Acta Sci. Math., 49 (1985), 299—307

Характеристические функции распределений притягивающихся к устойчивому закону с показателем $\alpha=1$

С. Г. ТКАЧУК

Функция распределения (ф. р.) $F(x)$ притягивается к (ф. р.) $G(x)$, если для соответствующих характеристических функций (х. ф.) $f(t)$ и $g(t)$ существуют последовательности постоянных $\{a_n\},\{b_n\}$, $b_n>0$, таких, что при любом t, $-\infty<t<\infty$.

$$\lim_{n\to\infty} \exp\{-ita_n/b_n\} f^n(t/b_n) = g(t). \tag{1}$$

Множество предельных х. ф. в (1) совпадает с четырехпараметрическим семейством устойчивых х. ф. $g(t, \alpha, \beta, \gamma, c)$. В интересующем нас случае $\alpha=1$ имеет место представление

$$\ln g(t) = i\gamma t - c|t|\bigl(1+(2/\pi)\beta i \ln|t| \operatorname{sgn} t\bigr), \tag{2}$$

где γ — действительная постоянная, $c>0$, $-1\leqq\beta\leqq 1$.

Обозначим $D(\alpha, \beta)$ — множество ф. р., притягивающихся к устойчивой ф. р. $G(x, \alpha, \beta, \gamma, c)$. К настоящему времени подробно изучены (см. [2], [6], [4]) свойства $F(x)$ и $f(t)$ связанные с условием $F(x)\in D(\alpha, \beta)$. Например, теорема 2.6.5 из [2] содержит необходимые и достаточные условия равенства (1) в терминах х. ф. $f(t)$. Однако в работе [4] отмечено, что в случае $F(x)\in D(1, \beta)$ утверждение этой теоремы неверно. В свою очередь приведенное в [4] условие (см. конец раздела 2 в [4]) для случая $F(x)\in D(1, 0)$ также является неточным.

Целью настоящей заметки является исчерпывающее рассмотрение данного вопроса.

Поступило 5 июня 1983 г.

Теорема. 1. *Если* $F(x)\in D(1,\beta)$, *то при* $t\to 0$

$$\ln f(t) = -(\pi/2)\big(1-F(1/|t|)+F(-1/|t|)\big)+i\Big[t\int_0^{1/|t|}\big(1-F(u)-F(-u)\big)\,du- \tag{3}$$
$$-CE(\beta)\big(1-F(1/|t|)-F(-1/|t|)\big)\Big]+o\big(1-F(1/|t|)+F(-1/|t|)\big),$$

где C — *постоянная Эйлера,* $E(\beta)=0$ *при* $\beta=0$, $E(\beta)=1$ *при* $\beta\neq 0$.

2. $F(x)\in D(1,\beta)$ *тогда и только тогда, когда при* $t\to 0$

$$\ln f(t) = -|t|h(1/|t|)+it\Big[\int_0^{1/|t|}\big((2\beta/\pi)(h(u)/u)+q(u)\big)\,du+o\big(h(1/|t|)\big)\Big], \tag{4}$$

где $h(u)/u$ *и* $q(u)$ *интегрируемые на любом конечном интервале из* $[0,\infty)$ *функции такие, что при* $u\to\infty$ $h(u)$ — *медленно меняющаяся функция, а* $q(u)=o(h(u)/u)$.

Следствие. *Если* $F(x)\in D(1,\beta)$, *то при* $t\to 0$

$$|f(t)|\sim\exp\big\{-(\pi/2)\big(1-F(1/|t|)+F(-1/|t|)\big)\big\}\sim\exp\{-|t|h(1/|t|)\}, \tag{5}$$

(6)
$$|\ln f(t)|\sim\Big|t\int_0^{1/|t|}\big(1-F(u)-F(-u)\big)\,du\Big|\sim\Big|t\int_0^{1/|t|}\big((2\beta/\pi)(h(u)/u)+q(u)\big)\,du\Big|,\quad \beta\neq 0,$$

$$|\ln f(t)|\sim\Big\{t^2h^2(1/|t|)+\Big[t\int_0^{1/|t|}q(u)\,du\Big]^2\Big\}^{1/2},\quad \beta=0, \tag{7}$$

где $h(u)$ *и* $q(u)$ *те же, что и в* (4).

Оценка (5) уточняет соответствующее утверждение, полученное в [2] на стр. 110 в случае $\alpha=1$. Оценки (6) и (7) не следуют, соответственно, из теоремы 2.6.5 монографии [2] и из условия приведенного в работе [4], поскольку в [2] на месте интеграла в представлении (4) находится функция $(2\beta/\pi)h(1/|t|)\ln|t|$, а в работе [4] в представлении (4) отсутствует функция $q(u)$. Указанные обстоятельства позволяют построить

Пример 1. Пусть $F(x)=1/3$ при $|x|\leqq 3$, а при $x>3$

$$F(-x)=1/x,\quad 1-F(x)=(1+1/\ln x)/x,$$

тогда (см. условие (12) и равенство (13), приводимые ниже) $F(x)\in D(1,0)$, и из представления (3) следует, что при $t\to 0$

$$\ln f(t) = -\pi|t|-it\big(\ln\ln 3-\ln\big|\ln|t|\big|\big)+o(t),$$

в то время как соответствующие утверждения из [2] и [4] дают в этом случае неверную оценку

$$\ln f(t) = -\pi|t| + i\gamma t + o(t), \quad \gamma = \text{const}.$$

Заметим, что в общем случае $o(h(1/|t|))$ в правой части (4) нельзя внести под знак интеграла. (Эту проблему указали автору А. В. Нагаев и Л. А. Анорина.) Это показывает

Пример 2. Пусть случайным величинам η, ζ, ξ соответствуют ф. р. $F_\eta(x)$, $F_\zeta(x)$, $F_\xi(x)$ и х. ф.

$$f_\eta(t) = a \int_3^\infty x^{-2} \ln x \exp\{itx\}\, dx, \quad a = \Big(\int_3^\infty x^{-2} \ln x\, dx\Big)^{-1}, \tag{8}$$

$$f_\zeta(t) = b \sum_{k=1}^\infty 2^{-k^2} \exp\{it2^{k^2}\}, \quad b = \Big(\sum_{k=1}^\infty 2^{-k^2}\Big)^{-1}, \tag{9}$$

$$f_\xi(t) = \big(f_\eta(t) + f_\zeta(t)\big)/2. \tag{10}$$

Далее будет показано, что $F_\xi(x) \in D(1, 1)$, а функции

$$\varphi(u) = \operatorname{Im} u \ln f_\xi(1/u), \quad \psi(u) = \operatorname{Re} u \ln f_\xi(1/u), \tag{11}$$

где $u = 1/t$, $t \neq 0$, не являются абсолютно непрерывными ни в одном интервале. Следовательно, $\varphi(u)$ нельзя представить в виде интеграла с переменным верхним пределом $u = 1/t$. Отметим также, что $f_\zeta(t)$ и $f_\xi(t)$ являются новыми примерами нигде не дифференцируемых х. ф.

Доказательство теоремы. Известно (см. [2] стр. 93), что $F(x) \in D(1, \beta)$ тогда и только тогда, когда при $x \to \infty$

$$F(-x) = x^{-1} l(x)\big(c_1 + o(1)\big), \quad 1 - F(x) = x^{-1} l(x)\big(c_2 + o(1)\big), \tag{12}$$

$$(c_2 - c_1)/(c_1 + c_2) = \beta, \tag{13}$$

где $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$, $c_1 + c_2 > 0$, $l(x)$ — медленно меняющаяся функция.

1. Обозначим

$$m^-(x) = x\big(1 - F(x) - F(-x)\big), \quad m^+(x) = x\big(1 - F(x) + F(-x)\big). \tag{14}$$

Ввиду условия (12) имеем

$$m^-(x) = l(x)\big(c_2 - c_1 + o(1)\big), \quad m^+(x) = l(x)\big(c_1 + c_2 + o(1)\big). \tag{15}$$

Легко проверить, что

$$f(t) - 1 = it \int_0^\infty \frac{\cos tu}{u} m^-(u)\, du - |t| \int_0^\infty \frac{\sin |tu|}{u} m^+(u)\, du. \tag{16}$$

Слегка изменив рассуждения леммы 2.5.1 из [2], получим ввиду (15) при $t \to 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin|tu|}{u} m^+(u)\,du = \frac{\pi}{2} m^+\left(\frac{1}{|t|}\right)(1+o(1)), \tag{17}$$

$$\int_0^{1/|t|} \frac{1-\cos tu}{u} m^-(u)\,du = E(\beta) m^-\left(\frac{1}{|t|}\right) \int_0^1 \frac{1-\cos u}{u}\,du + o\left(l\left(\frac{1}{|t|}\right)\right), \tag{18}$$

$$\int_{1/|t|}^\infty \frac{\cos tu}{u} m^-(u)\,du = E(\beta) m^-\left(\frac{1}{|t|}\right) \int_1^\infty \frac{\cos u}{u}\,du + o\left(l\left(\frac{1}{|t|}\right)\right), \tag{19}$$

где $E(\beta)$ определено в (3). Из (18) и (19) следует, что

$$\int_0^\infty \frac{\cos tu}{u} m^-(u)\,du = \int_0^{1/|t|} \frac{m^-(u)}{u}\,du - CE(\beta) m^-\left(\frac{1}{|t|}\right) + o\left(l\left(\frac{1}{|t|}\right)\right), \tag{20}$$

так как (см. [3], стр. 627)

$$\int_0^1 \frac{1-\cos u}{u}\,du - \int_1^\infty \frac{\cos u}{u}\,du = C,$$

где C — постоянная Эйлера. Ввиду представления (16), соотношений (15), (17) и (20)

$$f(t)-1 = it\left(\int_0^{1/|t|} \frac{m^-(u)}{u}\,du - CE(\beta) m^-\left(\frac{1}{|t|}\right)\right) - \frac{\pi}{2}|t| m^+\left(\frac{1}{|t|}\right)(1+o(1)). \tag{21}$$

Далее, легко проверить, что

$$|\mathrm{Im}(f(t)-1)| < |t| \int_0^\infty \frac{\cos tu}{u} m^+(u)\,du = |t| L\left(\frac{1}{|t|}\right), \tag{22}$$

где $L(u)$ — медленно меняющаяся функция. Соотношения (14), (15), (21), (22) вместе с оценкой

$$\ln f(t) = f(t) - 1 + O(|f(t)-1|^2)$$

доказывают утверждение пункта 1.

2. Лемма 1. *Медленно меняющаяся функция $h(x)$ допускает представление*

$$h(x) = \int_0^x (q_1(u)/u)\,du + q_2(x), \tag{23}$$

где $q_1(x)/x$ — интегрируемая на любом конечном интервале из $[0, \infty)$ функция и при $x \to \infty$ $q_i(x) = o(h(x))$, $i = 1, 2$.

Доказательство леммы 1. Известно (см. [1], гл. II), что

$$h(x) = h_1(x) + q_3(x), \tag{24}$$

где $h_1(x) \in C_\infty$ и при $x \to \infty$ $q_3(x) = o(h(x))$. Используя (24) и представление Карамата (см. [6], стр. 342)

$$h(x) = a(x) \exp\left\{\int_1^x (\varepsilon(u)/u)\, du\right\}, \tag{25}$$

где $\varepsilon(x) \to 0$ и $a(x) \to c$, $0 < c < \infty$, при $x \to \infty$, легко проверить, что

$$h_1'(x) = o(h_1(x)/x), \quad x \to \infty. \tag{26}$$

Из (24) и (26) следует (23), где можно положить

$$q_1(x) = x\left(h_1'(x) + h_1(0) \exp\{-x\}\right) = o(h(x)),$$

$$q_2(x) = q_3(x) + h_1(0) \exp\{-x\} = o(h(x)).$$

Лемма 1 доказана. Необходимость представления (4) вытекает теперь из (3), (14), (15) и (23).

Достаточность представления (4) будет доказана, если найдутся последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ такие, что

$$\exp\{-ita_n/b_n\} f^n(t/b_n) \to g(t). \tag{27}$$

Положим при достаточно больших n

$$b_n = \left\{\inf\{t\colon\ \operatorname{Re} \ln f(t) = c/n\}\right\}^{-1}, \quad a_n = nb_n \operatorname{Im} \ln f(1/b_n) - \gamma b_n. \tag{28}$$

Используя (4) и свойства медленно меняющихся функций, нетрудно проверить, что при $n \to \infty$

$$b_n = c^{-1} n h(b_n)(1 + o(1)), \tag{29}$$

$$a_n = n \int_0^{b_n} Q(u)\, du - \gamma b_n + o(b_n), \quad Q(u) = (2\beta/\pi)(h(u)/u) + q(u). \tag{30}$$

Из (29), (30) следует, что при любом фиксированном $t \neq 0$ и $n \to \infty$

$$nh(b_n/|t|)/b_n = (nh(b_n)/b_n)(h(b_n/|t|)/h(b_n)) = c + o(1), \tag{31}$$

$$\begin{aligned} (n/b_n)\left(\int_0^{b_n/|t|} Q(u)\, du - \int_0^{b_n} Q(u)\, du\right) &= (n/b_n) \int_{b_n}^{b_n/|t|} Q(u)\, du = \\ = \int_1^{1/|t|} \frac{h(ub_n)}{h(b_n)} \frac{1}{u} \left(\frac{2\beta c}{\pi} + o(1)\right) du &= -\frac{2\beta c}{\pi} \ln|t| + o(1). \end{aligned} \tag{32}$$

Представление (4) и соотношения (29)—(32) позволяют записать, что при $n\to\infty$ и любом фиксированном $t\neq 0$

$$n\ln f(t/b_n)-ita_n/b_n = it\gamma+itnb_n^{-1}\Big(\int\limits_0^{b_n/|t|} Q(u)\,du-\int\limits_0^{b_n} Q(u)\,du\Big)-$$

$$-|t|\,nh(b_n/|t|)/b_n+o(1) = i\gamma t-c|t|\big(1-i(2\beta/\pi)\ln|t|\operatorname{sgn} t\big)+o(1),$$

следовательно, выполняется (27). Доказательство пункта 2 и самой теоремы завершено.

Приступим к доказательству оценок (5)—(7). Соотношения (5), (7) вытекают непосредственно из (3), (4). Оценка (6) получается из (3), (4) и известных свойств медленно меняющихся функций (см. [6], стр. 341)

(33)
$$\lim_{x\to\infty} h(x)\Big/\int\limits_0^x \big(h(u)/u\big)\,du = 0,$$

(34)
$$\lim_{x\to\infty} h(x)\Big/\int\limits_x^\infty \big(h(u)/u\big)\,du = 0,$$

последнее свойство верно, если $\int\limits_0^\infty \big(h(u)/u\big)\,du$ существует.

Пример 2. Из равенств (8)—(10) следует, что случайная величина η имеет плотность

(35)
$$p_\eta(x) = \begin{cases} ax^{-2}\ln x, & x\geqq 3\\ 0, & x<3,\end{cases}$$

случайная величина ζ имеет дискретное распределение

(36)
$$p_k = P\{\zeta = 2^{k^2}\} = b2^{-k^2},\quad k=1,2,\ldots,$$

а ф. р. случайной величины ξ определяется равенством

(37)
$$F_\xi(x) = \big(F_\eta(x)+F_\zeta(x)\big)/2.$$

Используя (35)—(37), легко проверить, что при $x\to\infty$

(38)
$$1-F_\xi(x) = \big(1-F_\eta(x)\big)\big(1/2+o(1)\big) = x^{-1}\ln x\big(a/2+o(1)\big).$$

Поскольку $F_\xi(x)=0$ при $x<0$, то ввиду (38) для $F_\xi(x)$ выполняются условия (12), (13), где $\beta=1$. Поэтому $F_\xi(x)\in D(1,1)$.

Из следующих утверждений (доказательство их приводится ниже):

(а) $\operatorname{Re} f_\eta(t)$, $\operatorname{Im} f_\eta(t)$, $f_\eta(t)$ — дифференцируемые при любом $t\neq 0$ функции,

(б) $\operatorname{Re} f_\zeta(t)$, $\operatorname{Im} f_\zeta(t)$ — почти всюду недифференцируемые функции,

(в) $f_\zeta(t)$ — всюду недифференцируемая функция, (г) $f_\xi(t)$ — не имеет производной в точке $t=0$, и равенства (10) следует, что $f_\xi(t)$ всюду недифференцируемая функция, а $\mathrm{Re} f_\xi(t)$ и $\mathrm{Im} f_\xi(t)$ почти всюду недифференцируемые функции. Следовательно, функции определенные в (11) тоже почти всюду недифференцируемы и поэтому не являются (см. [5], стр. 229) абсолютно непрерывными.

Теперь докажем утверждения (а)—(г).

(а) Достаточно установить дифференцируемость функций

$$\mathrm{Re} f_\eta(t) = a \int_3^\infty \cos tx x^{-2} \ln x\, dx, \quad \mathrm{Im} f_\eta(t) = a \int_3^\infty \sin tx x^{-2} \ln x\, dx, \quad t \neq 0.$$

Дифференцируя под знаком интеграла, мы получим формальные (пока) равенства

$$(39)\quad \begin{aligned} (\mathrm{Re} f_\eta(t))' &= -a \int_3^\infty \sin tx x^{-1} \ln x\, dx, \\ (\mathrm{Im} f_\eta(t))' &= a \int_3^\infty \cos tx x^{-1} \ln x\, dx, \quad t \neq 0. \end{aligned}$$

Интегралы в (39) не только существуют, но и сходятся равномерно по t, $t \in [c, d]$, в любом промежутке $[c, d]$ не содержащем нуля. Применяя известную теорему анализа о дифференцировании под знаком интеграла, мы видим, что равенства (39) и утверждение (а) справедливы.

(б) Из (36) получается оценка

$$(40)\quad \sum_{k=m}^{\infty} p_k = b 2^{-m^2} + \theta_1 2^{-(m+1)^2}, \quad b < \theta_1 < 2b.$$

Обозначим

$$(41)\quad x_k = 2^{k^2}.$$

Легко проверить, что

$$(42)\quad \begin{aligned} f_\zeta(t+h) - f_\zeta(t) &= 2i \sum_{k=1}^{\infty} \sin(hx_k/2) \exp\{ix_k(t+h/2)\} p_k = \\ &= 2i \Big(\sum_{k=1}^{m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \Big) = 2i \Big(\sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \Big). \end{aligned}$$

Положим

$$(43)\quad h = 2^{1-m^2-m}.$$

Тогда при $k \leqq m$ и $m \to \infty$, ввиду (36), (41)—(43) имеем

$$(44)\quad p_k \sin(hx_k/2) = hx_k/2 + O(h^3 x_k^3 p_k) = h\big(b/2 + O(2^{-2m})\big),$$

$$(45)\quad \exp\{ix_k(t+h/2)\} = \exp\{ix_k t\}\big(1 + O(2^{-m})\big),$$

$$(46)\quad \sum\nolimits_1 = (h/2)\Big[b \sum_{k=1}^{m} \exp\{ix_k t\} + O(m 2^{-m})\Big].$$

Если же $k \geqq m+1$, то ввиду (36), (40)—(43)

(47) $$\left|\sum\nolimits_2\right| \leqq b2^{1-(m+1)^2} = bh2^{-m-1}.$$

Представление (42) и соотношения (46), (47) позволяют записать, что при h, выбранном в соответствии с (43), при $m \to \infty$ справедлива оценка

(48) $$f_\zeta(t+h) - f_\zeta(t) = ih\left(b\sum_{k=1}^{m} \exp\{ix_k t\} + o(1)\right).$$

Из (48) вытекает, что

(49) $$\operatorname{Re} f_\zeta(t+h) - \operatorname{Re} f_\zeta(t) = -h\left(b\sum_{k=1}^{m} \sin[\pi(2^{k^2} t/\pi)] + o(1)\right),$$

(50) $$\operatorname{Im} f_\zeta(t+h) - \operatorname{Im} f_\zeta(t) = h\left(b\sum_{k=1}^{m} \cos[\pi(2^{k^2} t/\pi)] + o(1)\right).$$

Используя представление дробной доли вещественного числа в двоичной системе счисления в виде бесконечной последовательности нулей и единиц, легко проверить, что справедлива

Лемма 2. *Мера Лебега множества вещественных чисел u, $-\infty < u < \infty$, таких, что при достаточно большом N, $N = N(u)$, для всех $n > N$ выполняется неравенство*

$$1/4 < \{2^{n^2} u\} < 3/4, \quad \{z\} \text{ — дробная доля } z,$$

равна нулю.

Лемма 2 равносильна утверждению: почти все вещественные числа u, $-\infty < u < \infty$, обладают тем свойством, что существует бесконечно много натуральных чисел n_k, для которых

(51) $$\left(\{2^{n_k^2} u\} - 1/4\right)\left(\{2^{n_k^2} u\} - 3/4\right) \geqq 0.$$

В свою очередь (51) при $u = t/\pi$ равносильно неравенству

$$|\cos[\pi(2^{n_k^2} t/\pi)]| \geqq 1/\sqrt{2},$$

которое означает, что почти для всех t, $-\infty < t < \infty$, сумма из правой части (50) расходится при $m \to \infty$. Поэтому не существует предел

$$\lim_{h \to 0} \left(\operatorname{Im} f_\zeta(t+h) - \operatorname{Im} f_\zeta(t)\right)/h$$

и функция $\operatorname{Im} f_\zeta(t)$ не дифференцируема почти при всех t. Аналогично доказывается, что $\operatorname{Re} f_\zeta(t)$ также почти всюду не дифференцируемая функция.

(в) Для того, чтобы доказать, что $f_\zeta(t)$ нигде не дифференцируемая функция, достаточно заметить, что сумма в (48) расходится, поскольку все слагаемые по модулю равны единице при любом t.

(г) Из (38) следует, что при $x \to \infty$

$$x(1 - F_\xi(x)) \to \infty.$$

Это противоречит (см. [6], стр. 635) критерию дифференцируемости х. ф. в нуле, поэтому $f'_\xi(0)$ не существует.

Литература

[1] М. А. Евгафов, *Асимптотические оценки и целые функции*, Физматгиз (Москва, 1962).

[2] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука (Москва, 1965).

[3] Г. Корн, Т. Корн, *Справочник по математике*, Наука (Москва, 1968).

[4] А. В. Нагаев, Некоторые предельные теоремы теории восстановления, *Теория вероятностей и ее применения*, **20** (1975), № 2, 332—344.

[5] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука (Москва, 1974).

[6] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения*, т. 2, Мир (Москва, 1967).

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
ТАШ ГУ ИМ. В. И. ЛЕНИНА
ВУЗ-ГОРОДОК
700095, ТАШКЕНТ, СССР