infty} a_l^2 \Big\}^{1/2} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) = \lambda_1 \Big\{ \sum_{l=1}^{\infty} a_l^2 \Big\}^{1/2} < \infty$$

ist, konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) s_k(a, \varphi;\ x)$$

in $(0, 1)$ fast überall. Auf Grund von (7) erhalten wir, daß die Folge $\{\lambda_{2^p} s_{2^p}(a, \varphi; x)\}_{p=0}^{\infty}$ in $(0, 1)$ fast überall divergiert, woraus die Behauptung des Hilfssatzes VII folgt.

3. Beweis des Satzes I. Anstatt des Satzes I ist es genug den folgenden Satz zu beweisen.

Satz I'. *Wir nehmen an, daß für die Folge $a=\{s_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}$ die Bedingungen des Satzes I erfüllt sind. Dann gibt es ein in E orthonormiertes System $\psi=\{\psi_{kl}(x, y)\}_{k,l=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen derart, daß*

$$\overline{\lim_{\min(m,n)\to\infty}} |\sigma_{mn}(a, \psi;\ x, y)| = \infty$$

in einer Untermenge von E mit positivem Maß erfüllt ist.

Wir wollen zeigen, daß Satz I aus Satz I' folgt. Gilt nämlich der Satz I', dann gibt es eine Folge $(0=)r_0<\ldots<r_i<\ldots$ von ganzen Zahlen, und eine Folge von einfachen Mengen $H_i(\subseteqq E)$ $(i=1, 2, \ldots)$ derart, daß mit den Bezeichnungen $M_{kl}=\max_{(x,y)\in E} |\psi_{kl}(x, y)|$ $(k, l=1, 2, \ldots)$ und

$$T(i, m, n) = \{(k, l)\colon\ k = 1, \ldots, m,\ l = 1, \ldots, n\}\setminus\{(k, l)\colon\ k, l = 1, \ldots, r_{i-1}\}$$

$(m, n=r_{i-1}+1, \ldots, r_i;\ i=1, 2, \ldots)$ für jedes $i\ (=1, 2, \cdots)$ die Bedingungen

$$\text{mes}\, H_i \geqq c_8, \tag{8}$$

und

$$\max_{r_{i-1}<m,n\leqq r_i} \Big|\sum_{(k,l)\in T(i,m,n)} \big(1-(k-1)/m\big)\big(1-(l-1)/n\big) a_{kl}\psi_{kl}(x, y)\Big| \geqq \geqq i+\sum_{k=1}^{r_{i-1}}\sum_{l=1}^{r_{i-1}} |a_{kl}| M_{kl} \quad ((x, y)\in H_i) \tag{9}$$

erfüllt werden.

Durch vollständige Induktion definieren wir eine Folge $E_i(\subseteqq E)(i=1, 2, \ldots)$ von einfachen und stochastisch unabhängigen Mengen, und ein in E orthonormiertes System $\Phi=\{\Phi_{k,l}(x, y)\}_{k,l=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\max_{(x,y)\in E} |\Phi_{kl}(x, y)| = M_{kl} \quad (k, l = 1, 2, \ldots), \tag{10}$$

$$\text{mes}\, E_i \geqq c_8 \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{11}$$

$$\max_{r_{i-1}<m,n\leqq r_i} \Big|\sum_{(k,l)\in T(i,m,n)} \big(1-(k-1)/m\big)\big(1-(l-1)/n\big) a_{kl}\Phi_{kl}(x, y)\Big| \geqq \geqq i+\sum_{k=1}^{r_{i-1}}\sum_{l=1}^{r_{i-1}} |a_{kl}| M_{kl} \quad ((x, y)\in E_i). \tag{12}$$

Es sei nämlich $\Phi_{kl}(x, y)=\psi_{kl}(x, y)$ $\big((x, y)\in E;\ k, l=1, \dots, r_1\big)$ und $E_1=H_1$. Es sei i_0 eine positive ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die einfachen und stochastisch unabhängigen Mengen $E_i(\subseteqq E)$ $(i=1, \dots, i_0)$ und das in E orthonormierte System $\{\Phi_{kl}(x, y)\}_{k,l=1}^{r_{i_0}}$ von Treppenfunktionen schon derart definiert sind, daß (10)—(12) für $i=1, \dots, i_0$ erfüllt sind. Dann gibt es eine Einteilung von E in paarweise disjunkte Rechtecke $T_1, \dots, T_\sigma$ derart, daß jede Funktion $\Phi_{kl}(x, y)$ $(k, l=1, \dots, r_{i_0})$ in jedem T_s $(s=1, \dots, \sigma)$ konstant ist, und jede Menge E_i $(i=1, \dots, i_0)$ die Vereinigung gewisser T_s ist. Jedes Rechteck T_s teilen wir in zwei disjunkte Rechtecke T_s' und T_s'' mit $\operatorname{mes} T_s'=\operatorname{mes} T_s''$ $(s=1, \dots, \sigma)$. Dann setzen wir

$$\Phi_{kl}(x, y) = \sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{kl}(T_s'; x, y)-\sum_{s=1}^{\sigma} \psi_{kl}(T_s''; x, y) \quad \big((k, l)\in T(i_0+1, r_{i_0+1}, r_{i_0+1})\big),$$

$$E_{i_0+1} = \bigcup_{s=1}^{\sigma} \big(H_{i_0+1}(T_s')\cup H_{i_0+1}(T_s'')\big).$$

Es ist klar, daß die Menge $E_{i_0+1}(\subseteqq E)$ einfach ist, die Mengen $E_1, \dots, E_{i_0+1}$ stochastisch unabhängig sind, die Funktionen $\Phi_{kl}(x, y)$ $\big((k, l)\in T(i_0+1, r_{i_0+1}, r_{i_0+1})\big)$ Treppenfunktionen sind, das System $\{\Phi_{kl}(x, y)\}_{k,l=1}^{r_{i_0+1}}$ in E ortonormiert ist, und wegen (8), (9), (10)—(12) im Falle $i=i_0+1$ bestehen. Die Mengenfolge $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ und das System $\Phi=\{\Phi_{kl}(x, y)\}_{k,l=1}^{\infty}$ mit den erforderten Eigenschaften erhalten wir also durch Induktion.

Wegen (10) und (12) gilt

$$\text{(13)} \qquad \max_{r_{i-1}<m, n\leqq r_i} |\sigma_{mn}(a, \Phi;\ x, y)| \geqq i \quad \big((x, y)\in E_i\big)$$

für jedes $i(=1, 2, \dots)$. Es sei $\bar{E}=\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, E_i$. Da die Mengen E_i stochastisch unabhängig sind, aus (11) und durch Anwendung des Borel—Cantellischen Lemmas, erhalten wir $\operatorname{mes} \bar{E}=1$. Im Falle $(x, y)\in\bar{E}$ gilt aber (13) für unendlich viele i. So bekommen wir, daß $\overline{\lim\limits_{\min(m,n)\to\infty}} |\sigma_{mn}(a, \Phi; x, y)|=\infty$ in E fast überall besteht.

Damit haben wir bewiesen, daß Satz I sich aus Satz I′ ergibt.

Wir haben also den Satz I′ zu beweisen. Dazu können wir

$$\text{(14)} \qquad a = \{a_{kl}\}_{k,l=1}^{\infty}\in l^2$$

voraussetzen, da im entgegengesetzten Falle Satz I auf Grund des Hilfssatzes V folgt.

Wir bemerken, daß die Bedingung (4) mit

$$\sum_{p=-1}^{\infty} \sum_{q=-1}^{\infty} A_{pq}^2 \log^2(p+3)\log^2(q+3) = \infty$$

äquivalent ist. Daraus folgt, daß einer der folgenden zwei Fälle besteht.

a) Eine der zwei Reihen

$$\sum_{p=-1}^{\infty} A_{p,-1}^2 \log^2(p+3), \quad \sum_{q=-1}^{\infty} A_{-1,q}^2 \log^2(q+3)$$

ist divergent.

b) Es gilt

$$\sum_{p=r}^{\infty} \sum_{q=r}^{\infty} A_{pq}^2 \log^2(p+2) \log^2(q+2) = \infty \quad (r = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

a) Beweis des Satzes I′ im Falle a). Wir nehmen an, daß

$$\sum_{p=-1}^{\infty} A_{p,-1}^2 \log^2(p+3) = \infty \tag{16}$$

ist. Den Fall

$$\sum_{q=-1}^{\infty} A_{-1,q}^2 \log^2(q+3) = \infty$$

kann man ähnlicherweise betrachten. Aus (14) folgt

$$a^{(0)} = \{a_{k1}\}_{k=1}^{\infty} \in l^2. \tag{17}$$

Aus (3), (16) und (17), durch Anwendung von Satz D und Hilfssatz VII bekommen wir ein in $(0, 1)$ orthonormiertes System $f = \{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen, für welches

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} |\sigma_m(a^{(0)}, f;\ x)| = \infty$$

in $(0, 1)$ fast überall gilt.

Es seien T_{kl} $(k=1, 2, \ldots;\ l=2, 3, \ldots)$ paarweise disjunkte Rechtecke in $(0, 2)\times\times(0, 2)\setminus E$. Wir setzen

$$\bar{\psi}_{k1}(x, y) = \begin{cases} f_k(x), & (x, y)\in E, \\ 0, & (x, y)\in(0, 2)\times(0, 2)\setminus E \end{cases}$$

$(k=1, 2, \ldots)$ und

$$\bar{\psi}_{kl}(x, y) = \begin{cases} 1/\sqrt{\operatorname{mes} T_{kl}}, & (x, y)\in T_{kl}, \\ 0, & (x, y)\in(0, 2)\times(0, 2)\setminus T_{kl} \end{cases}$$

$(k=1, 2, \ldots;\ l=2, 3, \ldots)$.

Es ist klar, daß die Funktionen $\bar{\psi}_{kl}(x, y)$ $(k, l=1, 2, \ldots)$ Treppenfunktionen sind, ein orthonormiertes System in $(0, 2)\times(0, 2)$ bilden, und in E fast überall

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} |\sigma_{2^m, 2^m}(a, \bar{\psi};\ x, y)| = \infty$$

erfüllt ist.

Es sei endlich

$$\psi_{kl}(x, y) = 2\bar{\psi}_{kl}(2x, 2y) \quad ((x, y)\in E;\ k, l = 1, 2, \ldots).$$

Für diese Funktionen sind alle Erforderungen des Satzes I′ erfüllt.

b) Beweis des Satzes I′ im Falle b). Während des Beweises von Satzes I′ können wir voraussetzen, daß die Koeffizienten a_{kl} rationelle Zahlen sind.

Unter den Bedingungen des Satzes I′ kann man nämlich solche rationellen Zahlen $\bar{a}_{kl}$ $(k, l=1, 2, \ldots)$ angeben, daß

$$\bar{A}_{pq} \geqq \bar{A}_{p+1,q}, \bar{A}_{p,q+1} \quad (p, q = -1, 0, 1, \ldots),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \bar{a}_{kl}(\log\log(k+3))^2(\log\log(l+3))^2 = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}-\bar{a}_{kl}| < \infty$$

erfüllt werden. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}-\bar{a}_{kl}|\iint_E |\varphi_{kl}(x, y)|\,dx\,dy \leqq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{kl}-\bar{a}_{kl}| < \infty$$

für jedes in E orthonormierte System $\varphi=\{\varphi_{kl}(x, y)\}_{k,l=1}^{\infty}$; daraus folgt, daß $\lim_{\min(m,n)\to\infty} s_{mn}(a-\bar{a}, \varphi; x, y)$ in E fast überall existiert; hieraus ergibt sich aber, daß $\lim_{\min(m,n)\to\infty} \sigma_{mn}(a-\bar{a}; \varphi; x, y)$ auch fast überall in E existiert. Ist also Satz I′ für rationelle Koeffizienten bewiesen, so gibt es ein in E orthonormiertes System $\Phi=\{\Phi_{kl}(x, y)\}_{k,l=1}^{\infty}$ von Treppenfunktionen derart, daß $\overline{\lim}_{\min(m,n)\to\infty} |\sigma_{mn}(\bar{a}, \Phi; x, y)|= =\infty$ in einer Untermenge von E mit positivem Maß erfüllt ist. Daraus, nach den Obigen folgt $\lim_{\min(m,n)\to\infty} |\sigma_{mn}(a, \Phi; x, y)|=\infty$ in einer Untermenge von E mit positivem Maß.

Zum Beweis des Satzes I′ werden wir also voraussetzen, daß a_{kl} $(k, l=1, 2, \ldots)$ rationell sind, und (3), (14), (15) erfüllt werden. Aus (15), auf Grund von (3) erhalten wir

$$\sum_{p=r}^{\infty}\sum_{q=r}^{\infty} p^2q^2 2^{p+q}A^2_{2^{p+1}-1,2^{q+1}-1} = \infty \quad (r = 0, 1, \ldots).$$

Darum gibt es eine Folge $(0)=r_0<\ldots<r_i<\ldots$ von ganzen Zahlen und eine monoton abnehmende, nach 0 strebende Folge $\{s_i\}_{i=0}^{\infty}$ von positiven Zahlen mit

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_i^2 \sum_{p=r_i}^{r_{i+1}-1}\sum_{q=r_i}^{r_{i+1}-1} p^2q^2 2^{p+q}A^2_{2^{p+1}-1,2^{q+1}-1} = \infty, \tag{18}$$

$$s_i^2 \sum_{p=r_i}^{r_{i+1}-1}\sum_{q=r_i}^{r_{i+1}-1} p^2q^2 2^{p+q}A^2_{2^{p+1}-1,2^{q+1}-1} \leqq 1 \quad (i = 0, 1, \ldots). \tag{19}$$

Für jedes $i=(0, 1, \ldots)$ werden wir einfache Mengen $H_{pq}^{(i)}(\subseteqq E)$ $(p, q=r_i, \cdots, r_{i+1})$ und ein in E orthonormiertes System $f_{kl}^{(i)}(x, y)$ $(2^{r_i}\leqq k, l<2^{r_{i+1}})$ von Treppenfunktionen derart angeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$H_{pq}^{(i)} \cap H_{p'q'}^{(i)} = \emptyset \quad ((p, q) \neq (p', q');\ r_i \leqq p, q, p', q' < r_{i+1}), \tag{20}$$

$$\operatorname{mes} H_{pq}^{(i)} \geqq c_9 p^2 q^2 2^{p+q} A^2_{2^{p+1}-1,2^{q+1}-1} s_i^2 \quad (r_i \leqq p, q < r_{i+1}), \tag{21}$$

$$f_{kl}^{(i)}(x, y) = 0 \quad ((x, y)\in H_{pq}^{(i)};\ (k, l) \notin [2^p, 2^{p+1})\times[2^q, 2^{q+1});\ r_i \leqq p; q < r_{i+1}), \tag{22}$$

weiterhin für jedes p, q $(r_i \leqq p, q < r_{i+1})$ und $(x, y) \in H_{pq}^{(i)}$ gibt es Indizes $m(x, y)$, $n(x, y)$ $\left(2^p < m(x, y) < 2^{p+1},\ 2^q < n(x, y) < 2^{q+1}\right)$ derart, daß

(23) $$f_{kl}^{(i)}(x, y) \geqq 0 \quad \left((x, y) \in H_{pq}^{(i)};\ 2^p \leqq k \leqq m(x, y),\ 2^q \leqq l \leqq n(x, y)\right)$$

und

(24) $$\sum_{k=2^p}^{m(x,y)-1} \sum_{l=2^q}^{n(x,y)-1} A_{kl} f_{kl}^{(i)}(x, y) \geqq c_{10}/s_i \quad \left((x, y) \in H_{pq}^{(i)}\right)$$

bestehen.

Es sei $i(=0, 1, \ldots)$ eine ganze Zahl, und seien $T_{pq}^{(i)}$ $(r_i \leqq p, q < r_{i+1})$ paarweise disjunkte Rechtecke in E mit

$$\operatorname{mes} T_{pq}^{(i)} = p^2 q^2 2^{p+q} A^2_{2^{p+1}-1,\, 2^{q+1}-1} \quad (r_i \leqq p,\ q < r_{i+1}).$$

Solche Rechtecke existieren wegen (19). Sind p, q ganze Zahlen $(r_i \leqq p, q < r_{i+1})$, dann wenden wir den Hilfssatz IV im Falle 2^{p-1}, bzw. im Falle 2^{q-1} an. Dann seien

$$\bar{f}_{kl}^{(i)}(x, y) = f_{k-2^p+1}(2^{p-1};\ x) \cdot f_{l-2^q+1}(2^{q-1};\ y)$$
$$\left((x, y) \in E;\quad 2^p \leqq k < 2^{p+1},\quad 2^q \leqq l < 2^{q+1}\right),$$
$$\bar{H}_{pq}^{(i)} = E(2^{p-1}) \times E(2^{q-1}),$$

und wir setzen

$$f_{kl}^{(i)}(x, y) = \left(1/\sqrt{\operatorname{mes} T_{pq}^{(i)}}\right) \bar{f}_{kl}^{(i)}(T_{pq}^{(i)};\ x, y) \quad (2^p \leqq k < 2^{p+1},\ 2^q \leqq l < 2^{q+1}),$$
$$H_{pq}^{(i)} = \bar{H}_{pq}^{(i)}(T_{pq}^{(i)}).$$

Aus dem Hilfssatz IV folgt, daß für diese Mengen und Funktionen (20)—(24) bei jedem $i(=0, 1, \ldots)$ erfüllt sind.

Für jede ganze Zahl $i(=0, 1, \ldots)$ werden wir dann die einfachen Mengen $F_{pq}^{(i)}(\subseteqq E)$ $(r_i \leqq p, q < r_{i+1})$ und ein in E orthonormiertes System der Treppenfunktionen $g_{\alpha\beta}^{(i)}(x, y)$ $(2^{2^{r_i}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i+1}}})$ derart angeben, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(25) $$F_{pq}^{(i)} \cap F_{p'q'}^{(i)} = \emptyset \quad \left((p, q) \neq (p', q');\ r_i \leqq p, q, p', q' < r_{i+1}\right),$$

(26) $$\operatorname{mes} F_{pq}^{(i)} \geqq c_{11} p^2 q^2 2^{p+q} A^2_{2^{p+1}-1,\, 2^{q+1}-1} s_i^2 \quad (r_i \leqq p,\ q < r_{i+1}),$$

(27) $$g_{\alpha\beta}^{(i)}(x, y) = 0 \quad \left((x, y) \in F_{pq}^{(i)};\ (\alpha, \beta) \notin (2^{2^p}, 2^{2^{p+1}}] \times (2^{2^q}, 2^{2^{q+1}}];\ r_i \leqq p, q < r_{i+1}\right),$$

weiterhin für jede p, q $(r_i \leqq p, q < r_{i+1})$, und $(x, y) \in F_{pq}^{(i)}$ gibt es Indizes $m(x, y)$, $n(x, y)$ $\left(2^p < m(x, y) < 2^{p+1},\ 2^q < n(x, y) < 2^{q+1}\right)$ derart, daß

(28) $$a_{\alpha\beta}\, g_{\alpha\beta}^{(i)}(x, y) \geqq 0 \quad \left((x, y) \in F_{pq}^{(i)};\ 2^{2^p} < \alpha \leqq 2^{m(x,y)+1},\quad 2^{2^q} < \beta \leqq 2^{n(x,y)+1}\right),$$

und

(29) $$\sum_{\alpha=2^{2^p}+1}^{2^{m(x,y)}} \sum_{\beta=2^{2^q}+1}^{2^{n(x,y)}} a_{\alpha\beta}\, g_{\alpha\beta}^{(i)}(x, y) \geqq c_{12}/s_i \quad \left((x, y) \in F_{pq}^{(i)}\right)$$

erfüllt werden.

Es sei i eine nichtnegative ganze Zahl. Da die Koeffizienten $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta=1, 2, \ldots)$ rationell sind, gibt es eine positive ganze Zahl Q_i derart, daß für jede ganzen Zahlen k, l $(2^{r_i} \leqq k, l < 2^{r_{i+1}})$

$$a_{\alpha\beta}^2/A_{kl}^2 = P(\alpha, \beta;\ k, l)/Q_i \quad (2^k < \alpha \leqq 2^{k+1},\ 2^l < \beta \leqq 2^{l+1})$$

mit gewissen ganzen Zahlen $P(\alpha, \beta; k, l)$ erfüllt ist.

Es sei T_u $(u=1, \ldots, Q_i)$ eine Einteilung von E in paarweise disjunkte Rechtecke mit

$$\operatorname{mes} T_u = 1/Q_i \quad (u = 1, \ldots, Q_i).$$

Sind k, l positive ganze Zahlen $(2^{r_i} \leqq k < 2^{r_{i+1}},\ 2^{r_i} \leqq l < 2^{r_{i+1}})$ und α, β ganze Zahlen mit $2^k < \alpha \leqq 2^{k+1},\ 2^l < \beta \leqq 2^{l+1}$, dann sei

$$g_{\alpha\beta}^{(i)}(x, y) = (A_{kl}/a_{\alpha\beta}) \sum_{u=M(\alpha,\beta)+1}^{N(\alpha,\beta)} f_{kl}^{(i)}(T_u;\ x, y),$$

wobei

$$M(\alpha, \beta) = \sum_{a=2^k+1}^{2^{k+1}} \sum_{b=2^l+1}^{\beta-1} P(a, b;\ k, l) + \sum_{a=2^k+1}^{\alpha-1} P(a, \beta;\ k, l),$$

$$N(\alpha, \beta) = \sum_{a=2^k+1}^{2^{k+1}} \sum_{b=2^l+1}^{\beta-1} P(a, b;\ k, l) + \sum_{a=2^k+1}^{\alpha} P(a, \beta;\ k, l),$$

und sei

$$F_{pq}^{(i)} = \bigcup_{u=1}^{Q_i} H_{pq}^{(i)}(T_u) \quad (r_i \leqq p,\ q < r_{i+1}).$$

Auf Grund von (20)—(24) sind (25)—(29) für jedes $i(=0, 1, \ldots)$ erfüllt.

Endlich werden wir eine Folge von einfachen und stochastisch unabhängigen Mengen $G_i(\subseteqq E)$ $(i=0, 1, \ldots)$ und ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\Psi_{\alpha\beta}(x, y)$ $(2^{2^{r_i}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i+1}}}; i=0, 1, \ldots)$ in $(0, 2)\times(0, 2)$ mit folgenden Eigenschaften definieren. Für jedes $i(=0, 1, \ldots)$ gelten

$$\operatorname{mes} G_i = \sum_{p=r_i}^{r_{i+1}-1} \sum_{q=r_i}^{r_{i+1}-1} \operatorname{mes} F_{pq}^{(i)}, \tag{30}$$

$$\Psi_{\alpha\beta}(x, y) = 0 \quad ((x, y) \notin E;\ 2^{2^{r_i}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i+1}}}), \tag{31}$$

weiterhin für jedes $(x, y) \in G_i$ gibt es ganze Zahlen p, q $(r_i \leqq p, q < r_{i+1})$ und Indizes $m(x, y), n(x, y)$ $(2^p < m(x, y) < 2^{p+1},\ 2^q < n(x, y) < 2^{q+1})$ mit

$$a_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta}(x, y) \geqq 0, \quad \text{oder} \quad a_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta}(x, y) \leqq 0 \tag{32}$$
$$\left(2^{2^p} < \alpha \leqq 2^{m(x,y)+1},\quad 2^{2^q} < \beta \leqq 2^{n(x,y)+1}\right),$$

$$\Big| \sum_{\alpha=2^{2^p}+1}^{2^{m(x,y)}} \sum_{\beta=2^{2^q}+1}^{2^{n(x,y)}} a_{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta}(x, y) \Big| \geqq c_{12}/s_i, \tag{33}$$

$$\Psi_{\alpha\beta}(x, y) = 0 \quad ((x, y) \in G_i;\ 2^{2^{r_i}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i+1}}};\ (\alpha, \beta) \notin (2^{2^p}, 2^{2^{p+1}}] \times (2^{2^q}, 2^{2^{q+1}}]). \tag{34}$$

Die Mengen G_i und die Funktionen $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ definieren wir durch Induktion. Es sei

$$G_0 = \sum_{p=r_0}^{r_1-1} \sum_{q=r_0}^{r_1-1} F_{pq}^{(0)},$$

und

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x,y) = \begin{cases} g_{\alpha\beta}^{(0)}(x, y), & (x, y)\in E, \\ 0, & (x, y)\in(0, 2)\times(0, 2)\setminus E \end{cases}$$

$(2^{2^{r_0}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_1}})$.

Es sei i_0 eine nichtnegative ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die einfachen und stochastisch unabhängigen Mengen $G_i(\subseteqq E)$ $(i=0, \ldots, i_0)$ und die in $(0, 2)\times(0, 2)$ orthonormierten Treppenfunktionen $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ $(2^{2^{r_i}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i+1}}}; i=0, \ldots, i_0)$ schon derart definiert sind, daß (30)—(34) im Falle $i=0, \ldots, i_0$ erfüllt sind.

Dann gibt es eine Einteilung von E in paarweise disjunkte Rechtecke T_s $(s=1, \ldots, \sigma)$ derart, daß jede Funktion $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ $(2^{2^{r_i}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i+1}}}; i=0, \ldots, i_0)$ in jedem T_s $(s=1, \ldots, \sigma)$ konstant ist, und jede Menge G_i $(i=0, \ldots, i_0)$ die Vereinigung von gewissen T_s ist. Wir teilen T_s in zwei disjunkte Rechtecke T_s', T_s'' mit mes $T_s' =$ mes T_s'' $(s=1, \ldots, \sigma)$. Dann setzen wir

$$G_{i_0+1} = \bigcup_{s=1}^{\sigma} \Big(\bigcup_{p,q} \big(F_{pq}^{(i_0+1)}(T_s') \cup F_{pq}^{(i_0+1)}(T_s'')\big)\Big), \quad r_{i_0+1} \leqq p, q < r_{i_0+2}$$

und

$$\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} \sum_{s=1}^{\sigma} g_{\alpha\beta}^{(i_0+1)}(T_s'; x, y) - \sum_{s=1}^{\sigma} g_{\alpha\beta}^{(i_0+1)}(T_s''; x, y), & (x, y)\in E, \\ 0, \ (x, y)\in(0, 2)\times(0, 2)\setminus E \end{cases}$$
$$(2^{2^{r_{i_0+1}}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i_0+2}}}).$$

Es ist klar, daß die Menge $G_{i_0+1}(\subseteqq E)$ einfach ist, $G_0, \ldots, G_{i_0+1}$ stochastisch unabhängig sind, die Funktionen $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ $(2^{2^{r_{i_0+1}}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i_0+2}}})$ Treppenfunktionen sind, und die Funktionen $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ $(2^{2^{r_i}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i+1}}}; i=0, \ldots, i_0+1)$ in $(0, 2)\times(0, 2)$ ein orthonormiertes System bilden. Weiterhin, auf Grund der Definition der Menge G_{i_0+1}, bzw. der Funktionen $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ $(2^{2^{r_{i_0+1}}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i_0+2}}})$ und der Relationen (25)—(29) sind (30)—(34) auch im Falle $i=i_0+1$ erfüllt. Die Mengenfolge $\{G_i\}_{i=0}^{\infty}$ und die Funktionen $\bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ $(2^{2^{r_i}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{i+1}}}; i=0, 1, \ldots)$ mit den erforderten Eigenschaften erhalten wir durch Induktion.

Wir bemerken, daß auf Grund von (18) eine der Reihen

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_{2i}^2 \sum_{p=r_{2i}}^{r_{2i+1}-1} \sum_{q=r_{2i}}^{r_{2i+1}-1} p^2 q^2 2^{p+q} A_{2^{p+1}-1, 2^{q+1}-1}^2,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_{2i+1}^2 \sum_{p=r_{2i+1}}^{r_{2i+2}-1} \sum_{p=r_{2i+1}}^{r_{2i+2}-1} p^2 q^2 2^{p+q} A_{2^{p+1}-1, 2^{q+1}-1}^2$$

divergiert. Wir nehmen an, daß

$$\sum_{i=0}^{\infty} s_{2i}^2 \sum_{p=r_{2i}}^{r_{2i+1}-1} \sum_{q=r_{2i}}^{r_{2i+1}-1} p^2 q^2 2^{p+q} A^2_{2^{p+1}-1,\, 2^{q+1}-1} = \infty \tag{35}$$

ist. Den anderen Fall können wir nämlich ähnlicherweise betrachten.

Wir definieren ein Funktionensystem $\psi^* = \{\psi^*_{kl}(x, y)\}_{k,l=1}^{\infty}$ folgenderweise.

Es sei $N_2 = \{(\alpha, \beta)\colon \alpha, \beta = 1, 2, \ldots\}$ und es sei N die Menge der geordneten Paare (α, β) von positiven ganzen Zahlen, für die

$$(\alpha, \beta) \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} (2^{2^{r_{2i}}}, 2^{2^{r_{2i+1}}}] \times (2^{2^{r_{2i}}}, 2^{2^{r_{2i+1}}}]$$

ist. Es seien weiterhin T_{uv} $((u, v) \in N)$ paarweise disjunkte Rechtecke in $(0, 2) \times \times (0, 2) \setminus E$. Wir setzen

$$\psi^*_{\alpha\beta}(x, y) = \bar{\psi}_{\alpha\beta}(x, y), \quad (x, y) \in (0, 2) \times (0, 2) \quad ((\alpha, \beta) \in N_2 \setminus N),$$

und

$$\psi^*_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} 1/\sqrt{\operatorname{mes} T_{uv}}, & (x, y) \in T_{uv}, \\ 0, & (x, y) \in (0, 2) \times (0, 2) \setminus T_{uv} \end{cases}$$

$((u, v) \in N)$.

Es ist klar, daß diese Funktionen Treppenfunktionen sind, und in $(0, 2) \times (0, 2)$ ein orthonormiertes System bilden.

Auf Grund von (26), (30) und (35) gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty} \operatorname{mes} G_{2i} = \infty.$$

Es sei $G = \varlimsup_{i \to \infty} G_{2i}$. Da die Mengen G_{2i} stochastisch unabhängig sind, durch Anwendung des Borel—Cantellischen Lemmas erhalten wir daraus für die Menge $G (\subseteq E)$

$$\operatorname{mes} G = 1. \tag{36}$$

Auf Grund der Definition der Mengen G_{2i}, bzw. der Funktionen $\psi^*_{\alpha\beta}(x, y)$ und von (32)—(34) ergibt sich folgendes. Für jedes $i (= 0, 1, \ldots)$ gibt es im Falle $(x, y) \in G_{2i}$ Indizes $m_i(x, y)$, $n_i(x, y)$ $(2^{r_{2i}} < m_i(x, y),\, n_i(x, y) < 2^{r_{2i+1}})$ derart, daß

$$\left| \sum_{\alpha=2^{2^{r_{2i}}}+1}^{2^{m_i(x,y)+1}} \sum_{\beta=2^{2^{r_{2i}}}+1}^{2^{n_i(x,y)+1}} \left(1 - (\alpha-1)/2^{m_i(x,y)+1}\right)\left(1 - (\beta-1)/2^{n_i(x,y)+1}\right) a_{\alpha\beta} \psi^*_{\alpha\beta}(x, y) \right| \geqq$$
$$\geqq c_{12}/s_{2i} \quad ((x, y) \in G_{2i}).$$

Für beliebiges $(x, y) \in G$, gilt diese Ungleichung für unendlich viele i, und so bekommen wir

(37)
$$\varlimsup_{i\to\infty} \max_{2^{2^{r}2i}<m,n\leqq 2^{2^{r}2i+1}} \left| \sum_{\alpha=2^{2^{r}2i}+1}^{m} \sum_{\beta=2^{2^{r}2i}+1}^{n} (1-(\alpha-1)/m)(1-(\beta-1)/n) a_{\alpha\beta}\psi^*_{\alpha\beta}(x,y)\right| = \infty$$
$$((x,y)\in G).$$

Wir werden noch die Funktionen $\psi^*_{\alpha\beta}(x,y)$ ein wenig verändern.

Auf Grund von (14) gilt

$$\sum_{i=0}^{\infty}\int_0^2\int_0^2 \Big(\sum_{\alpha=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} \sum_{\beta=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} a_{\alpha\beta}\psi^*_{\alpha\beta}(x,y)\Big)^2 dx\,dy = \sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} \sum_{\beta=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} a^2_{\alpha\beta}\Big) < \infty.$$

So konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Big(\sum_{\alpha=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} \sum_{\beta=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} a_{\alpha\beta}\psi^*_{\alpha\beta}(x,y)\Big)^2$$

in $(0,2)\times(0,2)$ fast überall. Daraus, durch Anwendung des wohlbekannten Satzes von A. N. Kolmogoroff und J. Khintchine ergibt sich, daß die Reihe

(38)
$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i(t)\Big(\sum_{\alpha=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} \sum_{\beta=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} a_{\alpha\beta}\psi^*_{\alpha\beta}(x,y)\Big)$$

bei fast jedem $(x,y)\in(0,2)\times(0,2)$ für fast jedes $t\in(0,1)$ konvergiert. Es sei H die Menge der Punkte (x,y,t) $((x,y)\in(0,2)\times(0,2);\ t\in(0,1))$, für welche die Reihe (38) konvergiert. Wir setzen

$$H_t = \{(x,y)\in(0,2)\times(0,2)\colon (x,y,t)\in H\} \quad (t\in(0,1)),$$
$$H_{xy} = \{t\in(0,1)\colon (x,y,t)\in H\} \quad ((x,y)\in(0,2)\times(0,2)).$$

Die charakteristische Funktion von H bezeichnen wir mit $\chi(x,y,t)$. Nach dem Obigen gilt

$$\int_0^2\int_0^2\Big(\int_0^1 \chi(x,y,t)\,dt\Big)dx\,dy = \int_0^2\int_0^2 (\operatorname{mes} H_{xy})\,dx\,dy = 1.$$

Nach dem Fubinischen Satz erhalten wir

$$\int_0^1 (\operatorname{mes} H_t)\,dt = \int_0^1\Big(\int_0^2\int_0^2 \chi(x,y,t)\,dx\,dy\Big)dt = \int_0^2\int_0^2\Big(\int_0^1 \chi(x,y,t)\,dt\Big)dx\,dy = 1,$$

woraus folgt, daß die Reihe (38) bei fast jedem $t\in(0,1)$ für fast jedes $(x,y)\in(0,2)\times\times(0,2)$ konvergiert. Es sei $t_0\in(0,1)$ ein Wert, für welchen die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i(t_0)\Big(\sum_{\alpha=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} \sum_{\beta=2^{2^{r}2i}+1}^{2^{2^{r}2i+1}} a_{\alpha\beta}\psi^*_{\alpha\beta}(x,y)\Big)$$

in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall konvergiert; man kann annehmen, daß t_0 nicht dyadisch ist.

Dann setzen wir in $(0, 2)\times(0, 2)$

$$\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x, y) = \begin{cases} r_i(t_0)\psi^*_{\alpha\beta}(x, y), & 2^{2^{r_{2i}}} < \alpha, \beta \leqq 2^{2^{r_{2i+1}}}; \quad i = 0, 1, \ldots, \\ \psi^*_{\alpha\beta}(x, y), & (\alpha, \beta)\in N. \end{cases}$$

Es ist klar, daß die Funktionen $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots)$ Treppenfunktionen sind und in $(0, 2)\times(0, 2)$ ein orthonormiertes System bilden, und nach (37)

(39)
$$\varlimsup_{i\to\infty} \max_{2^{2^{r_{2i}}}<m,n\leqq 2^{2^{r_{2i+1}}}} \left| \sum_{\alpha=2^{2^{r_{2i}}}+1}^{m} \sum_{\beta=2^{2^{r_{2i}}}+1}^{n} (1-(\alpha-1)/m)(1-(\beta-1)/n) a_{\alpha\beta}\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)\right| = \infty$$
$$((x, y)\in G)$$

gilt. Weiterhin, auf Grund der Definition der Funktionen $\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)$ konvergiert die Reihe

(40)
$$\sum_{i=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{\alpha=2^{2^{r_{2i}}}+1}^{2^{2^{r_{2i+1}}}} \sum_{\beta=2^{2^{r_{2i}}}+1}^{2^{2^{r_{2i+1}}}} a_{\alpha\beta}\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)\Bigr)$$

in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall.

Für die positiven ganzen Zahlen m, n mit $(m, n)\in N_2\setminus N$ sei $i(m, n)$ diejenige nichtnegative ganze Zahl, für die

$$2^{2^{r_{2i(m,n)}}} < m,\ n \leqq 2^{2^{r_{2i(m,n)+1}}}$$

gilt. Auf Grund der Definition der Funktionen $\tilde{\psi}_{kl}(x, y)$ ist

(41)
$$\sigma_{mn}(a, \tilde{\psi};\ x, y) = \sum_{\alpha=2^{2^{r_{2i(m,n)}}}+1}^{m} \sum_{\beta=2^{2^{r_{2i(m,n)}}}+1}^{n} (1-(\alpha-1)/m)(1-(\beta-1)/n) a_{\alpha\beta}\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x, y) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{i(m,n)-1} \Bigl(\sum_{\alpha=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}} \sum_{\beta=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}} (1-(\alpha-1)/m)(1-(\beta-1)/n) a_{\alpha\beta}\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x, y)\Bigr) \quad ((x, y)\in E)$$

im Falle $(m, n)\in N_2\setminus N$. Es sei

(42)
$$R(m, n;\ x, y) = \sum_{j=0}^{i(m,n)-1} \sum_{\alpha=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}} \sum_{\beta=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}} (1-(\alpha-1)/m)(1-(\beta-1)/n) a_{\alpha\beta}\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x, y).$$

Wir werden zeigen, daß

(43)
$$\Bigl\{ \lim_{\substack{\min(m,n)\to\infty \\ (m,n)\in N_2\setminus N}} R(m, n;\ x, y) \Bigr\}$$

in $(0,2)\times(0,2)$ fast überall existiert. Wir setzen für $j(=0,1,\ldots)$

$$s_{kl}(j;\ x,y)=\sum_{\alpha=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{k}\ \sum_{\beta=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{l} a_{\alpha\beta}\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x,y)\quad (2^{2^{r_{2j}}}<k,\ l\leqq 2^{2^{r_{2j+1}}}).$$

Durch Abelsche Umformung bekommen wir

$$\sum_{\alpha=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}}\ \sum_{\beta=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}}\big(1-(\alpha-1)/m\big)\big(1-(\beta-1)/n\big)a_{\alpha\beta}\tilde{\psi}_{\alpha\beta}(x,y)= \tag{44}$$

$$=\frac{1}{mn}\sum_{k=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}-1}\ \sum_{l=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}-1} s_{kl}(j;\ x,y)+\frac{1}{m}\sum_{k=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}-1} s_{k,2^{2^{r_{2j+1}}}}(j;\ x,y)+$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{l=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}-1} s_{2^{2^{r_{2j+1}}},l}(j;\ x,y)+$$

$$+\big(1-(2^{2^{r_{2j+1}}}-1)/m\big)\big(1-(2^{2^{r_{2j+1}}}-1)/n\big)s_{2^{2^{r_{2j+1}}},2^{2^{r_{2j+1}}}}(j;\ x,y).$$

Wir setzen

$$R^{(1)}(m,n,j;\ x,y)=\frac{1}{mn}\sum_{k=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}-1}\ \sum_{l=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}-1} s_{kl}(j;\ x,y)+$$

$$+\frac{1}{m}\sum_{k=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}-1} s_{k,2^{2^{r_{2j+1}}}}(j;\ x,y)+\frac{1}{n}\sum_{l=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}-1} s_{2^{2^{r_{2j+1}}},l}(j;\ x,y),$$

$$R^{(2)}(m,n,j;\ x,y)=\big(1-(2^{2^{r_{2j+1}}}-1)/m\big)\big(1-(2^{2^{r_{2j+1}}}-1)/n\big)s_{2^{2^{r_{2j+1}}},2^{2^{r_{2j+1}}}}(j;\ x,y).$$

Daraus und aus (42), (44) ergibt sich

$$R(m,n;\ x,y)=\sum_{j=0}^{i(m,n)-1}R^{(1)}(m,n,j;\ x,y)+\sum_{j=0}^{i(m,n)-1}R^{(2)}(m,n,j;\ x,y) \tag{45}$$

im Falle $(m,n)\in N_2\setminus N$. Es sei

$$\delta_j(x,y)=\max_{2^{2^{r_{2j}}}<k,\,l\leqq 2^{2^{r_{2j+1}}}}|s_{kl}(j;\ x,y)|\quad (j=0,1,\ldots).$$

Auf Grund der Definition von $R^{(1)}(m,n,j;x,y)$ ergibt sich

$$\Big|\sum_{j=0}^{i-1}R^{(1)}(m,n,j,x,y)\Big|\leqq\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{(2^{2^{r_{2j+1}}})^2}{mn}+\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}}{m}+\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}}{n}\right)\delta_j(x,y)\quad (i=1,2,\ldots).$$

Daraus folgt für jedes $i(=1, 2, \ldots)$

$$\tilde{\delta}_i(x, y) = \max_{2^{2^{r_{2i}}}<m,n\leq 2^{2^{r_{2i+1}}}} \left|\sum_{j=0}^{i-1} R^{(1)}(m, n, j;\ x, y)\right| \leq$$

(46)

$$\leq \sum_{j=0}^{i-1}\left[\left(\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}}{2^{2^{r_{2i}}}}\right)^2+2\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}}{2^{2^{r_{2i}}}}\right]\delta_j(x, y) \leq c_{13}\frac{1}{2^{2^{r_{2i-1}}}}(\delta_0(x, y)+\ldots+\delta_{i-1}(x, y)).$$

Nach dem Hilfssatz II gilt

$$\int_0^2\int_0^2 \delta_j^2(x, y)\,dx\,dy \leq c_2 2^{4r_{2j+1}} \sum_{\alpha=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}} \sum_{\beta=2^{2^{r_{2j}}}+1}^{2^{2^{r_{2j+1}}}} a_{\alpha\beta}^2 \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{47}$$

Auf Grund von (14) und (46) erhalten wir daraus

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^2\int_0^2 \tilde{\delta}_i^2(x, y)\,dx\,dy \leq c_{14}\sum_{i=1}^{\infty} i\frac{2^{4r_{2i-1}}}{2^{2^{r_{2i-1}}}} < \infty.$$

Folglich ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{\delta}_i^2(x, y)$$

in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall konvergent, und so gilt

$$\lim_{i\to\infty}\max_{2^{2^{r_{2i}}}<m,n\leq 2^{2^{r_{2i+1}}}}\left|\sum_{j=0}^{i-1} R^{(1)}(m, n, j;\ x, y)\right| = 0 \tag{48}$$

in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall.

Auf Grund der Definition von $R^{(2)}(m,n,j;x,y)$ gilt für jedes $i(=1, 2, \ldots)$

$$\sum_{j=0}^{i-1} R^{(2)}(m, n, j;\ x, y) = \sum_{j=0}^{i-1} s_{2^{2^{r_{2j+1}}},2^{2^{r_{2j+1}}}}(j;\ x, y)+$$

$$+\sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{(2^{2^{r_{2j+1}}}-1)^2}{mn}-\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}-1}{m}-\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}-1}{n}\right)s_{2^{2^{r_{2j+1}}},2^{2^{r_{2j+1}}}}(j;\ x, y).$$

Wir setzen

$$F(i;\ x, y) = \sum_{j=0}^{i-1} s_{2^{2^{r_{2j+1}}},2^{2^{r_{2j+1}}}}(j;\ x, y),$$

$$G(m, n, i;\ x, y) =$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1}\left(\frac{(2^{2^{r_{2j+1}}}-1)^2}{mn}-\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}-1}{m}-\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}-1}{n}\right)s_{2^{2^{r_{2j+1}}},2^{2^{r_{2j+1}}}}(j;\ x, y).$$

Dann ist für jedes $i(=1, 2, \ldots)$

(49) $$\sum_{j=0}^{i-1} R^{(2)}(m, n, j;\ x, y) = F(i;\ x, y) + G(m, n, i;\ x, y).$$

Da die Reihe (40) in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall konvergiert, auf Grund der Definition von $F(i;\ x, y)$ erhalten wir, daß

(50) $$\lim_{i\to\infty} F(i;\ x, y)$$

in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall existiert. Andererseits, auf Grund der Definition von $G(m, n, i;\ x, y)$ ergibt sich für jedes $i(=1, 2, \ldots)$

$$\bar{\bar{\delta}}_i(x, y) = \max_{2^{2^{r_{2i}}}<m, n\leq 2^{2^{r_{2i+1}}}} |G(m, n, i;\ x, y)| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{i-1} \left\{\left(\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}}{2^{2^{r_{2i+1}}}}\right)^2 + 2\frac{2^{2^{r_{2j+1}}}}{2^{2^{r_{2i+1}}}}\right\} \delta_j(x, y) \leq \frac{1}{2^{2^{r_{2i-1}}}} (\delta_0(x, y) + \ldots + \delta_{i-1}(x, y)).$$

Daraus und aus (47) folgt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^2 \int_0^2 \bar{\bar{\delta}}_i^2(x, y)\, dx\, dy \leq c_{15} \sum_{i=1}^{\infty} i \frac{2^{4r_{2i-1}}}{2^{2^{r_{2i}}}} < \infty,$$

auf Grund von (14). Daraus ergibt sich, daß die Folge

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{\bar{\delta}}_i^2(x, y)$$

in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall konvergiert, und so gilt

(51) $$\lim_{i\to\infty} \max_{2^{2^{r_{2i}}}<m, n\leq 2^{2^{r_{2i+1}}}} |G(m, n, i;\ x, y)| = 0$$

in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall.

Da nach (45) und (49) im Falle $(m, n)\in N_2\setminus N$

$$R(m, n;\ x, y) = \sum_{j=0}^{i(m,n)-1} R^{(1)}(m, n, j;\ x, y) + F(i(m, n);\ x, y) + G(m, n, i(m, n);\ x, y)$$

gilt, aus (48), (50) und (51) folgt, daß der Limes (43) in $(0, 2)\times(0, 2)$ fast überall existiert. Daraus, und aus (39), (41) ergibt sich, daß

$$\overline{\lim_{\min(m,n)\to\infty}} |\sigma_{mn}(a, \tilde{\psi};\ x, y)| = \infty$$

im Falle $(x, y)\in G$ besteht. Wegen (36) besteht diese Relation in E fast überall.

Wir setzen endlich

$$\psi_{kl}(x, y) = 2\tilde{\psi}_{kl}(2x, 2y) \quad ((x, y)\in E;\ k, l = 1, 2, \ldots).$$

Dieses System $\psi = \{\psi_{kl}(x, y)\}_{k,l=1}^{\infty}$ befriedigt also alle Erforderungen des Satzes I'.

Damit haben wir Satz I' bewiesen.

4. Beweis des Satzes II. Zum Beweis des Satzes können wir ohne Beschränkung der Allgemenheit $\lambda_0, \mu_0 \geqq 1$ voraussetzen.

1. Beweis des Falles 1. Durch vollständige Induktion können wir eine Folge $(2=)M_1 < \ldots < M_r < \ldots$ von ganzen Zahlen angeben, für die

$$c_5 (\log M_{r+1})/(r+1)\lambda_{2^{2M_{r+1}^2}+1}\mu_{2^{r+2}} \geqq \max\left(r+1, 33c_4 \sum_{\varrho=1}^{r} 2M_\varrho^2\right) \quad (r=1,2,\ldots) \tag{52}$$

gilt.

Die Koeffizientenfolge a definieren wir folgenderweise. Es sei

$$a_{kl} = \begin{cases} 1/rM_r\lambda_{2^{2M_r^2}+1}\mu_{2^r+1}, & l = 2^r+1, \ k = 2^1+1, \ldots, 2^{2M_r^2}+1, \quad r = 1, 2, \ldots, \\ -1/rM_r\lambda_{2^{2M_r^2}+1}\mu_{2^r+1}, & l = 2^{r+1}-1, \ k = 2^2-1, \ldots, 2^{2^{2M_r^2}+1}-1, \quad r = 1, 2, \ldots, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Es ist klar, daß

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}^2\lambda_k^2\mu_l^2 =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{2M_r^2} a_{2^s+1,2^r+1}^2\lambda_{2^s+1}^2\mu_{2^r+1}^2 + \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{2M_r^2} a_{2^{s+1}-1,2^{r+1}-1}\lambda_{2^{s+1}-1}^2\mu_{2^{r+1}-1} \leqq$$

$$\leqq 2\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_{2^{2M_r^2}+1}^2\mu_{2^r+1}^2 2M_r^2/r^2M_r^2\lambda_{2^{2M_r^2}+1}^2\mu_{2^r+1}^2 = 4\sum_{r=1}^{\infty} 1/r^2 < \infty$$

gilt, also besteht (5).

Jetzt werden wir das entsprechende Funktionensystem Φ definieren.

Für jede positive ganze Zahl r wenden wir den Hilfssatz III im Falle $p = M_r$ an. Die so erhaltene Menge, bzw. das so erhaltene Funktionensystem bezeichnen wir mit $F(r)$, bzw. mit $\{g_l(r; x)\}_{l=1}^{2M_r^2}$ $(r=1, 2, \ldots)$. Auf Grund des Hilfssatzes III gelten die folgenden Behauptungen für jedes $r = 1, 2, \ldots$.

$F(r)(\subseteqq (0, 1))$ ist einfach, und gilt

$$\text{mes } F(r) \geqq c_3. \tag{53}$$

Die Funktionen $g_l(r; x)$ sind Treppenfunktionen und bilden in $(0, 1)$ ein beschränktes System:

$$|g_l(r; x)| \leqq c_4 \quad (x \in (0, 1); \ l = 1, \ldots, 2M_r^2). \tag{54}$$

Weiterhin, für jedes $x \in F(r)$ gibt es einen Index $m(r; x)$ mit

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && M_r^2 \leqq m(r; x) < 2M_r^2, \\ (55)\quad &\text{(ii)} && g_l(r; x) \geqq 0 \quad (x \in F(r); \ r = 1, \ldots, m(r; x)), \\ &\text{(iii)} && \sum_{l=1}^{m(r;x)} g_l(r; x) \geqq c_5 M_r \log M_r \quad (x \in E(r)). \end{aligned}$$

Es sei I_{kl} $(k, l=1, 2, \ldots)$ eine Einteilung des Intervalls $(1, 2)$ in paarweise disjunkte Intervalle.

Wir definieren Treppenfunktionen

$$\varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x), \quad \varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}(x) \quad (s=1, \ldots, 2M_r^2;\ r=1, 2, \ldots)$$

und Mengen $H_1, H_2, \ldots$ mit den folgenden Eigenschaften:

Die Mengen $H_r (\subseteqq (0, 1))$ sind einfach und stochastisch unabhängig, weiterhin für jedes r gilt

(56) $$\operatorname{mes} H_r \geqq c_3.$$

Die Funktionen bilden ein orthonormiertes System in $(0, 2)$, weiterhin für jedes r besteht

(57) $$|\varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x)|, \ |\varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}(x)| \leqq c_4/\sqrt{2} \quad (x\in(0, 1);\ s=1, \ldots, 2M_r^2)$$

und für jedes $x \in H_r$ gibt es einen Index $m(r; x)$ mit

(58)
$$\text{(i)} \qquad M_r^2 \leqq m(r;\ x) < 2M_r^2,$$
$$\text{(ii)} \qquad \varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x) \geqq 0 \quad (x\in H_r;\ s=1, \ldots, m(r;\ x)),$$
$$\text{(iii)} \qquad \sum_{s=1}^{m(r;x)} \varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x) \geqq (c_5/\sqrt{2}) M_r \log M_r \quad (x\in H_r).$$

Weiterhin, für jedes r gelten

(59) $$\varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x) \equiv \varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}(x) \quad (x\in(0, 1);\ s=1, \ldots, 2M_r^2),$$

(60) $$\varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x) \equiv \varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}(x) \equiv 0 \ \ (x\in(1, 2)\setminus(I_{2^s+1, 2^r+1} \cup I_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}))$$
$$(s=1, \ldots, 2M_r^2).$$

Wir setzen nämlich

$$\varphi_{2^s+1, 2^1+1}(x) = \begin{cases} g_s(1;\ x)/\sqrt{2}, & x\in(0, 1), \\ 1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^s+1, 2^1+1}}, & x\in I_{2^s+1, 2^1+1}, \\ 1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^{s+1}-1, 2^2-1}}, & x\in I_{2^{s+1}-1, 2^2-1}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\varphi_{2^{s+1}-1, 2^2-1}(x) = \begin{cases} g_s(1;\ x)/\sqrt{2}, & x\in(0, 1), \\ -1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^s+1, 2^1+1}}, & x\in I_{2^s+1, 2^1+1}, \\ -1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^{s+1}-1, 2^2-1}}, & x\in I_{2^{s+1}, 2^2-1}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$(s=1, \ldots, 2M_1^2)$, und $H_1 = F(1)$.

Auf Grund der Eigenschaften von $F(1)$ und $g_s(1; x)$ ist $H_1(\subseteqq(0,1))$ einfach, die Funktionen $\varphi_{2^s+1,2^1+1}(x)$, $\varphi_{2^{s+1}-1,2^2-1}(x)$ $(s=1, \dots, 2M_1^2)$ sind Treppenfunktionen, und sie bilden ein orthonormiertes System in $(0, 1)$. Weiterhin, wegen der Definition dieser Menge, bzw. dieser Funktionen, aus (53)—(55) folgt, daß (56)—(60) im Falle $r=1$ erfüllt sind.

Es sei r_0 eine positive ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die einfachen und stochastisch unabhängigen Mengen $H_r(\subseteqq(0,1))$ $(r=1, \dots, r_0)$, und in $(0, 2)$ orthonormierte Treppenfunktionen

$$\varphi_{2^s+1,2^r+1}(x),\ \varphi_{2^{s+1}-1,2^{r+1}-1}(x) \quad (s=1, \dots, 2M_r^2;\ r=1, \dots, r_0)$$

schon derart definiert sind, daß (56)—(60) für $r=1, \dots, r_0$ erfüllt sind. Dann gibt es eine Einteilung des Intervalls $(0, 1)$ in paarweise disjunkte Intervalle I_p $(p=1, \dots, P)$ derart, daß jede Funktion

$$\varphi_{2^s+1,2^r+1}(x),\ \varphi_{2^{s+1}-1,2^{r+1}-1}(x) \quad (s=1, \dots, 2M_r^2;\ r=1, \dots, r_0)$$

in jedem I_p $(p=1, \dots, P)$ konstant ist, und jede Menge H_r $(r=1, \dots, r_0)$ die Vereinigung gewisser I_p ist. Die zwei Hälften von I_p bezeichnen wir mit I_p' und I_p'' $(p=1, \dots, P)$.

Dann setzen wir

$$\varphi_{2^s+1,2^{r_0+1}+1}(x) = \begin{cases} (1/\sqrt{2})\left(\sum_{p=1}^{P} g_s(r_0+1;\ I_p';\ x) - \sum_{p=1}^{P} g_s(r_0+1;\ I_p'';\ x)\right), & x\in(0,1), \\ 1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^s+1,2^{r_0+1}+1}}, & x\in I_{2^s+1,2^{r_0+1}+1}, \\ 1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^{s+1}-1,2^{r_0+2}-1}}, & x\in I_{2^{s+1}-1,2^{r_0+2}-1}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\varphi_{2^{s+1}-1,2^{r_0+2}-1}(x) = \begin{cases} (1/\sqrt{2})\left(\sum_{p=1}^{P} g_s(r_0+1;\ I_p';\ x) - \sum_{p=1}^{P} g_s(r_0+1;\ I_p'';\ x)\right), & x\in(0,1), \\ -1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^s+1,2^{r_0+1}+1}}, & x\in I_{2^s+1,2^{r_0+1}+1}, \\ -1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^{s+1}-1,2^{r_0+2}-1}}, & x\in I_{2^{s+1}-1,2^{r_0+2}-1}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$(s=1, \dots, 2M_{r_0+1}^2)$, und

$$H_{r_0+1} = \bigcup_{p=1}^{P} \left(F(r_0+1;\ I_p') \cup F(r_0+1;\ I_p'')\right).$$

Es ist klar, daß die Menge $H_{r_0+1}(\subseteqq(0,1))$ einfach ist, die Funktionen Treppenfunktionen sind, die Mengen $H_1, \dots, H_{r_0+1}$ stochastisch unabhängig sind, die Funktionen $\varphi_{2^s+1,2^r+1}(x)$, $\varphi_{2^{s+1}-1,2^{r+1}-1}(x)$ $(s=1, \dots, 2M_r^2;\ r=1, \dots, r_0+1)$ in $(0, 1)$ ein orthonormiertes System bilden, und daß, weiterhin, auf Grund der

Definition von H_{r_0+1}, bzw. von den Funktionen $\varphi_{2^s+1, 2^{r_0+1}+1}(x), \varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r_0+2}-1}(x)$ $(s=1, \ldots, 2M_{r_0+1}^2)$, wegen (53)—(55), die Bedingungen (56)—(60) im Falle $r=r_0+1$ auch erfüllt sind.

Die Mengenfolge $\{H_r\}_{r=1}^{\infty}$ und die Funktionen $\varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x)$, $\varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}(x)$ $(s=1, \ldots, 2M_r^2;\ r=1, 2, \ldots)$ mit den erforderten Eigenschaften erhalten wir also durch Induktion.

Endlich sei

$$\varphi_{kl}(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{\operatorname{mes} I_{kl}}, & x \in I_{kl}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

im Falle $(k, l) \neq (2^s+1, 2^r+1)$, $(2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1)$ $(s=1, \ldots, 2M_r^2;\ r=1, 2, \ldots)$. Es ist klar, daß das System $\varphi = \{\varphi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$ orthonormiert in $(0, 2)$ ist.

Wegen der Definition der Folge a und wegen (59) gilt

$$s_{2^m, 2^n}(a, \varphi;\ x) \equiv 0 \quad (x \in (0, 1);\ m, n = 0, 1, \ldots).$$

Weiterhin, wegen der Definition der Funktionen $\varphi_{kl}(x)$ für jedes $x \in (1, 2)$ gibt es eine Zahl $m(x)$ derart, daß im Falle $m, n \geqq m(x)$

$$s_{2^m, 2^n}(a, \varphi;\ x) =$$

$$= \begin{cases} a_{kl}\varphi_{kl}(x), & x \in I_{kl}, \\ & (k, l) \neq (2^s+1, 2^r+1),\ (2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1), \\ & s = 1, \ldots, 2M_r^2;\ r = 1, 2, \ldots, \\ a_{2^s+1, 2^r+1}\varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x) + a_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}\varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}(x), & \\ & x \in I_{2^s+1, 2^r+1} \cup I_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}, \\ & s = 1, \ldots, 2M_r^2;\ r = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ist. So folgt, daß $\lim\limits_{\min(m,n)\to\infty} s_{2^m, 2^n}(a, \varphi; x)$ in $(0, 2)$ überall existiert.

Es sei nun r_0 eine positive ganze Zahl, und $x \in H_{r_0+1}$. Es sei $m(x) = m(r_0+1; x)$ derjenige Index, für welchen (58) im Falle $r = r_0+1$ gilt. Dann folgt, daß auf Grund von (52), (57)—(59)

$$|\sigma_{2^{m(x)+1}, 2^{r_0+2}}(a, \varphi;\ x)| \geqq \tag{61}$$

$$\geqq \Bigg| \sum_{s=1}^{m(x)} \left(1 - \frac{2^s}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1 - \frac{2^{r_0+1}}{2^{r_0+2}}\right) a_{2^s+1, 2^{r_0+1}+1}\varphi_{2^s+1, 2^{r_0+1}+1}(x) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m(x)} \left(1 - \frac{2^{s+1}-2}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1 - \frac{2^{r_0+2}-2}{2^{r_0+2}}\right) a_{2^{s+1}-1, 2^{r_0+2}-1}\varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r_0+2}-1}(x) \Bigg| -$$

$$- \Bigg| \sum_{r=1}^{r_0} \sum_{s=1}^{m(x)} \left(1 - \frac{2^s}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1 - \frac{2^r}{2^{r_0+2}}\right) a_{2^s+1, 2^r+1}\varphi_{2^s+1, 2^r+1}(x) -$$

$$- \sum_{r=1}^{r_0} \sum_{s=1}^{m(x)} \left(1 - \frac{2^{s+1}-2}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1 - \frac{2^{r+1}-2}{2^{r_0+2}}\right) a_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}\varphi_{2^{s+1}-1, 2^{r+1}-1}(x) \Bigg| \geqq$$

$$\geqq \left|\sum_{s=1}^{m(x)}\left(\left(1-\frac{2^s}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1-\frac{2^{r_0+1}}{2^{r_0+2}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(1-\frac{2^{s+1}-2}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1-\frac{2^{r_0+2}-2}{2^{r_0+2}}\right)\right) a_{2^s+1,\, 2^{r_0+1}+1}\varphi_{2^s+1,\, 2^{r_0+1}+1}(x)\right|-2\frac{1}{\sqrt{2}}\,c_4\sum_{r=1}^{r_0} 2M_r^2 \geqq$$

$$\geqq \left|\sum_{s=1}^{m(x)-1}\left(\left(1-\frac{2^s}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1-\frac{2^{r_0+1}}{2^{r_0+2}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{2^{s+1}-2}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1-\frac{2^{r_0+2}-2}{2^{r_0+2}}\right)\right) a_{2^s+1,\, 2^{r_0+1}+1}\varphi_{2^s+1,\, 2^{r_0+1}+1}(x)+$$

$$\left.+a_{2^{m(x)}+1;\, 2^{r_0+1}+1}\varphi_{2^{m(x)}+1,\, 2^{r_0+1}+1}(x)\right|-\left|\left(\left(1-\frac{2^{m(x)}}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1-\frac{2^{r_0+1}}{2^{r_0+2}}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\left(1-\frac{2^{m(x)+1}-2}{2^{m(x)+1}}\right)\left(1-\frac{2^{r_0+2}-2}{2^{r_0+2}}\right)\right) a_{2^{m(x)}+1,\, 2^{r_0+1}+1}\varphi_{2^{m(x)}+1,\, 2^{r_0+1}+1}(x)\right|-$$

$$-\left|a_{2^{m(x)}+1,\, 2^{r_0+1}+1}\varphi_{2^{m(x)}+1,\, 2^{r_0+1}+1}(x)\right|-\sqrt{2}\,c_4\sum_{r=1}^{r_0} 2M_r^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{c_5}{8\sqrt{2}}\,M_{r_0+1}\log M_{r_0+1}\frac{1}{(r_0+1)M_{r_0+1}\lambda_{2^{2M_{r_0+1}^2+1}}\mu_{2^{r_0+2}}}-\sqrt{2}\,c_4-\sqrt{2}\,c_4\sum_{r=1}^{r_0} 2M_r^2 \geqq$$

$$\geqq \frac{c_5}{8\sqrt{2}}\frac{\log M_{r_0+1}}{(r_0+1)\lambda_{2^{2M_{r_0+1}^2+1}}\mu_{2^{r_0+2}}}-2\sqrt{2}\,c_4\sum_{r=1}^{r_0} 2M_r^2 \geqq$$

$$\geqq (1/8\sqrt{2})\left(\max\left(r_0+1, 33c_4\sum_{r=1}^{r_0} 2M_r^2\right)-32c_4\sum_{r=1}^{r_0} 2M_r^2\right) \geqq (1/8\sqrt{2})(r_0+1),$$

wegen $|a_{kl}|\leqq 1$.

Es sei nun $H=\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} H_r$. Da die Mengen H_r stochastisch unabhängig sind, und (56) für jedes r gilt, ergibt sich durch Anwendung des Borel—Cantellischen Lemmas:

$$\text{mes}\, H = 1.$$

Im Falle $x\in H$ gilt aber (61) für unendlich viele r mit $m(x)=m(r;\, x)$ $(\geqq M_r^2)$. So erhalten wir

$$\overline{\lim_{\min(m,n)\to\infty}}\ |\sigma_{2^m,\, 2^n}(a,\, \varphi;\ x)| = \infty$$

fast überall in $(0, 1)$.

Es sei

$$\Phi_{kl}(x) = \sqrt{2}\,\varphi_{kl}(2x) \quad (x\in(0,\, 1);\ k,\, l = 1, 2, \ldots).$$

Für das System $\Phi=\{\Phi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$ und für die Folge a sind aber alle Erforderungen des Falles 1 erfüllt.

2. Beweis des Falles 2. Durch vollständige Induktion werden wir zwei Folgen $(2\leqq)M_1<\ldots<M_r<\ldots$, $(1=)N_1<\ldots<N_r<\ldots$ von positiven ganzen Zahlen angeben, für die die Ungleichungen

$$r+1>(\log M_r)/r\lambda_{2^{2M_r^2}}\mu_{2^{N_r+1}}\geqq r, \tag{62}$$

$$(1/2^{N_r})\sum_{\varrho=1}^{r-1}M_\varrho^2\leqq 1/r \tag{63}$$

bei jedem $r=1,2,\ldots$ erfüllt sind.

Wir setzen nämlich $N_1=1$. Dann sei M_1 gleich der kleinsten ganzen Zahl $k(\geqq 2)$, für die

$$2>(\log k)/\lambda_{2^{2k^2}}\mu_{2+1}\geqq 1$$

gilt. Dann sind (62), (63) im Falle $r=1$ erfüllt.

Es sei r_0 eine positive ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die ganzen Zahlen $(2\leqq)M_1<\ldots<M_{r_0}$, $(1=)N_1<\ldots<N_{r_0}$ schon derart definiert sind, daß (62), (63) im Falle $r=1,\ldots,r_0$ erfüllt sind. Dann sei N_{r_0+1} gleich der kleinsten ganzen Zahl $l(>N_{r_0})$, für die

$$(1/2^l)\sum_{\varrho=1}^{r_0}M_\varrho^2\leqq 1/(r_0+1)$$

ist. Weiterhin sei M_{r_0+1} gleich der kleinsten ganzen Zahl $k(>M_{r_0})$, für die

$$r_0+2>(\log k)/(r_0+1)\lambda_{2^{2k^2}}\mu_{2^{N_{r_0+1}}+1}\geqq r_0+1$$

ist. Für die ganzen Zahlen $(2=)M_1<\ldots<M_{r_0+1}$, $(1=)N_1<\ldots<N_{r_0+1}$ bestehen also (62), (63) auch im Falle $r=1,\ldots,r_0+1$. Die Zahlenfolgen $\{M_r\}_{r=1}^\infty$, $\{N_r\}_{r=1}^\infty$ mit den erforderten Eigenschaften erhalten wir durch Induktion.

Wir definieren die Koeffizientenfolge b folgenderweise. Es sei

$$b_{kl}=\begin{cases}1/rM_r\lambda_{2^{2M_r^2}}\mu_{2^{N_r}+1}, & l=2^{N_r};\ k=2^1,\ldots,2^{2M_r^2};\ r=1,2,\ldots,\\ -1/rM_r\lambda_{2^{2M_r^2}}\mu_{2^{N_r}+1}, & l=2^{N_r}+1;\ k=2^1,\ldots,2^{2M_r^2};\ r=1,2,\ldots,\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Es ist klar, daß

$$\sum_{k=1}^\infty\sum_{l=1}^\infty b_{kl}^2\lambda_k^2\mu_l^2=\sum_{r=1}^\infty\sum_{s=1}^{2M_r^2}b_{2^s,2^{N_r}}^2\lambda_{2^s}^2\mu_{2^{N_r}}^2+\sum_{r=1}^\infty\sum_{s=1}^{2M_r^2}b_{2^s,2^{N_r}+1}^2\lambda_{2^s}^2\mu_{2^{N_r}+1}^2\leqq$$

$$\leqq 2\sum_{r=1}^\infty\lambda_{2^{2M_r^2}}^2\mu_{2^{N_r}+1}^2 2M_r^2(1/r^2M_r^2\lambda_{2^{2M_r^2}}^2\mu_{2^{N_r}+1}^2)=4\sum_{r=1}^\infty 1/r^2<\infty$$

gilt, also besteht (6).

Wir definieren das in $(0,2)$ orthonormierte System von Treppenfunktionen

$$\psi_{2^s,2^{N_r}}(x),\ \psi_{2^s,2^{N_r}+1}(x)\quad(s=1,\ldots,2M_r^2;\ r=1,2,\ldots)$$

und die Folge von einfachen und stochastisch unabhängigen Mengen $G_r(\subseteqq(0, 1))$ $(r=1, 2, \ldots)$ mit folgenden Eigenschaften.

Für jedes r gilt

$$\text{mes}\, G_r \geqq c_3, \tag{64}$$

und

$$|\psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)|,\ |\psi_{2^s, 2^{N_r+1}}(x)| \leqq c_4/\sqrt{2} \quad (x\in(0, 1);\ s = 1, \ldots, 2M_r^2). \tag{65}$$

Für jedes $x\in G_r$ gibt es einen Index $m(r; x)$ mit

$$\begin{aligned} &\text{(i)} && M_r^2 \leqq m(r;\ x) < 2M_r^2, \\ &\text{(ii)} && \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x) \geqq 0 \quad (x\in G_r;\ s = 1, \ldots, m(r; x)), \\ &\text{(iii)} && \sum_{s=1}^{m(r;x)} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x) \geqq \left(c_5/\sqrt{2}\right) M_r \log M_r \quad (x\in G_r). \end{aligned} \tag{66}$$

Weiterhin besteht für jedes r

$$\psi_{2^s, 2^{N_r}}(x) \equiv \psi_{2^s, 2^{N_r+1}}(x) \quad (x\in(0, 1);\ s = 1, \ldots, 2M_r^2), \tag{67}$$

$$\psi_{2^s, 2^{N_r}}(x) \equiv \psi_{2^s, 2^{N_r+1}}(x) \equiv 0 \quad (x\in(1, 2)\setminus(I_{2^s, 2^{N_r}} \cup I_{2^s, 2^{N_r+1}})) \tag{68}$$

$$(s = 1, \ldots, 2M_r^2).$$

Wir setzen

$$\psi_{2^s, 2^{N_1}}(x) = \begin{cases} g_s(1;\ x)/\sqrt{2}, & x\in(0, 1), \\ 1/2\sqrt{\text{mes}\, I_{2^s, 2^{N_1}}}, & x\in I_{2^s, 2^{N_1}}, \\ 1/2\sqrt{\text{mes}\, I_{2^s, 2^{N_1+1}}}, & x\in I_{2^s, 2^{N_1+1}}, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\psi_{2^s, 2^{N_1+1}}(x) = \begin{cases} g_s(1;\ x)/\sqrt{2}, & x\in(0, 1), \\ -1/2\sqrt{\text{mes}\, I_{2^s, 2^{N_1}}}, & x\in I_{2^s, 2^{N_1}}, \\ -1/2\sqrt{\text{mes}\, I_{2^s, 2^{N_1+1}}}, & x\in I_{2^s, 2^{N_1+1}}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$(s = 1, \ldots, 2M_1^2)$, und $G_1 = F(1)$.

Auf Grund der Eigenschaften von $F(1)$ und $g_s(1; x)$ ist $G_1(\subseteqq(0, 1))$ einfach, diese Funktionen sind Treppenfunktionen, und sie bilden ein orthonormiertes System in $(0, 2)$. Weiterhin, auf Grund der Definition von G_1, bzw. von diesen Funktionen, wegen (53)—(55) sind (64)—(68) im Falle $r=1$ erfüllt.

Es sei r_0 eine positive ganze Zahl. Wir nehmen an, daß die einfachen und stochastisch unabhängigen Mengen $G_r(\subseteqq(0, 1))$ $(r=1, \ldots, r_0)$ und die orthonormierten Treppenfunktionen $\psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)$, $\psi_{2^s, 2^{N_r+1}}(x)$ $(s=1, \ldots, 2M_r^2;\ r=1, \ldots, r_0)$ in $(0, 2)$ schon derart definiert sind, daß (64)—(68) im Falle $r=1, \ldots, r_0$ erfüllt werden.

Dann gibt es eine Einteilung des Intervalls $(0, 1)$ in paarweise disjunkte Intervalle J_q $(q=1, \ldots, Q)$ derart, daß jede Funktion

$$\psi_{2^s, 2^{N_r}}(x), \psi_{2^s, 2^{N_r}+1}(x) \quad (s=1, \ldots, 2M_r^2; r=1, \ldots, r_0)$$

in jedem Intervall J_q $(q=1, \ldots, Q)$ konstant ist, und jede Menge G_r $(r=1, \ldots, r_0)$ die Vereinigung von gewissen J_q ist. Die zwei Hälfte von J_q bezeichnen wir mit J_q', bzw. mit J_q'' $(q=1, \ldots, Q)$.

Dann setzen wir

$$\psi_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}}(x) =$$

$$= \begin{cases} (1/\sqrt{2})\left(\sum_{q=1}^{Q} g_s(r_0+1;\ J_q';\ x) - \sum_{q=1}^{Q} g_s(r_0+1;\ J_q'';\ x)\right), & x \in (0, 1), \\ 1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}}}, & x \in I_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}}, \\ 1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}+1}}, & x \in I_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}+1}; \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

und

$$\psi_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}+1}(x) =$$

$$= \begin{cases} (1/\sqrt{2})\left(\sum_{q=1}^{Q} g_s(r_0+1;\ J_q';\ x) - \sum_{q=1}^{Q} g_s(r_0+1;\ J_q'';\ x)\right), & x \in (0, 1), \\ -1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}}}, & x \in I_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}}; \\ -1/2\sqrt{\operatorname{mes} I_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}+1}}, & x \in I_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}+1}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$(s = 1, \ldots, 2M_{r_0+1}^2)$, und

$$G_{r_0+1} = \bigcup_{q=1}^{Q} \left(F(r_0+1;\ J_q') \cup F(r_0+1;\ J_q'')\right).$$

Es ist klar, daß die Menge $G_{r_0+1}(\subseteq (0, 1))$ einfach ist, die Mengen G_r $(r=1, \ldots, r_0+1)$ stochastisch unabhängig sind, diese Funktionen Treppenfunktionen sind, und die Funktionen $\psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)$, $\psi_{2^s, 2^{N_r}+1}(x)$ $(s=1, \ldots, 2M_r^2;\ r=1, \ldots, r_0+1)$ in $(0, 2)$ ein orthonormiertes System bilden. Weiterhin, nach der Definition der Menge G_{r_0+1} und der Funktionen $\psi_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}}(x)$, $\psi_{2^s, 2^{N_{r_0+1}}+1}(x)$ $(s=1, \ldots, 2M_{r_0+1}^2)$ aus (53)—(55) folgt, daß (64)—(68) auch im Falle $r=r_0+1$ bestehen.

Die Mengenfolge $\{G_r\}_{r=1}^{\infty}$ und die Funktionen

$$\psi_{2^s, 2^{N_r}}(x), \psi_{2^s, 2^{N_r}+1}(x) \quad (s=1, \ldots, 2M_r^2;\ r=1, 2, \ldots)$$

erhalten wir also durch Induktion.

Endlich sei

$$\psi_{kl}(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{\operatorname{mes} I_{kl}}, & x \in I_{kl}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

im Falle $(k, l) \neq (2^s, 2^{N_r}), (2^s, 2^{N_r}+1)$ $(s=1, \ldots, 2M_r^2;\ r=1, 2, \ldots)$. Damit haben wir das ganze orthonormierte System $\psi = \{\psi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$ in $(0, 2)$ definiert.

Es sei $G = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, G_r$. Da die Mengen G_r stochastisch unabhängig sind, und (64) für jedes r besteht, durch Anwendung des Borel—Cantellischen Lemmas bekommen wir:

$$\operatorname{mes} G = 1.$$

Es sei r_0 eine positive ganze Zahl, und $x \in G_{r_0}$. Es sei weiterhin $m(x) = m(r_0; x)$ derjenige Index, für welchen (66) im Falle $r = r_0$ besteht. Auf Grund der Definition der Folge b, aus (62), (66) und (67) ergibt sich:

$$|s_{2^{m(x)}, 2^{N_{r_0}}}(b;\ \psi;\ x)| = \Big|\sum_{s=1}^{m(x)} b_{2^s, 2^{N_{r_0}}} \psi_{2^s, 2^{N_{r_0}}}(x)\Big| =$$

$$= (1/r_0 M_{r_0} \lambda_{2 2M_{r_0}^2} \mu_{2^{N_{r_0}+1}}) \Big|\sum_{s=1}^{m(x)} \psi_{2^s, 2^{N_{r_0}}}(x)\Big| \geqq \tag{69}$$

$$\geqq (c_5/\sqrt{2})\,((\log M_{r_0})/r_0 \lambda_{2 2M_{r_0}^2} \mu_{2^{N_{r_0}+1}}) \geqq (c_5/\sqrt{2})\, r_0 \quad (x \in G_{r_0}).$$

Im Falle $x \in G$ gilt aber (69) für unendlich viele r_0, und so ist

$$\overline{\lim_{\min(m,n)\to\infty}} |s_{2^m, 2^n}(b, \psi;\ x)| = \infty$$

fast überall in $(0, 1)$, wegen (66) (i).

Auf Grund von (68) gibt es für jedes $x \in (1, 2)$ eine Zahl $m(x)$ derart, daß im Falle $m, n \geqq m(x)$

$$\sigma_{2^m, 2^n}(b, \psi;\ x) =$$

$$= \begin{cases} \left(1 - \dfrac{k-1}{2^m}\right)\left(1 - \dfrac{l-1}{2^n}\right) a_{kl} \psi_{kl}(x), & x \in I_{kl},\ (k, l) \neq (2^s, 2^{N_r}),\ (2^s, 2^{N_r}+1); \\ & s = 1, \ldots, 2M_r^2;\ r = 1, 2, \ldots, \\ \left(1 - \dfrac{2^s-1}{2^m}\right)\left(1 - \dfrac{2^{N_r}-1}{2^m}\right) a_{2^s, 2^{N_r}} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x) + & \\ \quad + \left(1 - \dfrac{2^s-1}{2^m}\right)\left(1 - \dfrac{2^{N_r}}{2^n}\right) a_{2^s, 2^{N_r}+1} \psi_{2^s, 2^{N_r}+1}(x), & \\ & x \in I_{2^s, 2^{N_r}} \cup I_{2^s, 2^{N_r}+1}; \\ & s = 1, \ldots, 2M_r^2;\ r = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

ist. So folgt, daß $\lim\limits_{\min(m,n)\to\infty} \sigma_{2^m, 2^n}(b, \psi; x)$ in $(1, 2)$ überall existiert.

Es seien m, n positive ganze Zahlen, und sei $r(n)$ diejenige ganze Zahl, für die

$$N_{r(n)} \geqq n < N_{r(n)+1}$$

besteht; offensichtlich gilt

$$\lim_{n\to\infty} r(n) = \infty.$$

Für $x\in(0, 1)$, auf Grund der Definition der Folge b und von (67) gilt

$$\sigma_{2^m, 2^n}(b, \psi; x) =$$
$$= \sum_{s=1}^{\min(2M^2_{r(n)}, m)} (1-(2^s-1)/2^m)(1-(2^{N_{r(n)}}-1)/2^{N_{r(n)}}) b_{2^s, 2^{N_{r(n)}}} \psi_{2^s, 2^{N_{r(n)}}}(x) +$$
$$+(1/2^{N_{r(n)}}) \sum_{r=1}^{r(n)-1} \sum_{s=1}^{\min(2M_r^2, m)} (1-(2^s-1)/2^m) b_{2^s, 2^{N_r}} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)$$

im Falle $n=N_{r(n)}$, bzw.

$$\sigma_{2^m, 2^n}(b, \psi; x) = (1/2^n) \sum_{s=1}^{\min(2M^2_{r(n)}, m)} (1-(2^s-1)/2^m) b_{2^s, 2^{N_{r(n)}}} \psi_{2^s, 2^{N_{r(n)}}}(x) +$$
$$+(1/2^n) \sum_{r=1}^{r(n)-1} \sum_{s=1}^{\min(2M_r^2, m)} (1-(2^s-1)/2^m) b_{2^s, 2^{N_r}} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)$$

im Falle $n>N_{r(n)}$. Also besteht immer

$$\sigma_{2^m, 2^n}(b, \psi; x) = (1/2^n) \sum_{s=1}^{\min(2M^2_{r(n)}, m)} (1-(2^s-1)/2^m) b_{2^s, 2^{N_{r(n)}}} \psi_{2^s, 2^{N_{r(n)}}}(x) +$$
(70)
$$+(1/2^n) \sum_{r=1}^{r(n)-1} \sum_{s=1}^{\min(2M_r, m)} (1-(2^s-1)/2^m) b_{2^s, 2^{N_r}} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)$$

in $(0, 1)$.

Aus $|b_{kl}|\leqq 1$ und aus (63), (65) ergibt sich

$$(1/2^n) \left|\sum_{r=1}^{r(n)-1} \sum_{s=1}^{\min(2M_r^2, m)} (1-(2^s-1)/2^m) b_{2^s, 2^{N_r}} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)\right| \leqq$$
$$\leqq (1/2^{N_{r(n)}}) \sum_{r=1}^{r(n)-1} \sum_{s=1}^{2M_r^2} |b_{2^s, 2^{N_r}}| |\psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)| \leqq (c_4/\sqrt{2}\, 2^{N_{r(n)}}) \sum_{r=1}^{r(n)-1} M_r^2 \leqq (c_4/\sqrt{2})(1/r(n)),$$

woraus folgt, daß überall in $(0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{r=1}^{r(n)-1} \sum_{s=1}^{\min(2M_r^2, m)} ((1-(2^s-1)/2^m) b_{2^s, 2^{N_r}} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x) = 0 \tag{71}$$

gleichmäßig in m besteht.

Für eine positive ganze Zahl r setzen wir

$$\delta_r(x) = \max_{1\leqq i\leqq 2M_r^2} \left|\sum_{s=1}^{i} b_{2^s, 2^{N_r}} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x)\right| \quad (x\in(0, 2)).$$

Auf Grund des Hilfssatzes I, aus der Definition der Folge b und aus (62) folgt,

$$\int_0^1 \delta_r^2(x)\,dx \leqq \int_0^2 \delta_r^2(x)\,dx \leqq c_1 \log^2(2M_r^2+1) \sum_{s=1}^{2M_r^2} b^2_{2^s,2^{N_r}} \leqq$$

$$\leqq c_1(\log^2 M_r)(1/r^2 \lambda_{2^{2M_r^2}} \mu^2_{2^{N_r+1}}) \leqq 4c_{16} r^2 \quad (r=1,2,\dots).$$

Da $N_r \geqq r$ $(r=1,2,\dots)$ offensichtlich gilt, erhalten wir daraus:

$$\sum_{r=1}^{\infty} (1/2^{2N_r}) \int_0^1 \delta_r^2(x)\,dx \leqq 4c_{16} \sum_{r=1}^{\infty} (1/2^{2N_r}) r^2 \leqq 4c_{16} \sum_{r=1}^{\infty} r^2/2^{2r} < \infty;$$

folglich gilt

(72) $$\lim_{r\to\infty} (1/2^{N_r})\delta_r(x) = 0 \quad \text{fast überall in } (0,1).$$

Es sei r eine positive ganze Zahl, und $x \in (0,1)$. Dann besteht

(73)
$$\sum_{s=1}^{\min(2M_r^2,m)} \left(1-(2^s-1)/2^m\right) b_{2^s,2^{N_r}} \psi_{2^s,2^{N_r}}(x) =$$
$$= -(1/2^m)\sum_{s=1}^{m-1} (2^s-2^{s+1}) \sum_{\sigma=1}^{s} b_{2^\sigma,2^{N_r}} \psi_{2^\sigma,2^{N_r}}(x) + \left(1-(2^m-1)/2^m\right) \sum_{\sigma=1}^{m} b_{2^\sigma,2^{N_r}} \psi_{2^\sigma,2^{N_r}}(x)$$

im Falle $m \leqq 2M_r^2$, und

(74)
$$\sum_{s=1}^{\min(2M_r^2,m)} \left(1-(2^s-1)/2^m\right) b_{2^s,2^{N_r}} \psi_{2^s,2^{N_r}}(x) =$$
$$= -(1/2^m) \sum_{s=1}^{2M_r^2-1} (2^s-2^{s+1}) \sum_{\sigma=1}^{s} b_{2^\sigma,2^{N_r}} \psi_{2^\sigma,2^{N_r}}(x) +$$
$$+\left(1-(2^{2M_r^2-1}-1)/2^m\right) \sum_{\sigma=1}^{2M_r^2} b_{2^\sigma,2^{N_r}} \psi_{2^\sigma,2^{N_r}}(x)$$

im Falle $m > 2M_r^2$. Aus (73) und (74) folgt

(75)
$$\left|\sum_{s=1}^{\min(2M_r^2,m)} \left(1-(2^s-1)/2^m\right) b_{2^s,2^{N_r}} \psi_{2^s,2^{N_r}}(x)\right| \leqq$$
$$\leqq \left(1+1-(2^m-1)/2^m\right)\delta_r(x) \leqq 2\delta_r(x)$$

im Falle $m \leqq 2M_r^2$, bzw.

(76)
$$\left|\sum_{s=1}^{\min(2M_r^2,m)} \left(1-(2^s-1)/2^m\right) b_{2^s,2^{N_r}} \psi_{2^s,2^{N_r}}(x)\right| \leqq$$
$$\leqq \left(2^{2M_r^2}/2^m+1-(2^{2M_r^2}-1)/2^m\right)\delta_r(x) \leqq 2\delta_r(x)$$

im Falle $m > 2M_r^2$, für $x \in (0, 1)$. Aus (72), (75) und (76) bekommen wir, daß in (0, 1) fast überall

$$(77) \qquad \lim_{r\to\infty} (1/2^{N_r}) \sum_{s=1}^{\min(2M_r^2, m)} \left(1-(2^s-1)/2^m\right) b_{2^s, 2^{N_r}} \psi_{2^s, 2^{N_r}}(x) = 0$$

gleichmäßig in m besteht. Aus (70), (71) und (77) erhalten wir endlich, daß

$$\lim_{\min(m,n)\to\infty} \sigma'_{2^m, 2^n}(b, \psi; x) = 0$$

in (0, 1) fast überall ist. Nach dem Obigen gilt also $\lim_{\min(m,n)\to\infty} \sigma_{2^m, 2^n}(b, \psi; x) = 0$ in (0, 2) fast überall.

Endlich setzen wir

$$\Psi_{kl}(x) = \sqrt{2}\, \psi_{kl}(2x) \quad (x \in (0, 1);\ k, l = 1, 2, \ldots).$$

Für das System $\Psi = \{\Psi_{kl}(x)\}_{k,l=1}^{\infty}$ und für die Folge b sind also alle Erforderungen des Falles 2 erfüllt.

Damit haben wir Satz II bewiesen.

Schriftenverzeichnis

[1] P. R. Agnew, On double orthogonal series, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 2, **33** (1932), 420—434.

[2] G. Alexits, *Convergence Problems of Orthogonal Series*, Akadémiai Kiadó (Budapest, 1961).

[3] L. Csernyák, Bemerkung zur Arbeit von V. S. Fedulov „Über die Summierbarkeit der doppelten Orthogonalreihen", *Publ. Math. Debrecen*, **15** (1968), 95—98.

[4] F. Móricz, On the a.e. convergence of arithmetic means of double orthogonal series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, in Erscheinung.

[5] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 39—51.

[6] K. Tandori, Über die Konvergenz der Orthogonalreihen. II, *Acta Sci. Math.*, **26** (1964), 219—232.

[7] K. Tandori, Über ein orthonormiertes Funktionensystem von D. E. Menchoff, *Publ. Math. Debrecen*, **23** (1976), 137—140.

[8] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, Vol. I., University Press (Cambridge, 1959).

BOLYAI INSTITUT
ARADI VÉRTANÚK TERE 1
6720 SZEGED, UNGARN