Acta Sci. Math., 49 (1985), 387—395

Ortholattis linéarisables

JÁNOS KRISTÓF

I. Préliminaires

On rencontre souvent dans différentes branches des mathématiques la méthode de « linéarisation ». Cela signifie que, étant donné une structure mathématique quelconque, on lui associe une structure linéaire en termes duquel on peut formuler d'intéressantes propriétés pour la structure initiale. Ceci nous permet d'utiliser les résultats les plus profonds de l'analyse fonctionnelle pour la solution de certains problèmes non linéaires.

Dans ce qui suit nous allons introduire un type d'ortholattis, dits linéarisables, auxquels nous pouvons appliquer la méthode de « linéarisation » au sens général esquissé ci-dessus.

Nous n'avons pas l'intention de donner ici un exposé complet de la théorie des ortholattis linéarisables. Nous définissons seulement les notions les plus élémentaires, ensuite nous examinons la question de leur caractérisation algébrique.

Tout d'abord nous faisons quelques remarques sur la terminologie.

Si L est un ortholattis quelconque, par L^* désignons l'ensemble de toutes les fonctions p de L dans l'intervalle $[0, 1]$ vérifiant les axiomes suivants:

($\mathrm{E_I}$) $p(1)=1$, où par **1** on note le plus grand élément de L.

($\mathrm{E_{II}}$) Pour tout système fini orthogonal $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de L soit $p(\bigvee_{i\in I} e_i)= \sum_{i\in I} p(e_i)$.

Les éléments de L^* seront appelés *états* sur L; cette dénomination est motivée par les applications de la théorie des ortholattis en physique mathématique.

Nous dirons qu'un ortholattis L est *séparé* si l'ensemble L^* sépare les points de L, c'est-à-dire pour tous $e, f\in L$, $e\neq f$ il existe $p\in L^*$, tel que $p(e)\neq p(f)$. Il est facile de voir qu'un ortholattis séparé est nécessairement orthomodulaire, mais

Reçu le 24 juin, 1983.

en général la réciproque n'est pas vraie. Par ailleurs, presque tous les ortholattis qu'on rencontre dans les applications sont séparés.

Définition. On dira que l'ortholattis séparé L est *linéarisable* s'il existe un espace normé réel E et une application $w\colon L \to E$, tels que

($\mathrm{OL_I}$) w est additive, c'est-à-dire pour $e, f \in L$, $e \perp f$ on a $w(e \vee f) = w(e) + w(f)$;

($\mathrm{OL_{II}}$) $\sup \{\tau(w(e)) \mid \tau \in E', \|\tau\| \leqq 1, \tau \circ w \in L^*\} = \|w(e)\| = 1$ pour tout $e \in L$, $e \neq \mathbf{0}$, où par $\mathbf{0}$ on désigne le plus petit élément de L et E' est le dual topologique de l'espace normé E;

($\mathrm{OL_{III}}$) pour tout $p \in L^*$ il existe une fonctionnelle linéaire τ sur E, telle que $p = \tau \circ w$ et $\|\tau\| \leqq 1$.

Si (E, w) est une couple satisfaisant aux axiomes ($\mathrm{OL_I}$), ($\mathrm{OL_{II}}$) et ($\mathrm{OL_{III}}$), on dira qu'elle est une *linéarisation* de L.

Par la suite nous donnerons une caractérisation purement algébrique des ortholattis linéarisables. Pour le moment occupons-nous de leurs propriétés plus simples.

Si L est un ortholattis linéarisable et (E, w) est une linéarisation de L, alors l'application w est injective. En effet, si $e, f \in L$, $w(e) = w(f)$, alors pour toute fonctionnelle linéaire τ sur E on a $\tau(w(e)) = \tau(w(f))$, d'où compte tenu de ($\mathrm{OL_{III}}$) on déduit que $p(e) = p(f)$ pour tout $p \in L^*$; mais alors $e = f$, car l'ortholattis L est séparé.

D'autre part, en désignant par E_0 le complété du sous-espace normé de E engendré par l'image de w, on voit aisément que la couple (E_0, w) est également une linéarisation de L. Ceci montre que nous aurions pu énoncer la définition des ortholattis linéarisables admettant l'espace normé E complet et l'ensemble $w(L)$ total dans l'espace de Banach E.

Soit L un ortholattis linéarisable quelconque. Posons une linéarisation (E, w) de L admettant que E soit complet et l'ensemble $w(L)$ soit total dans E. Désignons par E' l'espace dual topologique de E et définissons l'ensemble

$$K := \{\tau \in E' \mid \tau \circ w \in L^*, \|\tau\| \leqq 1\}.$$

Il est clair que K est un sous-ensemble convexe dans l'espace vectoriel réel E', de plus il est faiblement compact. En effet, on vérifie sans peine que K est faiblement fermé et contenu dans la boule unité de E' qui est faiblement compact. Considérons maintenant l'application

$$K \to L^*; \quad \tau \mapsto \tau \circ w. \tag{1}$$

Cette application est bijective; en effet, elle est injective car l'ensemble $w(L)$ est total dans E, d'autre part de l'axiome ($\mathrm{OL_{III}}$) il découle qu'elle est surjective. Par ailleurs, il est évident que L^* peut être considéré comme un ensemble convexe dans l'espace vectoriel produit $\mathbf{R}^L$ et d'après le théorème de Tikhonov il est compact pour la topologie produite de $\mathbf{R}^L$. Celá étant, dans la suite nous considérerons l'ensemble des états L^* comme un ensemble convexe compact dont le structure est induite par celle d'espace localement convexe produit $\mathbf{R}^L$. Or, il est évident que l'application (1) est un homéomorphisme entre les espaces topologiques compacts K et L^*, conservant tous les combinaisons convexes finies. Ceci montre qu'on peut identifier entre eux les ensembles convexes compacts K et L^*. Plus loin nous fairons usage de ce résultat.

Remarquons que nous avons de nombreux exemples pour des ortholattis linéarisables. Dans la suite nous verrons que l'ortholattis de projecteurs d'une C^*-algèbre de Baer (cf. [1], 1.3) est linéarisable. Par conséquent, tous les ortholattis de von Neumann (en particulier: tous les ortholattis hilbertiens) sont linéarisables. Il en est de même pour les ortholattis boréliens des espaces topologiques séparés. Plus loin nous verrons que tout ortholattis distributif est linéarisable.

II. Deux lemmes

Dans ce numéro nous prouvons deux lemmes nécessaires pour la suite. D'abord introduisons quelques notations.

Si X est un ensemble, par 1_X désignons l'application associant à tout élément de X le nombre 1.

Étant donné un espace topologique compact X, on désigne par $C(X;\mathbf{R})$ l'espace vectoriel réel des applications numériques continues définies dans X muni de la structure définie par la sup-norme.

Soit K un ensemble convexe compact dans l'espace vectoriel topologique réel X. Désignons par $A(K;\mathbf{R})$ le sous-espace vectoriel de $C(K;\mathbf{R})$ dont les éléments conservent toutes les combinaisons convexes finies d'éléments de K. Si σ est une fonctionnelle linéaire continue sur X, alors $(\sigma+\lambda 1_X)|_K \in A(K;\mathbf{R})$ pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$.

A noter que $A(K;\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach $C(K;\mathbf{R})$.

Lemme 1. *Soient K un ensemble convexe compact dans l'espace localement convexe réel séparé X et $\mathscr{E}$ un sous-espace vectoriel de $C(K;\mathbf{R})$, tel que $\mathscr{E}\subset A(K;\mathbf{R})$ et $1_K\in\mathscr{E}$. Munissons $\mathscr{E}$ de la structure d'espace normé induit par celle de $C(K;\mathbf{R})$. Alors, pour toute fonctionnelle linéaire μ sur $\mathscr{E}$ les propositions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Il existe $p\in K$ tel que pour la mesure de Radon δ_p concentrée en le point p soit $\delta_p|_\varepsilon=\mu$.*

(b) $\|\mu\|=\mu(1_K)=1$.

Démonstration. Il est évident que (a) entraîne (b). Pour établir l'implication inverse, prenons une fonctionnelle linéaire μ sur $\mathscr{E}$ vérifiant (b). D'après le théorème de Hahn—Banach il existe une fonctionnelle linéaire $\bar{\mu}$ sur $C(K;\mathbf{R})$ prolongeant μ et ayant la même norme. Or, $\bar{\mu}(1_K)=\mu(1_K)=1=\|\mu\|=\|\bar{\mu}\|$, donc un résultat bien connu dans la théorie de la mesure nous dit que la mesure de Radon $\bar{\mu}$ sur l'espace compact K est positive (cf. [4], Ch. V, § 5, n°5, prop. 9). Par suite, de la convexité de K il découle qu'on peut prendre le barycentre de la mesure $\bar{\mu}$; c'est-à-dire le point $p\in K$ bien déterminé par la condition suivante: pour toute fonctionnelle linéaire continue σ sur l'espace localement convexe X on a

$$\sigma(p)=\int_K \sigma(p')\,d\bar{\mu}(p')$$

(cf. [4], Ch. IV, § 7, n°1, cor. de la prop. 1).

Prouvons maintenant que $\delta_p|_{\mathscr{E}}=\mu$. Soit $\varphi\in\mathscr{E}$ arbitraire. En appliquant un résultat de Mokobodzki (cf. [3], Ch. XI, § 1, T6) on obtient l'existence d'une suite de fonctionnelles linéaires continues $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sur X et d'une suite numérique $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$, telles que la suite des fonctions $(\lambda_n 1_X+\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers φ uniformément sur K. Par la définition du point p on a

$$\int_K (\lambda_n+\sigma_n(p'))\,d\bar{\mu}(p')=\lambda_n+\sigma_n(p)$$

pour tout $n\in\mathbf{N}$, donc

$$\delta_p|_{\mathscr{E}}(\varphi)=\varphi(p)=\lim_{n\to\infty}(\lambda_n+\sigma_n(p))=\lim_{n\to\infty}\int_K(\lambda_n 1_X+\sigma_n)\,d\bar{\mu}=$$

$$=\int_K \lim_{n\to\infty}(\lambda_n+\sigma_n(p'))\,d\bar{\mu}(p')=\int_K\varphi\,d\bar{\mu}=\bar{\mu}(\varphi)=\mu(\varphi).$$

Celà achève la démonstration du lemme.

Lemme 2. *Soient K un ensemble convexe compact dans un espace vectoriel topologique réel séparé et $(\varphi_i)_{i\in I}$ un système fini de $A(K;\mathbf{R})$, tel que*

$$\text{(i)}\quad \|\varphi_i\|=1\quad (i\in I)\quad \text{et}\quad \text{(ii)}\quad \sum_{i\in I}|\varphi_i|\leqq 1,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme d'espace de Banach $C(K;\mathbf{R})$. Alors, pour tout système $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbf{R}^I$ on a

$$\Big\|\sum_{i\in I}\lambda_i\varphi_i\Big\|=\max_{i\in I}|\lambda_i|.$$

Démonstration. Si $p\in K$, alors

$$\Big|\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i\varphi_i\Big)(p)\Big|\leqq\Big(\max_{i\in I}|\lambda_i|\Big)\sum_{i\in I}|\varphi_i(p)|\leqq\max_{i\in I}|\lambda_i|,\quad\text{donc}\quad\Big\|\sum_{i\in I}\lambda_i\varphi_i\Big\|\leqq\max_{i\in I}|\lambda_i|.$$

Réciproquement, choisissons un indexe $k \in I$ arbitraire. Alors, de (i) il découle que $\sup_{p \in K} |\varphi_k(p)| =: \|\varphi_k\| = 1$, ainsi en vertu du théorème de Weierstrass il existe $p_k \in K$, tel que $|\varphi_k(p_k)| = 1$. Mais alors (ii) entraîne que pour tout $i \in I$: $|\varphi_i(p_k)| = \delta_{ik}$, par suite

$$|\lambda_k| = \Big|\sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_i(p_k)\Big| \leqq \Big\|\sum_{i \in I} \lambda_i \varphi_i\Big\|, \quad \text{donc} \quad \max_{k \in I} |\lambda_k| \leqq \Big\|\sum_{i = I} \lambda_i \varphi_i\Big\|.$$

III. Caractérisation des ortholattis linéarisables

On sait qu'un *sous-ortholattis* B de l'ortholattis L est un sous-ensemble de L contenant $\mathbf{1}$, tel que pour tous $e, f \in B$ on a $e \wedge f^{\perp} \in B$; munit de la structure induite par celle de L, B se transforme en un ortholattis.

Rappelons qu'un *orthohomomorphisme* d'un ortholattis B dans un autre L est une application u de B dans L satisfaisant aux conditions suivantes:

$$u(\mathbf{1}) = \mathbf{1}, \quad u(e^{\perp}) = u(e)^{\perp}, \quad u(e \vee f) = u(e) \vee u(f) \quad (e, f \in L).$$

Dans ce numéro nous étudierons la question suivante. Soit L un ortholattis séparé. A quelles conditions supplémentaires doit satisfaire la structure de L, pour que l'ortholattis L soit linéarisable? En d'autres termes, comment caractériser les ortholattis linéarisables parmi tous les ortholattis séparés? Telle caractérisation est donnée par le théorème suivant.

Théorème. *Si L est un ortholattis séparé, les propositions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Pour tout $e \in L$, $e \neq \mathbf{0}$ il existe $p \in L^*$, tel que $p(e) = 1$.*

(a′) *Pour tout $e \in L$, $e \neq \mathbf{0}$ on a $\sup_{p \in L^*} p(e) = 1$.*

(b) *L est linéarisable.*

(c) *Pour tous les sous-ortholattis distributifs B de L et $p \in B^*$ il existe $\bar{p} \in L^*$ prolongeant p à L tout entier.*

(c′) *Si B est un ortholattis distributif, $u: B \to L$ un orthohomomorphisme, $p \in B^*$ et*

$$\{b \in B \mid u(b) = \mathbf{0}\} \subset \{b \in B \mid p(b) = 0\},$$

alors il existe $\bar{p} \in L^*$ mettant le diagramme suivant commutatif:

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} & \\ B \arrow[u, "p"] \arrow[r, "u"'] & L \arrow[ul, "\bar{p}"'] \end{tikzcd}$$

Démonstration. Nous avons vu que l'ensemble L^* est un convexe compact dans l'espace localement convexe produit $\mathbf{R}^L$. Si $e\in L$, l'application $L^*\to\mathbf{R}$; $p\mapsto p(e)$ est continue pour la topologie de L^*, ainsi de la compacité de L^* il s'ensuit que (a′)⇒(a); c'est-à-dire les propositions (a) et (a′) sont équivalentes.

D'autre part, (c) entraîne (c′). En effet, si les hypothèses de (c′) sont vérifiées, l'ensemble $u(B)$ est un sous-ortholattis distributif de L et il existe une application p_0: $u(B)\to[0, 1]$ et une seule, telle que $p_0\circ u=p$. Il est clair que $p_0\in(u(B))^*$, ainsi en supposant (c) on déduit l'existence d'un $\bar{p}\in L^*$, tel que $\bar{p}|_{u(B)}=p_0$; c'est-à-dire $\bar{p}\circ u=p$. Ceci montre que les propositions (c) et (c′) sont équivalentes.

On vérifie sans peine que (c)⇒(a). En effet, prenant un $e\in L$, $e\neq\mathbf{0}$ on définit B comme le sous-ortholattis de L engendré par l'ensemble $\{e\}$. Or, $B=\{\mathbf{0}, \mathbf{1}, e, e^\perp\}$, donc B est distributif et il résulte de (c) que l'état p sur B défini par les équations: $p(e):=1$, $p(e^\perp):=0$ a un prolongement $\bar{p}\in L^*$ sur L tout entier. Alors $\bar{p}(e)=1$, donc (c) entraîne (a).

Pour la démonstration de (a′)⇒(b), définissons l'application w: $L\to C(L^*; \mathbf{R})$; $e\mapsto(p\mapsto p(e))$. Soit E le sous-espace vectoriel de $C(L^*; \mathbf{R})$ engendré par l'ensemble $w(L)$. Alors la couple (E, w) est l'une des linéarisations de L. En effet, de l'axiome $(\mathrm{E_I})$ découle $(\mathrm{OL_I})$. Si $p\in L^*$ alors désignant par τ_p la restriction sur E de l'application $C(L^*; \mathbf{R})\to\mathbf{R}$; $\varphi\mapsto\varphi(p)$, on définit une fonctionnelle linéaire sur E, telle que $\|\tau_p\|\leqq 1$ et $\tau_p\circ w=p\in L^*$, donc $(\mathrm{OL_{III}})$ est vrai. Enfin, pour tout $e\in L$, $e\neq\mathbf{0}$ on a

$$\sup_{p\in L^*} p(e) = \|w(e)\| \geqq \sup\{\tau(w(e))\,|\,\tau\in E', \|\tau\| \leqq 1, \tau\circ w\in L^*\} \geqq$$

$$\geqq \sup\{\tau_p(w(e))\,|\,p\in L^*\} = \sup_{p\in L^*} p(e),$$

donc (a′) entraîne $(\mathrm{OL_{II}})$.

Ainsi, il nous reste à prouver l'implication (b)⇒(c). Soit L un ortholattis linéarisable et soit (E, w) une linéarisation de L. Admettons que E est complet et $w(L)$ est total dans E. Soient B un sous-ortholattis distributif de L et $p\in B^*$ arbitraire. Désignons par E' le dual topologique de l'espace de Banach E et définissons l'ensemble $K:=\{\tau\in E'\,|\,\tau\circ w\in L^*, \|\tau\|\leqq 1\}$. Nous avons vu que K est un sous-ensemble convexe, faiblement compact de E' et que l'application $K\to L^*$; $\tau\mapsto\tau\circ w$ est un homéomorphisme affine entre les ensembles convexes compacts K et L^*. Pour tout $e\in L$ soit $\hat{e}$: $K\to\mathbf{R}$; $\tau\mapsto\tau(w(e))$. Alors $\hat{e}\in A(K; \mathbf{R})$ $(e\in L)$ et l'application $L\to A(K; \mathbf{R})$; $e\mapsto\hat{e}$ est bien injective, car l'ortholattis L est séparé. D'autre part, si $\tau\in K$, alors $\tau\circ w\in L^*$ entraîne que $\hat{\mathbf{1}}(\tau):=\tau(w(\mathbf{1}))=(\tau\circ w)(\mathbf{1})=1$, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{1}}=1_K$. Soient $\hat{L}:=\{\hat{e}\,|\,e\in L\}$ et $\hat{B}:=\{\hat{e}\,|\,e\in B\}$. Désignons par $\mathscr{E}$ le sous-espace vectoriel normé de l'espace de Banach $C(K; \mathbf{R})$ engendré par l'ensemble $\hat{L}$. Puisque l'application $e\mapsto\hat{e}$ est injective, il existe une application $\hat{p}$: $\hat{B}\to[0, 1]$ et une seule, telle que $\hat{p}(\hat{e})=p(e)$ $(e\in B)$.

En conclusion, nous avons un espace normé réel $\mathscr{E}$, un sous-ensemble $\hat{B}$ de $\mathscr{E}$ et une application $\hat{p}$: $\hat{B}\to\mathbf{R}$. Nous allons montrer qu'il existe une fonctionnelle linéaire μ sur $\mathscr{E}$, telle que $\mu|_{\hat{B}}=\hat{p}$ et $\|\mu\|\leqq 1$. Conformément à la résolution générale du problème des moments, pour l'existence de telle fonctionnelle linéaire il faut et il suffit que pour tous systèmes finis $(e_i)_{i\in I}$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ de B et $\mathbf{R}$, respectivement, soit

$$\Big|\sum_{i\in I}\lambda_i\hat{p}(\hat{e}_i)\Big|\leqq\Big\|\sum_{i\in I}\lambda_i\hat{e}_i\Big\|$$

où par $\|\ \|$ on désigne la norme de $\mathscr{E}$ qui est égale à la sup-norme.

Donc, soit $(e_i)_{i\in I}$ un système fini d'éléments de B, tel que $e_i\neq\mathbf{0}$ $(i\in I)$. Il résulte de la distributivité de B et du théorème de représentation de Stone qu'on peut traiter B comme une algèbre d'ensembles. Il s'ensuit l'existence d'un système fini orthogonal $(f_j)_{j\in J}$ d'éléments de B, tel que pour tout $i\in I$ il existe un sous-ensemble non vide J_i de J vérifiant l'égalité: $e_i=\bigvee_{j\in J_i}f_j$. Évidemment, on peut supposer que $f_j\neq\mathbf{0}$ $(j\in J)$.

Pour tous $(\lambda_i)_{i\in I}\in\mathbf{R}^I$ et $\tau\in K$ on a

$$\Big(\sum_{i\in I}\lambda_i\hat{e}_i\Big)(\tau):=\sum_{i\in I}\lambda_i\tau\big(w(e_i)\big)=\sum_{i\in I}\lambda_i(\tau\circ w)(e_i)=\sum_{i\in I}\lambda_i(\tau\circ w)\Big(\bigvee_{j\in J_i}f_j\Big)=$$
$$=\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J_i}\lambda_i(\tau\circ w)(f_j)\Big)=\sum_{j\in J}\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}}\lambda_i\Big)\tau\big(w(f_j)\big)=\Big(\sum_{j\in J}\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}}\lambda_i\Big)\hat{f}_j\Big)(\tau),$$

car $\tau\circ w\in L^*$, donc

$$\sum_{i\in I}\lambda_i\hat{e}_i=\sum_{j\in J}\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}}\lambda_i\Big)\hat{f}_j.$$

D'autre part, pour tout $j\in J$ on a $\hat{f}_j\in A(K;\mathbf{R})$, $\|\hat{f}_j\|=1$ et $\sum_{j\in J}|\hat{f}_j|=\widehat{\bigvee_{i\in I}e_i}\leqq 1_K$. Ainsi, prenant en considération le Lemme 2, on obtient aisément les inégalités suivantes:

$$\Big\|\sum_{i\in I}\lambda_i\hat{e}_i\Big\|=\Big\|\sum_{j\in J}\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}}\lambda_i\Big)\hat{f}_j\Big\|=\max_{j\in J}\Big|\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}}\lambda_i\Big|\geqq\Big|\sum_{j\in J}\Big(\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J_i}}\lambda_i\Big)p(f_j)\Big|=$$
$$=\Big|\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J_i}\lambda_i p(f_j)\Big)\Big|=\Big|\sum_{i\in I}\lambda_i p\Big(\bigvee_{j\in J_i}f_j\Big)\Big|=\Big|\sum_{i\in I}\lambda_i p(e_i)\Big|=\Big|\sum_{i\in I}\lambda_i\hat{p}(\hat{e}_i)\Big|.$$

Ceci montre qu'il existe une fonctionnelle linéaire μ sur l'espace normé $\mathscr{E}$, telle que $\mu|\hat{B}=\hat{p}$ et $\|\mu\|\leqq 1$. On a alors $\mu(1_K)=\mu(\hat{\mathbf{1}})=\hat{p}(\hat{\mathbf{1}})=p(\mathbf{1})=1$, du lemme 1, appliqué au sous-espace vectoriel $\mathscr{E}$ de $A(K;\mathbf{R})$ il découle qu'il existe $\tau\in K$, tel que $\mu(\varphi)=\varphi(\tau)$ $(\varphi\in\mathscr{E})$. Cela signifie que pour tout $e\in B$ on a $\tau\big(w(e)\big)=:\hat{e}(\tau)=$ $=\mu(\hat{e})=\hat{p}(\hat{e})=p(e)$, c'est-à-dire l'état $\bar{p}:=\tau\circ w\in L^*$ est un prolongement de p sur L tout entier.

Ceci achève la démonstration du théorème.

Appliquons ce théorème dans la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 1. *Soient L un ortholattis linéarisable, B un ortholattis distributif, u: $B \to L$ un orthohomomorphisme et $p \in B^*$. Soit Γ un ensemble d'orthohomomorphismes de L dans lui-même dont les éléments sont deux-à-deux commutables et vérifient les équations: $\alpha \circ u = u$ $(\alpha \in \Gamma)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Il existe un état $\bar{p}$ sur L invariant par rapport à Γ (c'est-à-dire $\bar{p} \circ \alpha = \bar{p}$ pour tout $\alpha \in \Gamma$), tel que $p = \bar{p} \circ u$.*

(b) *Pour tout $b \in B$, $u(b) = \mathbf{0}$ entraîne $p(b) = 0$.*

Démonstration. De toute évidence (a)$\Rightarrow$(b), donc on doit prouver (b)$\Rightarrow$(a). Le théorème précédent entraîne que l'ensemble $K := \{\bar{p} \in L^* \mid p = \bar{p} \circ u\}$ n'est pas vide. Désignons par X l'espace vectoriel topologique réel séparé, dont l'espace vectoriel sous-jacent est l'espace produit $\mathbf{R}^L$ et dont la topologie est égale à la topologie produite. Il est aisé de voir que K est un sous-ensemble convexe compact de X. Pour tout $\alpha \in \Gamma$ on désigne par $\hat{\alpha}$ l'application de X dans lui-même qui fait correspondre à tout $\varphi \in X$ l'application $\varphi \circ \alpha$. Il est clair que pour tout $\alpha \in \Gamma$ la fonction $\hat{\alpha}$ est une application linéaire continue sur l'espace localement convexe X. D'autre part, les éléments de l'ensemble d'opérateurs $\{\hat{\alpha} \mid \alpha \in \Gamma\}$ sont deux-à-deux commutables. D'après le théorème de Markov—Kakutani (cf. [2], Ch. II, § 4, Application) on obtient qu'il existe $\bar{p} \in K$, tel que $\bar{p} = \hat{\alpha}(\bar{p}) = \bar{p} \circ \alpha$ pour tout $\alpha \in \Gamma$, et l'état $\bar{p}$ ainsi obtenu est bien l'état cherché.

Pour conclure, nous indiquerons deux classes importantes des ortholattis linéarisables.

Proposition 2. (a) *Tout ortholattis distributif B est linéarisable.*

(b) *Si A est une C^*-algèbre de Baer, l'ortholattis $L(A)$ de projecteurs de A est linéarisable.*

Démonstration. (a) Soit B un ortholattis distributif arbitraire. En vertu du théorème de représentation de Stone il existe un ensemble Ω et une algèbre d'ensembles $\mathscr{B}$ dans Ω, tels que les ortholattis B et $\mathscr{B}$ sont orthoisomorphes. Soit u: $B \to \mathscr{B}$ un orthoisomorphisme entre B et $\mathscr{B}$. Pour tout $\omega \in \Omega$ définissons l'application D_ω de la manière suivante:

$$D_\omega\colon B \to \{0, 1\}; \quad b \mapsto \begin{cases} 1, & \omega \in u(b), \\ 0, & \omega \notin u(b). \end{cases}$$

On en déduit sans peine que pour tout $\omega \in \Omega$ l'application D_ω est un état sur B.

Si $e, f \in B$, $e \neq f$, alors $\big(u(e) \setminus u(f)\big) \cup \big(u(f) \setminus u(e)\big) \neq \emptyset$ et choisissant un élément ω arbitraire de cet ensemble, on voit que $D_\omega(e) \neq D_\omega(f)$; c'est-à-dire l'ortholattis B est séparé.

D'autre part, si $e \in B$, $e \neq \mathbf{0}$, alors $u(e) \neq \emptyset$ et pour tout $\omega \in u(e)$ on a $D_\omega(e) = 1$. D'après le Théorème ceci montre que B est linéarisable.

(b) Soit A une C^*-algébre de Baer. On désigne par $L(A)$ l'ortholattis des projecteurs de A. Remarquons d'abord que si τ est une fonctionnelle linéaire positive sur A, $\tau\neq 0$, alors l'application $p_\tau := (\tau/\|\tau\|)|_{L(A)}$ est un état sur $L(A)$.

Si $e, f \in L(A)$, $e\neq f$, alors d'après le théorème de Hahn—Banach il existe une fonctionnelle linéaire continue τ sur A, telle que $\tau(e)\neq\tau(f)$. On sait que toute fonctionnelle linéaire continue sur A peut être écrite sous la forme d'une combinaison C-linéaire de fonctionnelles linéaires positives (cf. [5], C^*-algèbres, § 2, 2.6.4), ainsi on peut supposer que τ est positive. Dans ce cas on a $\tau\neq 0$ et $p_\tau(e)\neq p_\tau(f)$; c'est-à-dire l'ortholattis $L(A)$ est séparé.

D'autre part, si $e\in L(A)$ et $e\neq \mathbf{0}$, alors il existe une fonctionnelle linéaire positive τ sur A, telle que $\|\tau\|=1$ et $\tau(e)^{1/2}=\|e\|=1$ (cf. [6], Theorem 12.39). Mais alors $p_\tau(e)=\tau(e)=1$ et d'après le Théorème, l'ortholattis $L(A)$ est linéarisable.

Références

[1] S. Berberian, *Baer ∗-rings*, Springer (Berlin—Heidelberg—New York, 1972).

[2] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques. V, Espaces vectoriels topologiques*, Hermann (Paris, 1951).

[3] P. A. Meyer, *Probability and Potentials*, Blaisdell (Massachusetts—Toronto—London, 1966).

[4] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques. VI, Intégration*, Hermann (Paris, 1956).

[5] J. Dixmier, *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars (Paris, 1969).

[6] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill (New York, 1973).

DEPARTMENT OF ANALYSIS
EÖTVÖS LORÁND UNIVERSITY
MÚZEUM KRT. 6—8
1088 BUDAPEST, HUNGARY