Acta Sci. Math., 49 (1985), 357—364

# Zur Symmetrisierung gewisser rationaler Eigenwertaufgaben

HANSJÖRG LINDEN

*Herrn Prof. Dr. K. Zeller zum 60. Geburtstag gewidmet*

**1.** Gegeben sei ein komplexer Hilbertraum $\mathfrak{H}$ mit innerem Produkt $(\cdot, \cdot)$ und Norm $\|\cdot\|$. Ferner seien gegeben komplexe Zahlen $a_k \in \mathbf{C}$, $k=1, 2, \ldots, K$, mit $a_k \neq a_j$ $(k \neq j)$, $a_k \neq 0$ für $k, j=1, 2, \ldots, K$. Dabei seien die Zahlen $a_k$ so numeriert, daß für ein $K_1$, $0 \leqq K_1 \leqq K$, gilt: $a_1, a_2, \ldots, a_{K_1} \in \mathbf{R}$, $a_{K_1+1}, a_{K_1+2}, \ldots, a_K \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ mit $a_{K_1+1}=\bar{a}_{K_1+2}, a_{K_1+3}=\bar{a}_{K_1+4}, \ldots, a_{K-1}=\bar{a}_K$. Weiterhin seien gegeben natürliche Zahlen $\varphi_j \in \mathbf{N}$, $j=1, 2, \ldots, K$, mit $\varphi_{K_1+2l-1}=\varphi_{K_1+2l}$, $l=1, 2, \ldots, (K-K_1)/2$, und lineare Operatoren $A$, $H_k$, $k=1, 2, \ldots, n-1$, $H_{k,j}$, $k=1, 2, \ldots, \varphi_j$, $j=1, 2, \ldots, K$, in $\mathfrak{H}$, die nicht alle gleich Null sind und wobei die Operatoren $A, H_1, \ldots, H_{n-1}$, $H_{k,j}$, $k=1, 2, \ldots, \varphi_j$, $j=1, 2, \ldots, K_1$, selbstadjungiert sind. Ferner gelte

$$H_{k, K_1+2l-1} = H^*_{k, K_1+2l}, \quad k = 1, 2, \ldots, \varphi_{K_1+2l-1}, \quad l = 1, 2, \ldots, (K-K_1)/2.$$

Schließlich seien die Operatoren $H_k$, $k=1, \ldots, n-1$, $H_{k,j}$, $k=1, 2, \ldots, \varphi_j$, $j=1, 2, \ldots, K$, endlichdimensional. Dann betrachten wir in dieser Arbeit die Operatorfunktion

$$\mathfrak{M}(\lambda) := I-\lambda A-\sum_{k=1}^{n-1} \lambda^{k+1} H_k+\sum_{j=1}^{K} \sum_{k=1}^{\varphi_j} \left(\lambda^2/(\lambda-a_j)^k\right) H_{k,j}$$

für $\lambda \in \mathbf{C}^* := \mathbf{C} \setminus \{a_1, \ldots, a_K\}$, wo $I$ der Identitätsoperator in $\mathfrak{H}$ ist. Operatorfunktionen dieser Form treten bei Eigenwertaufgaben für gewöhnliche Differentialoperatoren mit Eigenwertparameter in den Randbedingungen auf (vgl. [2, 3]).

Eine Zahl $\lambda \in \mathbf{C}^*$ gehört zur Resolventenmenge von $\mathfrak{M}$, wenn der Operator $\mathfrak{M}(\lambda)^{-1}$ existiert als ein beschränkter, auf $\mathfrak{H}$ definierter Operator. Eine Zahl $\lambda \in \mathbf{C}^*$ heißt (regulärer) Eigenwert von $\mathfrak{M}$, wenn ein Element $0 \neq f \in \mathfrak{H}$ existiert, so daß $\mathfrak{M}(\lambda) f=0$; $f$ heißt dann ein zu $\lambda$ gehöriges (reguläres) Eigenelement. $\lambda=a_l$ heißt

Received July 29, 1983.

ein singulärer Wert, wenn Elemente $f, g_1, g_2, \ldots, g_{\varphi_l} \in \mathfrak{H}$ existieren, so daß

$$f - a_l Af - \sum_{k=1}^{n-1} a_l^{k+1} H_k f + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{K} \sum_{k=1}^{\varphi_j} (a_l^2/(a_l - a_j)^k) H_{k,j} f - \sum_{k=1}^{\varphi_l} H_{k,l} g_k = 0,$$

$$H_{k,l} f = 0, \quad k = 1, \ldots, \varphi_l, \quad \|f\| + \sum_{k=1}^{\varphi_l} \|g_k\| > 0.$$

Ist $f \neq 0$, so heißt $a_l$ singulärer Eigenwert von $\mathfrak{M}$. $f$ heißt dann ein zu $\lambda = a_l$ gehörendes (singuläres) Eigenelement. In [2] wurde der Operatorfunktion $\mathfrak{M}$ ein linearer Operator zugeordnet (unter etwas allgemeineren Voraussetzungen) und damit gezeigt, daß $\mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele (reguläre und singuläre) Eigenwerte (endlicher) Vielfachheit ohne endlichen Häufungspunkt besitzt. Wir wollen in dieser Arbeit unter den etwas spezielleren Voraussetzungen zeigen, daß $\mathfrak{M}$ ein symmetrischer Operator in einem Pontryaginraum (vgl. [1]) zugeordnet werden kann, derart, daß die Eigenwerte von $\mathfrak{M}$ auch Eigenwerte dieses Operators sind.

Als Folgerung hieraus erhalten wir dann, daß $\mathfrak{M}$ höchstens endlich viele Eigenwerte in der Halbebene $\operatorname{Im} \lambda > 0$ und in der Halbebene $\operatorname{Im} \lambda < 0$ besitzt; beim Vorliegen abzählbar vieler Eigenwerte, gibt es also abzählbar viele reelle Eigenwerte.

**2.** Bei unserem Vorgehen benützen wir den in [2] $\mathfrak{M}$ zugeordneten linearen Operator, den wir hier zunächst zur einfacheren Handhabung in einer etwas anderen Form darstellen. Wir bezeichnen mit $P_{k,j}$: $\mathfrak{H} \to \{f \in \mathfrak{H} \mid H_{k,j} f = 0\}^\perp$, $k = 1, \ldots, \varphi_j$, $j = 1, \ldots, K$, die Projektionen mit $H_{k,j} = H_{k,j} P_{k,j}$, $k = 1, \ldots, \varphi_j$, $j = 1, \ldots, K$. Dann definieren wir lineare Operatoren $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{H}^n \to \mathfrak{H}^n$, $\mathfrak{H}_{k,j}$: $\mathfrak{H}^k \to \mathfrak{H}^n$, $\mathfrak{P}_{k,j}$: $\mathfrak{H}^n \to \mathfrak{H}^k$, $\hat{\mathfrak{P}}_{k,j}$: $\mathfrak{H}^k \to \mathfrak{H}^k$, $k = 1, 2, \ldots, \varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots, K$, durch

$$\mathfrak{A} := \begin{pmatrix} A & H_1 & H_2 \ldots H_{n-2} & H_{n-1} \\ I & 0 & 0 \ldots \quad 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \ldots \quad 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots \quad 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots \quad I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{H}_{k,j} := \begin{pmatrix} \frac{1}{a_j} H_{k,j} & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{P}_{k,j} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{k+1}}{a_j^{k-1}} P_{k,j} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{\mathfrak{P}}_{k,j} := \begin{pmatrix} \binom{k}{1} \frac{1}{a_j} P_{k,j} & -\binom{k}{2} \frac{1}{a_j^2} P_{k,j} \dots & & (-1)^{k+1} \binom{k}{k} \frac{1}{a_j^k} P_{k,j} \\ P_{k,j} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{k,j} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots P_{k,j} & 0 \end{pmatrix}$$

und definieren damit die Operatoren $\mathfrak{H}^{(j)}\colon \mathfrak{H}^{\varphi_j(\varphi_j+1)/2} \to \mathfrak{H}^n$, $\mathfrak{P}^{(j)}\colon \mathfrak{H}^n \to \mathfrak{H}^{\varphi_j(\varphi_j+1)/2}$, $\hat{\mathfrak{P}}^{(j)}\colon \mathfrak{H}^{\varphi_j(\varphi_j+1)/2} \to \mathfrak{H}^{\varphi_j(\varphi_j+1)/2}$ durch

$$\mathfrak{H}^{(j)} := (\mathfrak{H}_{1,j}, \mathfrak{H}_{2,j}, \dots, \mathfrak{H}_{\varphi_j,j}),$$

$$\mathfrak{P}^{(j)} := \begin{pmatrix} \mathfrak{P}_{1,j} \\ \mathfrak{P}_{2,j} \\ \vdots \\ \mathfrak{P}_{\varphi_j,j} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathfrak{P}}^{(j)} := \begin{pmatrix} \hat{\mathfrak{P}}_{1,j} & & \mathfrak{O} \\ & \hat{\mathfrak{P}}_{2,j} & \\ & & \ddots \\ \mathfrak{O} & & \hat{\mathfrak{P}}_{\varphi_j,j} \end{pmatrix}$$

für $j=1, 2, \dots, K$. Schließlich können wir hiermit den Operator $\hat{\mathfrak{M}}\colon \mathfrak{H}^M \to \mathfrak{H}^M$ mit

$$M = n + (1/2) \sum_{j=1}^{K} \varphi_j(\varphi_j + 1)$$

erklären durch

$$\hat{\mathfrak{M}} := \begin{pmatrix} \mathfrak{A} & \mathfrak{H}^{(1)} & \mathfrak{H}^{(2)} \dots & \mathfrak{H}^{(K)} \\ \mathfrak{P}^{(1)} & \hat{\mathfrak{P}}^{(1)} & \mathfrak{O} \dots & \mathfrak{O} \\ \mathfrak{P}^{(2)} & \mathfrak{O} & \hat{\mathfrak{P}}^{(2)} \dots & \mathfrak{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ \mathfrak{P}^{(K)} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \dots & \hat{\mathfrak{P}}^{(K)} \end{pmatrix}.$$

Dann besitzen $\mathfrak{M}$ und $\hat{\mathfrak{M}}$, $\tilde{\mathfrak{M}}(\lambda) := \mathfrak{E} - \lambda\hat{\mathfrak{M}}$, ($\mathfrak{E}$ Identitätsoperator in $\mathfrak{H}^M$) in $\mathbf{C}^*$ dieselben Resolventenmengen und dieselben Eigenwerte, während für einen Eigenwert $a_j$ von $\hat{\mathfrak{M}}$ gleichzeitig $a_j$ ein singulärer Wert von $\mathfrak{M}$ ist, und für einen singulären Eigenwert $a_j$ von $\mathfrak{M}$ gleichzeitig $a_j$ ein Eigenwert von $\hat{\mathfrak{M}}$ ist. Da

$\mathfrak{H}\mathfrak{K}^n$ ein kompakter operator ist, besitzt $\mathfrak{M}$ höchstens abzählbar viele Eigenwerte endlicher Vielfachheit ohne endlichen Häufungspunkt.

Wir betrachten nun den Vektorraum

$$\mathfrak{H}^M =: Z :=$$

$$:= \{(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_{1,1,1}, f_{1,2,1}, f_{1,2,2}, \ldots, f_{1,\varphi_1,1}, \ldots, f_{1,\varphi_1,\varphi_1}, \ldots, f_{K,\varphi_K,\varphi_K})^{\mathrm{T}} \mid$$

$$f_k \in \mathfrak{H},\ k = 0, 1, \ldots, n-1,\ f_{j,k,l} \in \mathfrak{H},\ j = 1, 2, \ldots, K,\ k = 1, 2, \ldots, \varphi_j,\ l = 1, 2, \ldots, k\}$$

und wollen auf $Z$ über einen selbstadjungierten Operator ein neues inneres Produkt einführen. Zur einfacheren Darstellung müssen wir dazu noch einige Abkürzungen einführen. Wir definieren lineare Operatoren $\mathfrak{K}_{\mathfrak{N}}$: $\mathfrak{H}^n \to \mathfrak{H}^n$, $\mathfrak{K}_{k,j}$: $\mathfrak{H}^k \to \mathfrak{H}^k$, $k = 1, 2, \ldots, \varphi_j$, $j = 1, 2, \ldots, K$, durch

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{N}} := \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & H_1 & H_2 & \ldots & H_{n-2} & H_{n-1} \\ 0 & H_2 & H_3 & \ldots & H_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & H_{n-2} & H_{n-1} & & & \\ 0 & H_{n-1} & 0 & \ldots & & 0 \end{pmatrix},$$

bzw.

$$\mathfrak{K}_{k,j} := \begin{pmatrix} K_{k,j}^{(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{k,j}^{(1)} & K_{k,j}^{(2)} & \cdots & K_{k,j}^{(k-1)} \\ 0 & K_{k,j}^{(2)} & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & K_{k,j}^{(k-1)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

mit

$$K_{k,j}^{(0)} = (-1)^{k+1} a_j^{k-2} H_{k,j},$$

$$K_{k,j}^{(l)} = (-1)^{k+l-1} \binom{k}{l+1} a_j^{k-l-3} H_{k,j} \quad (l = 1, \ldots, k-1),$$

und erklären hiermit lineare Operatoren $\mathfrak{K}^{(j)}$: $\mathfrak{H}^{\varphi_j(\varphi_j+1)/2} \to \mathfrak{H}^{\varphi_j(\varphi_j+1)/2}$ durch

$$\mathfrak{K}^{(j)} := \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_{1,j} & & \mathfrak{O} \\ & \mathfrak{K}_{2,j} & \\ \mathfrak{O} & & \ddots \ \mathfrak{K}_{\varphi_j,j} \end{pmatrix}.$$

Hiermit definieren wir nun den linearen Operator $\hat{\mathfrak{K}}: \mathfrak{H}^M \to \mathfrak{H}^M$ durch

$$\hat{\mathfrak{K}} := \begin{pmatrix} \mathfrak{K}_{\mathfrak{A}} & & & & & & & & \mathfrak{O} \\ & \mathfrak{K}^{(1)} & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & \mathfrak{K}^{(K_1)} & & & & & \\ & & & & \mathfrak{O} & (\mathfrak{K}^{(K_1+1)})^* & & & \\ & & & & \mathfrak{K}^{(K_1+1)} & \mathfrak{O} & & & \\ & \mathfrak{O} & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \mathfrak{O} & (\mathfrak{K}^{(K-1)})^* \\ & & & & & & & \mathfrak{K}^{(K-1)} & \mathfrak{O} \end{pmatrix}$$

$\hat{\mathfrak{K}}$ ist offenbar ein selbstadjungierter beschränkter Operator in $\mathfrak{H}^M$ und mit Hilfe von $\hat{\mathfrak{K}}$ führen wir ein neues inneres Produkt $(\cdot, \cdot)_Z$ in $Z = \mathfrak{H}^M$ ein durch

$$(\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{\hat{\mathfrak{K}}} := (\hat{\mathfrak{K}}\mathfrak{f}, \mathfrak{g})$$

für $\mathfrak{f}, \mathfrak{g} \in Z$. Dann ist das Paar $(Z, (\cdot, \cdot)_{\hat{\mathfrak{K}}})$ i.a. ein indefiniter Innenproduktraum, der darüber hinaus noch degeneriert ist. Der isotrope Teil $Z^0$ von $Z$ ist gegeben durch

$$Z^0 = \Big\{\mathfrak{f} \in Z \,|\, f_0 = 0, \quad \sum_{j=1}^{n-k} H_{j+k-1} f_j = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$H_{k,j} f_{j,k,l} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, K, \; k = 1, 2, \dots, \varphi_j, \; l = 1, 2, \dots, k\Big\}.$$

Es gilt $Z^0 \neq \{0\}$ auf Grund unserer Annahmen. Ferner ist $Z$ zerlegbar mit

$$Z = Z^0 (\dot{+}) Z^+ (\dot{+}) Z^-,$$

wobei $Z^+ = \mathfrak{R}(\hat{\mathfrak{P}}^+)$ und $Z^- = \mathfrak{R}(\hat{\mathfrak{P}}^-)$, wo $\hat{\mathfrak{P}}^+ = \mathfrak{E} - E_{\hat{\mathfrak{K}}}(0)$, $\hat{\mathfrak{P}}^- = E_{\hat{\mathfrak{K}}}(0-)$, wo $E_{\hat{\mathfrak{K}}}$ die Spektralschar von $\hat{\mathfrak{K}}$ bezeichnet und $\mathfrak{R}(\cdot)$ den Wertebereich des betreffenden Operators. Betrachten wir nun den Quotientenraum $Z/Z^0 := \mathfrak{Z}$, so erhalten wir einen nicht-degenerierten, zerlegbaren, indefiniten Innenproduktraum, wenn wir das innere Produkt in $\mathfrak{Z}$ durch $([\mathfrak{f}], [\mathfrak{g}])_z := (\mathfrak{f}, \mathfrak{g})_{\hat{\mathfrak{K}}}$ definieren, wo $\mathfrak{f} \in [\mathfrak{f}]$, $\mathfrak{g} \in [\mathfrak{g}]$ Repräsentaten von $[\mathfrak{f}]$ bzw. $[\mathfrak{g}]$ sind. Es gilt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^+ (\dot{+}) \mathfrak{Z}^-$ mit

$$\mathfrak{Z}^+ := \{[\mathfrak{f}] \in \mathfrak{Z} \,|\, \text{es ex. } \mathfrak{f} \in [\mathfrak{f}] \text{ mit } \mathfrak{f} \in Z^+\}, \quad \mathfrak{Z}^- := \{[\mathfrak{f}] \in \mathfrak{Z} \,|\, \text{es ex. } \mathfrak{f} \in [\mathfrak{f}] \text{ mit } \mathfrak{f} \in Z^-\}.$$

Das von dieser Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ induzierte positiv definite Innenprodukt $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{Z}}$ auf $\mathfrak{Z}$ ist dann definiert durch

$$[[\mathfrak{f}], [\mathfrak{g}]]_{\mathfrak{Z}} := ([\hat{\mathfrak{P}}^+ \mathfrak{f}], [\hat{\mathfrak{P}}^+ \mathfrak{g}])_{\mathfrak{Z}} - ([\hat{\mathfrak{P}}^- \mathfrak{f}], [\hat{\mathfrak{P}}^- \mathfrak{f}])_{\mathfrak{Z}}$$

für $f\in[\mathfrak{f}]\in\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{g}\in[\mathfrak{g}]\in\mathfrak{Z}$. Die zugehörige Norm auf $\mathfrak{Z}$ bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{\mathfrak{Z}}$. Die vollständige Hülle von $\mathfrak{Z}^+$ in dieser Norm sei $\overline{\mathfrak{Z}^+}$. Unter unseren Voraussetzungen ist dann $\overline{\mathfrak{Z}^+}\times\mathfrak{Z}^-$ ein Pontryaginraum; dieser sei $\overline{\mathfrak{Z}}$. $\mathfrak{Z}$ ist isometrisch isomorph zu einem dichten Teilraum von $\overline{\mathfrak{Z}}$. In $\mathfrak{Z}$ definieren wir die Abbildung $[\hat{\mathfrak{M}}]$ durch $[\hat{\mathfrak{M}}][\mathfrak{f}]:=[\hat{\mathfrak{M}}\mathfrak{f}]$ für $\mathfrak{f}\in[\mathfrak{f}]\in\mathfrak{Z}$.

Lemma. $[\hat{\mathfrak{M}}]$ *ist ein symmetrischer Operator in* $\mathfrak{Z}$ *und* $\overline{\mathfrak{Z}}$. *Jeder Eigenwert* $\lambda$ *mit zugehörigem Eigenelement* $\mathfrak{f}$ *von* $\hat{\mathfrak{M}}$ *ist auch Eigenwert von* $[\hat{\mathfrak{M}}]$ *mit zugehörigem Eigenelement* $[\mathfrak{f}]$.

Beweis. Für $\mathfrak{f}\in[\mathfrak{f}]\in\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{g}\in[\mathfrak{g}]\in\mathfrak{Z}$ gilt

$$([\hat{\mathfrak{M}}][\mathfrak{f}],[\mathfrak{g}])_{\mathfrak{Z}}=(\hat{\mathfrak{K}}\hat{\mathfrak{M}}\mathfrak{f},\mathfrak{g}),$$

d. h. es genügt zu zeigen, daß der Operator $\hat{\mathfrak{K}}\hat{\mathfrak{M}}$ symmetrisch ist. Wir setzen

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}:=\tilde{\mathfrak{K}}^{(0)},\quad \tilde{\mathfrak{K}}^{(j)}:=\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}^{(j)},\quad j=1,2,\dots,K,$$

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(j)}:=\mathfrak{K}^{(j)}\mathfrak{P}^{(j)},\quad j=1,2,\dots,K_1,$$

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1+2l-1)}:=(\mathfrak{K}^{(K_1+2l-1)})^*\,\mathfrak{P}^{(K_1+2l)},$$

$$\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1+2l)}:=\mathfrak{K}^{(K_1+2l-1)}\mathfrak{P}^{(K_1+2l-1)},\quad l=1,2,\dots,(K-K_1)/2,$$

$$\hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(j)}:=\mathfrak{K}^{(j)}\hat{\mathfrak{P}}^{(j)},\quad j=1,2,\dots,K_1,$$

$$\hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1+2l-1)}:=(\mathfrak{K}^{(K_1+2l-1)})^*\,\hat{\mathfrak{P}}^{(K_1+2l)},$$

$$\hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1+2l)}:=\mathfrak{K}^{(K_1+2l-1)}\hat{\mathfrak{P}}^{(K_1+2l-1)},\quad l=1,2,\dots,(K-K_1)/2.$$

Dann gilt

$$\hat{\mathfrak{K}}\hat{\mathfrak{M}}=\left(\begin{array}{cccccccccc}
\tilde{\mathfrak{K}}^{(0)} & \tilde{\mathfrak{K}}^{(1)} & \tilde{\mathfrak{K}}^{(2)}\dots & \tilde{\mathfrak{K}}^{(K_1)} & \tilde{\mathfrak{K}}^{(K_1+1)} & \tilde{\mathfrak{K}}^{(K_1+2)} & \dots & \tilde{\mathfrak{K}}^{(K-1)} & \tilde{\mathfrak{K}}^{(K)} \\
\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(1)} & \hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(1)} & \mathfrak{O}\dots & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \dots & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\
\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(2)} & \mathfrak{O} & \hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(2)}\dots & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \dots & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1)} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O}\dots & \hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1)} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & & & \\
\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1+1)} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O}\dots & \mathfrak{O} & \mathfrak{O} & \hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1+1)} & & & \\
\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1+2)} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O}\dots & \mathfrak{O} & \hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K_1+2)} & \mathfrak{O} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & \ddots & \ddots & \\
\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K-1)} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O}\dots & & & & & \mathfrak{O} & \hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K-1)} \\
\tilde{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K)} & \mathfrak{O} & \mathfrak{O}\dots & & & & & \hat{\tilde{\mathfrak{K}}}^{(K)} & \mathfrak{O}
\end{array}\right)$$

Da

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}=\begin{pmatrix} A & H_1 & H_2\dots H_{n-2} & H_{n-1}\\ H_1 & H_2 & H_3\dots H_{n-1} & 0\\ H_2 & H_3 & H_4\dots\ 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots\\ H_{n-2} & H_{n-1} & 0\ \dots\ 0 & 0\\ H_{n-1} & 0 & 0\ \dots\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}}\mathfrak{H}^{(j)}=\mathfrak{H}^{(j)}=(\mathfrak{H}_{1,j},\mathfrak{H}_{2,j},\dots,\mathfrak{H}_{\varphi_j,j}),\quad j=1,2,\dots K,$$

$$\mathfrak{K}^{(j)}\mathfrak{P}^{(j)}=(\mathfrak{H}^{(j)})^*=(\mathfrak{H}_{1,j},\mathfrak{H}_{2,j},\dots,\mathfrak{H}_{\varphi_j,j})^{\mathrm{T}},\quad j=1,2,\dots,K_1,$$

$$(\mathfrak{K}^{(K_1+2l-1)})^*\mathfrak{P}^{(K_1+2l)}=(\mathfrak{H}^*_{1,K_1+2l-1},\mathfrak{H}^*_{2,K_1+2l-1},\dots,\mathfrak{H}^*_{\varphi_{K_1+2l-1},K_1+2l-1})^{\mathrm{T}}=$$
$$=(\mathfrak{H}^{(K_1+2l-1)})^*,$$

$$\mathfrak{K}^{(K_1+2l-1)}\mathfrak{P}^{(K_1+2l-1)}=(\mathfrak{H}^*_{1,K_1+2l},\mathfrak{H}^*_{2,K_1+2l},\dots,\mathfrak{H}^*_{\varphi_{K_1+2l},K_1+2l})^{\mathrm{T}}=(\mathfrak{H}^{(K_1+2l)})^*,$$

$$l=1,2,\dots,(K-K_1)/2,$$

und

$$\mathfrak{K}^{(j)}\hat{\mathfrak{P}}^{(j)}=\begin{pmatrix}\mathfrak{K}_{1,j}\hat{\mathfrak{P}}_{1,j} & & \mathfrak{O}\\ & \mathfrak{K}_{2,j}\hat{\mathfrak{P}}_{2,j} & \\ & & \ddots & \\ \mathfrak{O} & & \mathfrak{K}_{\varphi_j,j}\hat{\mathfrak{P}}_{\varphi_j,j}\end{pmatrix},\quad j=1,2,\dots,K_1,$$

mit

$$\mathfrak{K}_{k,j}\hat{\mathfrak{P}}_{k,j}=\begin{pmatrix}(-1)^{k+1}\binom{k}{1}a_j^{k-3}H_{k,j} & (-1)^{k+2}\binom{k}{2}a_j^{k-4}H_{k,j} & \dots & (-1)^{2k}\binom{k}{k}a_j^{-2}H_{k,j}\\ (-1)^{k}\binom{k}{2}a_j^{k-4}H_{k,j} & (-1)^{k+1}\binom{k}{3}a_j^{k-5}H_{k,j} & & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (-1)^{2k-2}\binom{k}{k}a_j^{-2}H_{k,j} & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

$k=1,2,\dots,\varphi_j$, $j=1,2,\dots,K_1$, und ferner (wie man aus dem letzteren sieht)

$$(\mathfrak{K}^{(K_1+2l-1)})^*\hat{\mathfrak{P}}^{(K_1+2l)}=(\mathfrak{K}^{(K_1+2l-1)}\hat{\mathfrak{P}}^{(K_1+2l-1)})^*$$

für $l=1,2,\dots,(K-K_1)/2$ gilt, folgt die Symmetrie von $\mathfrak{K}\hat{\mathfrak{M}}$ unmittelbar.

Zum beweis der zweiten Behauptung gelte $(\mathfrak{E}-\lambda\hat{\mathfrak{M}})\mathfrak{f}=\mathfrak{O}$, $\mathfrak{f}\neq\mathfrak{O}$. Dann folgt $[\mathfrak{O}]=[(\mathfrak{E}-\lambda\hat{\mathfrak{M}})\mathfrak{f}]=[\mathfrak{f}]-\lambda[\hat{\mathfrak{M}}][\mathfrak{f}]$. Da $\mathfrak{f}\neq\mathfrak{O}$ ist, gilt auch $f_0\neq 0$ (vgl. [2]); damit ist $[\mathfrak{f}]\neq\mathfrak{O}$ ein Eigenelement um Eigenwert $\lambda$ von $[\hat{\mathfrak{M}}]$.

$[\hat{\mathfrak{M}}]$ ist also der gesuchte, $\mathfrak{M}$ zugeordnete, symmetrische Operator in dem Pontryaginraum $\mathfrak{Z}$.

Aus den Eigenschaften symmetrischer Operatoren in Pontryaginräumen (vgl. Bognár [1]) erhalten wir nun als Folgerung für die Eigenwerte von $\mathfrak{M}$ den folgenden

Satz. *$\mathfrak{M}$ besitzt höchstens abzählbar viele Eigenwerte endlicher Vielfachheit ohne endlichen Häufungspunkt. Von diesen liegen höchstens* $\dim \mathfrak{Z}^-$ *in der oberen Halbebene* ($\operatorname{Im} \lambda > 0$) *und höchstens* $\dim \mathfrak{Z}^-$ *in der unteren Halbebene* ($\operatorname{Im} \lambda < 0$), *alle anderen sind reell.*

Da $\dim \mathfrak{Z}^-$ gleich der Anzahl der negativen Eigenwerte von $\mathfrak{K}$ ist (Vielfachheiten mitgezählt) ist $\dim \mathfrak{Z}^- > 0$ auf jeden Fall, wenn für ein $a_k$ entweder $\varphi_K \geqq 2$ oder $a_k \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ oder wenn $n > 1$ ist (falls die zugehörigen Operatoren nicht Null sind).

Es ist klar, daß der obige Satz auch auf Eigenwertaufgaben für gewöhnliche Differentialgleichungen mit Eigenwertparameter in den Randbedingungen angewendet werden kann (vgl. [2, 3]). Wir wollen hier nicht mehr genauer darauf eingehen.

## Literaturverzeichnis

[1] J. Bognár, *Indefinite Inner Product Spaces*, Springer (Berlin usw., 1974).

[2] H. Linden, Eigenwertprobleme mit nichtlinear auftretendem Eigenwertparameter in den Randbedingungen. II, *Rend. Mat.*, **13** (1980), 633—646.

[3] H. Linden, Eine Bemerkung zu Eigenwertaufgaben mit Eigenwertparameter, der polynomial in den Randbedingungen auftritt, *Seminarberichte FB Math. Inf. Fernuniversität*, **14** (1982), 115—122.

FERNUNIVERSITÄT—GESAMTHOCHSCHULE
FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK
POSTFACH 940
5800 HAGEN, BRD