Acta Sci. Math., 50 (1986), 337—350

Intervallfüllende Folgen und volladditive Funktionen

Z. DARÓCZY, A. JÁRAI und I. KÁTAI

1. Einführung

Es sei $\lambda_n > \lambda_{n+1} > 0$ $(n\in\mathbf{N})$ und $L := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$ eine Folge mit der folgenden Eigenschaft: für beliebiges $x\in[0, L]$ gibt es eine Folge $\varepsilon_n\in\{0, 1\}$ $(n\in\mathbf{N})$ derart, dass $x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\lambda_n$ ist. Die Folge $\{\lambda_n\}$ wird dann intervallfüllend genannt. Z. B. ist $\{1/2^n\}$ intervallfüllend mit $L=1$.

Ist $\{\lambda_n\}$ eine intervallfüllende Folge, so nennen wir die unbekannte Funktion $F\colon [0, L]\to\mathbf{R}$ volladditiv, falls

$$F\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\lambda_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n F(\lambda_n)$$

für jede Folge $\varepsilon_n\in\{0, 1\}$ $(n\in\mathbf{N})$ gilt. Unser Hauptziel in dieser Arbeit ist es, für geeignete intervallfüllende Folgen $\{\lambda_n\}$ die volladditive Funktionen zu bestimmen.

Ähnliche Untersuchungen in dieser Richtung kann man in der Arbeit [1] finden. Z. B. ist in [1] der Fall $\{\lambda_n = 1/2^n\}$ betrachtet.

2. Intervallfüllende Folgen

Es bezeichne Λ die Menge der reellen Folgen $\{\lambda_n\}$ mit $\lambda_n > \lambda_{n+1} > 0$ $(n\in\mathbf{N})$ und es sei $L := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$.

Definition 1. Wir nennen die Folge $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *intervallfüllend,* falls es für beliebiges $x\in[0, L]$ eine Folge $\varepsilon_n\in\{0, 1\}$ $(n\in\mathbf{N})$ gibt, für welche

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\lambda_n \tag{2.1}$$

Eingegangen am 24 Mai, 1984.

ist.

Satz 2.1. *Die Folge* $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *ist genau dann intervallfüllend, falls*

$$\lambda_n \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \tag{2.2}$$

für jedes $n\in\mathbf{N}$ *gilt.*

Beweis. (i) Nehmen wir an, dass $\lambda_n > \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i$ für irgendein $n\in\mathbf{N}$, und es sei $\lambda_n > y > \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i$. Wir zeigen, dass dann die Zahl $x := \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + y \in [0, L]$ sich nicht in der Form (2.1) darstellen lässt, d.h. dass die Bedingung (2.2) notwendig ist. Gilt $\varepsilon_i = 0$ für irgendein $i \leqq n$, so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i \leqq \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i < x,$$

gilt hingegen $\varepsilon_i = 1$ für alle $i \leqq n$, so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i \geqq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > x,$$

d.h. x kann nicht in der Form (2.1) dargestellt werden.

(ii) Es sei $x\in[0, L]$ und wir setzen induktiv $\varepsilon_n = 1$ für $\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \lambda_i + \lambda_n \leqq x$ und $\varepsilon_n = 0$ andernfalls. Wir zeigen, dass $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i < x$ unmöglich ist, d.h. dass x in der Gestalt (2.1) darstellbar ist. Gilt $\varepsilon_n = 0$ für unendlich viele Werte n, dann ist für diese Werte n

$$x - \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i \leqq x - \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i \lambda_i < \lambda_n,$$

woraus wegen $\lambda_n \to 0$ die Darstellung $x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i$ folgt. Gilt $\varepsilon_n = 0$ nur für endlich viele Werte n, so sei N der grösste dieser Werte. Wir haben

$$x - \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i \lambda_i < \lambda_N \leqq \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i = \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i,$$

woraus

$$x < \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \lambda_i$$

folgt, ein Widerspruch.

Definition 2. Es sei $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ eine intervallfüllende Folge. Wir nennen die Zahl $x\in[0, L]$ *eindeutig*, falls es genau eine Folge $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ $(n\in\mathbf{N})$ gibt, für welche (2.1) gilt.

Bemerkung. Offenbar sind 0 und L eindeutige Zahlen.

Definition 3. Wir nennen die intervallfüllende Folge $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *locker*, falls für beliebiges $N\in\mathbf{N}$ die Restfolge $\{\lambda_n\}-\{\lambda_N\}$ intervallfüllend ist.

Bemerkung. Im Falle einer lockeren Folge sei

$$L_N := \sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{\infty} \lambda_n = L-\lambda_N \quad \text{für beliebiges} \quad N\in\mathbf{N}.$$

Dann ist jedes $x\in[0, L_N]$ darstellbar in der Form

$$x = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq N}}^{\infty} \varepsilon_i\lambda_i \quad \text{mit} \quad \varepsilon_i\in\{0, 1\}.$$

Definition 4. Wir nennen die intervallfüllende Folge $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *ergiebig*, falls jede Zahl $x\in]0, L[$ nichteindeutig ist.

Satz 2.2. *Ist die intervallfüllende Folge* $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *locker, so ist sie auch ergiebig.*

Beweis. Es sei $x\in[0, L]$. Dann gibt es eine Folge $\varepsilon_n\in\{0, 1\}$ $(n\in\mathbf{N})$ derart, dass

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\lambda_n. \tag{2.3}$$

(i) Ist in (2.3) $\varepsilon_n=1$ nur endlich viele n erfüllt, so sei N der grösste dieser Werte. Da die Folge intervallfüllend ist, gilt

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n\lambda_n = \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_n\lambda_n+\lambda_N = \sum_{n=1}^{N-1} \varepsilon_n\lambda_n+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n\lambda_n$$

mit $\delta_n\in\{0, 1\}$ $(n\geqq N+1)$. Es ist also x nicht eindeutig.

(ii) Ist in (2.3) $\varepsilon_n=1$ für unendlich viele n erfüllt, so gibt es ein $N\in\mathbf{N}$ mit $\varepsilon_N=1$ und $x<L-\lambda_N=L_N$. Darum gibt es eine Folge $\delta_n\in\{0, 1\}$ $(n\in\mathbf{N}, n\neq N)$ für welche

$$x = \sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{\infty} \delta_n\lambda_n$$

gilt, d.h. x ist nicht eindeutig.

Es sei $1<q<2$ und $\lambda_n:=1/q^n$ $(n\in\mathbf{N})$. Dann ist $\{1/q^n\}\in\Lambda$ und $L:=\sum_{n=1}^{\infty} 1/q^n= =1/(q-1)>1$. Es sei $k\in\mathbf{N}$ festgewählt und $1<q(k)<2$ die Wurzel der Gleichung

$$L-1 = 1/q^k. \tag{2.4}$$

Satz 2.3. *Für* $1<q<2$ *ist die Folge* $\{1/q^n\}\in\Lambda$ *intervallfüllend. Für* $1<q\leqq q(1)$ *ist* $\{1/q^n\}$ *locker, und folglich ergiebig.*

Beweis. (i) Im Falle $1<q<2$ gilt für jedes n

$$1/q^n < (1/q^n)(1/(q-1)) = \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/q^i,$$

so dass wegen Satz 2.1. die Folge $\{1/q^n\}$ intervallfüllend ist.

(ii) Für $1<q\leqq q(1)$ hat man $L-1\geqq 1/q$. Dann ist bei beliebigem festgewählten $N\in\mathbf{N}$ für die Restfolge $\{1/q^n\}-\{1/q^N\}$ (2.2) trivialerweise erfüllt, falls nur $n\geqq N+1$ gilt. Ist hingegen $n<N$, so folgt aus

$$q^n/q^N \leqq 1/q \leqq L-1$$

die Ungleichung

$$1/q^n \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/q^i - 1/q^N,$$

d.h. es gilt (2.2). Somit ist die Folge $\{1/q^n\}$ locker, und wegen Satz 2.2. auch ergiebig.

Satz 2.4. *Für* $q(1)<q<2$ *ist die intervallfüllende Folge* $\{1/q^n\}\in\Lambda$ *nicht ergiebig, also auch nicht locker.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus dem folgenden.

Lemma. *Für* $q(1)<q<2$ *ist die Zahl*

$$x := \sum_{n=1}^{\infty} 1/q^{2n-1} \in]0, L[\tag{2.5}$$

eindeutig.

Beweis des Lemmas. Nehmen wir an, dass die mittels (2.5) definierte Zahl x auch noch eine andere Darstellung der Form (2.1) hat, wobei $\lambda_n := 1/q^n$ ist. Es sei N die erste natürliche Zahl für welche $\varepsilon_N \neq \delta_N$ gilt; hierbei ist $\delta_n=1$ für ungerades n, und $\delta_n=0$ für gerades n. Nun gilt für $\delta_N=0$ (gerades N) $\varepsilon_N=1$, d.h. wegen

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n/q^n = \sum_{n=1}^{N-1} \delta_n/q^n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n/q^n = \sum_{n=1}^{N-1} \delta_n/q^n + 1/q^N + \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n/q^n$$

haben wir

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \delta_n/q^n = 1/q^N + \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n q^n.$$

Daraus folgt

$$(1/q^N)(q/(q^2-1)) = 1/q^N + \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n/q^n \geqq 1/q^N,$$

d.h. $L-1\geqq 1/q$, dies ist aber unmöglich, da im Falle $q(1)<q<2$ die Ungleichung $L-1<1/q$ erfüllt ist. Für $\delta_N=1$ (N ungerade) und für $\varepsilon_N=0$ verläuft der Beweis ähnlich.

3. Über volladditive Funktionen

Es sei $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ eine festgewählte intervallfüllende Folge.

Definition 5. Wir nennen die Funktion $F\colon [0, L]\to\mathbf{R}$ *volladditiv*, falls für jede Folge $\varepsilon_n\in\{0, 1\}$ $(n\in\mathrm{N})$ die Beziehung

$$F\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n F(\lambda_n) \tag{3.1}$$

gilt.

Satz 3.1. *Es sei $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ eine intervallfüllende und ergiebige Folge. Ist $F\colon [0,L]\to\mathbf{R}$ volladditiv, so gibt es ein $c\in\mathbf{R}$ derart, dass*

$$F(x)=cx \tag{3.2}$$

für alle $x\in[0, L]$.

Beweis. Wir setzen

$$\hat{F}(x):=F(x)-F(L)x/L \quad (x\in[0, L]). \tag{3.3}$$

Dann ist $\hat{F}$ volladditiv und es gilt $\hat{F}(0)=\hat{F}(L)=0$. Es sei $\hat{F}(\lambda_n)=:a_n$ und $P:=$ $:=\{n|n\in\mathrm{N},\ a_n>0\}$. Es sei noch

$$\xi:=\sum_{n\in P}\lambda_n. \tag{3.4}$$

Für $\xi\in]0, L[$ gibt es eine Folge $\varepsilon_n\in\{0, 1\}$ derart, dass

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n \tag{3.5}$$

gilt, und die Darstellung (3.5) von der Darstellung (3.4) verschieden ist. Darum existiert ein $n_0\in P$ mit $\varepsilon_{n_0}=0$, woraus wegen (3.1)

$$\hat{F}(\xi)=\hat{F}\Big(\sum_{n\in P}\lambda_n\Big)=\sum_{n\in P}\hat{F}(\lambda_n)=\sum_{n\in P}a_n>$$

$$>\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\hat{F}(\lambda_n)=\hat{F}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n\Big)=\hat{F}(\xi)$$

folgt, was unmöglich ist. Somit haben wir $\xi=0$ oder $\xi=L$, d.h. $P=\emptyset$ oder $P=\mathrm{N}$. Der letztere Fall ist unmöglich, weil dann $\hat{F}(\xi)=\hat{F}(L)>0$ wäre. Ist aber $P=\emptyset$, so gilt $\hat{F}(x)\leqq 0$ für jedes $x\in[0, L]$. Da $-\hat{F}$ ebenfalls volladditiv ist, ergibt sich durch eine Widerholung des vorigen Gedankenganges $-\hat{F}(x)\leqq 0$, woraus $\hat{F}(x)=0$ für jedes $x\in[0, L]$ folgt. Aus (3.3) folgt jetzt mit $c:=F(L)/L$ die Behauptung.

Bemerkung. In Satz 3.1. kann man die Bedingung der Ergiebigkeit durch diejenige der Lockerheit ersetzen.

Korollar 3.1. *Falls* $1<q\leqq q(1)$ *ist und die Funktion* $F\colon [0, L]\to\mathbf{R}$ $(L:=1/(q-1))$ *die Bedingung*

$$F\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n/q^n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n F(1/q^n) \tag{3.6}$$

für jede Folge $\varepsilon_n\in\{0,1\}$ $(n\in\mathbf{N})$ *erfüllt, so gibt es ein* $c\in\mathbf{R}$ *derart, dass* $F(x)=cx$ *für jedes* $x\in[0, L]$ *gilt.*

Beweis. Wegen Satz 2.3. ist jetzt $\{1/q^n\}\in\Lambda$ intervallfüllend und locker (d.h. ergiebig), so dass sich Satz 3.1. anwenden lässt.

Die Beweisidee des Satzes 3.1. ermöglicht es uns, das folgende Resultat auszusprechen:

Satz 3.2. *Es sei* $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *eine intervallfüllende Folge, und* $F\colon [0, L]\to\mathbf{R}$ *eine volladditive Funktion. Ferner sei* $a_n:=F(\lambda_n)$ $(n\in\mathbf{N})$. *Für* $P:=\{n\,|\,n\in\mathbf{N},\ a_n>0\}$ *und* $\xi:=\sum_{n\in P}\lambda_n$ *ist im Falle* $P\neq\emptyset$ *und* $P\neq\mathbf{N}$ *die Grösse* $\xi\in]0, L[$ *eindeutig.*

Beweis. Wegen der Bedingung $P\neq\emptyset$ und $P\neq\mathbf{N}$ gilt $\xi\in]0, L[$. Ist ξ nicht eindeutig, so gibt es eine Folge $\varepsilon_n\in\{0, 1\}$ und $n_0\in P$ derart, dass $\varepsilon_{n_0}=0$ und

$$\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n$$

ist. Daraus folgt auf Grund der Volladditivät

$$F(\xi)=F\Big(\sum_{n\in P}\lambda_n\Big)=\sum_{n\in P}a_n>\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n a_n=F\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\lambda_n\Big)=F(\xi),$$

was einen Widerspruch bedeutet. Folglich ist ξ eindeutig.

Definition 5. Es sei $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ eine intervallfüllende Folge. Für $x\in[0, L]$ sei induktiv nach n

$$\varepsilon_n(x):=\begin{cases}1, & \text{für } \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i(x)\lambda_i+\lambda_n\leqq x,\\ 0, & \text{für } \sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon_i(x)\lambda_i+\lambda_n> x.\end{cases} \tag{3.7}$$

Sodann gilt wegen Satz 2.1.

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n(x)\lambda_n. \tag{3.8}$$

Die Darstellung (3.8) nennen wir die *reguläre* Darstellung von x.

Satz 3.3. *Es sei* $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *eine intervallfüllende Folge. Bei beliebigem* $x\in[0, L]$ *gilt* $\varepsilon_n(x)=0$ *für unendlich viele Werte von* n.

Beweis. Für $x=0$ ist die Behauptung trivial. Es sei $0<x<L$. Dann gibt es in (3.8) ein n mit $\varepsilon_n(x)=0$. Gilt entgegen unserer Behauptung $\varepsilon_n(x)=0$ in (3.8) nur für endlich viele n, so sei N der grösste dieser Werte. Wegen (3.7) ist nun

$$\sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i(x)\lambda_i+\lambda_N > x = \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i(x)\lambda_i + \sum_{i=N+1}^{\infty} \lambda_i$$

in Widerspruch zu (2.2).

Satz 3.4. *Ist* $\{\lambda_n\}\in \Lambda$ *eine intervallfüllende Folge und* $F\colon [0, L]\to \mathbf{R}$ *volladditiv, so gilt für* $a_n:=F(\lambda_n)$ $(n\in \mathbf{N})$ *die Beziehung*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty. \tag{3.9}$$

Beweis. Es sei $P:=\{n\,|\,n\in \mathbf{N},\ a_n>0\}$ und $M:=\mathbf{N}-P$. Dann gilt für

$$\xi := \sum_{n\in P} \lambda_n$$

wegen der Volladditivität

$$F(\xi) = F\Big(\sum_{n\in P} \lambda_n\Big) = \sum_{n\in P} F(\lambda_n) = \sum_{n\in P} |a_n|$$

und

$$F(L-\xi) = F\Big(\sum_{n\in M} \lambda_n\Big) = \sum_{n\in M} F(\lambda_n) = -\sum_{n\in M} |a_n|$$

woraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = F(\xi)-F(L-\xi) < \infty$$

folgt.

Satz 3.5. *Ist* $\{\lambda_n\}\in \Lambda$ *eine intervallfüllende Folge und* $F\colon [0, L]\to \mathbf{R}$ *volladditiv, so ist* F *für beliebiges* $x\in [0, L[$ *rechtsstetig.*

Beweis. Für beliebiges $\varepsilon>0$ gibt es wegen Satz 3.4. ein N derart, dass

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |F(\lambda_i)| < \varepsilon/2. \tag{3.10}$$

Es sei

$$\delta_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n - \sum_{n=N+1}^{\infty} \varepsilon_n(x)\lambda_n,$$

wobei $x=\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n(x)\lambda_n$ eine reguläre Darstellung ist. Wegen Satz 3.3. ist $\delta_N>0$. Falls

$$x < y < x+\delta_N = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n(x)\lambda_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} \lambda_n,$$

so gibt es wegen $y-\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n(x)\lambda_n<\sum_{n=N+1}^{\infty}\lambda_n$ eine Folge $\varepsilon_n^*\in\{0,1\}$ $(n\geqq N+1)$ derart, dass

$$y-\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n(x)\lambda_n=\sum_{n=N+1}^{\infty}\varepsilon_n^*\lambda_n$$

ist, und daraus folgt wegen der Volladditivität von F und wegen (3.10)

$$|F(y)-F(x)|=\Big|\sum_{n=N+1}^{\infty}\varepsilon_n^*F(\lambda_n)-\sum_{n=N+1}^{\infty}\varepsilon_n(x)F(\lambda_n)\Big|\leqq 2\sum_{n=N+1}^{\infty}|F(\lambda_n)|<\varepsilon.$$

Satz 3.6. *Ist* $\{\lambda_n\}\in\Lambda$ *eine intervallfüllende Folge und* $F\colon[0,L]\to\mathbf{R}$ *volladditiv, so ist* F *im abgeschlossenen Intervall* $[0,L]$ *stetig.*

Beweis. Für beliebiges $x\in[0,L]$ hat man wegen der Volladditivität von F

$$F(x)+F(L-x)=F(L). \tag{3.11}$$

Wegen Satz 3.5. ist F für alle $x\in[0,L[$ rechtsstetig, also auf Grund von (3.11) für alle $y\in]0,L]$ linksstetig, und somit stetig auf $[0,L]$.

4. Volladditive Funktionen im Falle spezieller intervallfüllender Folgen

Es sei $1<q<2$ und $\{1/q^n\}\in\Lambda$ eine intervallfüllende Folge. Ist $F\colon[0,L]\to\mathbf{R}$ $(L:=1/(q-1))$ volladditiv (d.h. gilt (3.1) für die Folge $\lambda_n:=1/q^n$), so gilt nach Korollar 3.1. für $1<q\leqq q(1)$ die Beziehung $F(x)=cx$ mit c konstant. Es ist natürlich danach zu fragen, was sich im Falle $q(1)<q<2$ sagen lässt, wenn also wegen Satz 2.4. die Folge $\{1/q^n\}$ nicht ergiebig (nicht locker) ist.

Satz 4.1. *Für* $q=q(k)$ $(k\in\mathbf{N})$ *und volladditives* F *gibt es ein* $c\in\mathbf{R}$ *derart, dass* $F(x)=cx$ *für alle* $x\in[0,1/(q(k)-1)]$ *gilt.*

Beweis. Es sei $k\in\mathbf{N}$ festgewählt und $F\colon[0,L]\to\mathbf{R}$ $(L:=1/(q(k)-1)$ volladditiv. Dann ist auch die Funktion $\hat{F}(x):=F(x)-F(L)x/L$ $(x\in[0,L])$ volladditiv und es gilt $\hat{F}(0)=\hat{F}(L)=0$. Es sei $a_n:=\hat{F}(1/q^n)$ $(n\in\mathbf{N})$ mit $q:=q(k)$. Wegen der Volladditivität gilt

$$0=\hat{F}(L)=\hat{F}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}1/q^n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\hat{F}(1/q^n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \tag{4.1}$$

Auf Grund der Voraussetzung ist

$$1=L-1/q^k=\sum_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}1/q^n$$

woraus für beliebiges $N \in \mathrm{N}$

(4.2) $$1/q^N = \sum_{\substack{n=1\\n\neq k}} 1/q^{N+n}$$

folgt. Aus (4.2) ergibt sich der Volladditivität von $\hat{F}$

(4.3) $$a_N = \sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty} a_{N+n}$$

und

(4.4) $$a_{N+1} = \sum_{\substack{n=1\\n\neq k}}^{\infty} a_{N+n+1}$$

für alle $N \in \mathrm{N}$. Aus (4.3) und (4.4) folgt nun $a_N - a_{N+1} = a_{N+1} + a_{N+k+1} - a_{N+k}$ d.h.

(4.5) $$a_{N+k+1} - a_{N+k} + 2a_{N+1} - a_N = 0$$

für alle $N \in \mathrm{N}$.

Wegen (4.1) ist die Potenzreihe

(4.6) $$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

konvergent für $|z|<1$ und für $z=1$. Indem wir jetzt die Gleichung (4.5) mit der Zahl z^{N+k+1} multiplizieren und für N summieren, erhalten wir unter Berücksichtigung von (4.6) für $|z|<1$ und für $z=1$

$$f(z) - \sum_{i=1}^{k+1} a_i z^i - z\left[f(z) - \sum_{i=1}^{k} a_i z^i\right] + 2^i z^k [f(z) - a_1 z] - z^{k+1} f(z) = 0$$

und daraus folgt

$$f(z)[z^{k+1} - 2z^k + z - 1] = z(z-1) \sum_{i=1}^{k} a_i z^{i-1} + z^{k+1}(-a_{k+1} - 2a_1).$$

Aus der letzteren Gleichung erhalten wir für $z=1$ und unter Berücksichtigung von $f(1)=0$ die Beziehung $-a_{k+1} - 2a_1 = 0$, d.h.

(4.7) $$f(z)[z^{k+1} - 2z^k + z - 1] = z(z-1) \sum_{i=1}^{k} a_i z^{i-1} = z(z-1) Q_{k-1}(z)$$

für alle $|z|<1$, wobei $Q_{k-1}(z)$ ein Polynom von z höchstens $(k-1)$-ten Grades ist.

Wir betrachten jetzt das Polynom

(4.8) $$P(z) := P_{k+1}(z) := z^{k+1} - 2z^k + z - 1$$

für welches $1 < z := q(k) < 2$ wegen $1/(q(k)-1) - 1 = 1/q(k)^k$ eine reelle Wurzel ist. Es sei

(4.9) $$A(z) := z^{k+1} + z \quad \text{und} \quad B(z) := 2z^k + 1.$$

Es ist $A(z)=P(z)+B(z)$ wobei P, B holomorph im abgeschlossenen Einheitskreis $|z|\leqq 1$ sind, ferner ist

$$|A(z)| = |P(z)+B(z)| < |P(z)|+|B(z)| \tag{4.10}$$

für $|z|=1$. Die Ungleichung (4.10) ergibt sich daraus, dass für $|z|=1$

$$|A(z)| = |z|\,|z^k+1| = |z^k+1| < |2z^k+1| = |B(z)|$$

gilt. Darum haben nach dem Satz von Rouché P und B mit Multiplizität gerechnet dieselbe Anzahl von Wurzeln im offenen Einheitskreis $|z|<1$. Da für die Wurzeln von B die Ungleichung $|z|=|\sqrt[k]{-1/2}|<1$ gilt, haben sowohl B als auch P im offenen Einheitskreis genau k Wurzeln. Da $z=0$ und $z=1$ keine Wurzeln von P sind, folgt auf Grund von (4.7), dass sämtliche sich im offenen Einheitskreis befindenden Wurzeln von P auch Wurzeln von $Q_{k-1}(z)$ sind, so dass Q_{k-1} ebenfalls k Wurzeln hat. Dies ist nur möglich falls $Q_{k-1}(z)=0$ für alle z, und so folgt aus (4.7) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n=0$ für $|z|<1$. Somit ergibt sich $a_k=0$ $(n\in\mathrm{N})$. Da nun jedes $x\in[0, L]$ eine Darstellung $x=\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n/q^n$ $(\varepsilon_n\in\{0, 1\})$ zulässt, erhalten wir auf Grund der Volladditivität von $\hat{F}$

$$\hat{F}(x) = \hat{F}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n/q^n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n = 0,$$

woraus $F(x)=cx$ $\big(c:=F(L)/L\big)$ folgt.

Bemerkung. Die Behauptung des Satzes gilt auch für $q=q(1)$. Dies bedeutet einen neuen, von der Beweismethode des Korollars 3.1. verschiedenen Beweis für das vorige $q=q(1)$.

5. Eindeutige Zahlen

Gemäss Satz 2.4. gibt es eindeutige Zahlen für die intervallfüllende Folge $\{1/q^n\}\in\Lambda$, falls $q(1)<q<2$.

Satz 5.1. *Es sei* $q(1)<q<2$. *Falls* $x\in\,]0, 1[$ *für die intervallfüllende Folge* $\{1/q^n\}\in\Lambda$ *eine eindeutige Zahl ist, gilt* .

$$x\in \bigcup_{n=1}^{\infty} [L/q^n, 1/q^{n-1}). \tag{5.1}$$

Beweis. Für $x\in\,]0, 1[$ gibt es ein n derart, dass $x\in A_n:=[1/q^n, 1/q^{n-1})$ ist. Da für $q(1)<q<2$ die Ungleichungen $1/q^n<L/q^n<1/q^{n-1}$ gelten, zeigen wir, dass im Falle $x\in B_n:=[1/q^n, L/q^n)\subset A_n$ die Zahl x nicht eindeutig ist, also für eindeutiges x die Beziehung $x\in[L/q^n, 1/q^{n-1})$ gilt, d.h. (5.1) erfüllt ist.

Dann lässt sich nämlich im Falle $x \in B_n$ wegen

$$1/q^n < \sum_{i=n+1}^{\infty} 1/q^i = L/q^n$$

jedes Element von $[0, L/q^n[$, also auch x, in der Gestalt

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i/q^{n+i} \tag{5.2}$$

schreiben, mit $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ $(i \in \mathrm{N})$. Anderseits hat x die Gestalt $x = 1/q^n + \vartheta$, wobei wegen $0 \leqq \vartheta = x - 1/q^n < L/q^n$ auch ϑ in der Form $\vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i/q^{n+i}$, mit $\delta_i \in \{0, 1\}$ $(i \in \mathrm{N})$ geschrieben werden kann. Darum gilt

$$x = 1/q^n + \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i/q^{n+i}. \tag{5.3}$$

Offenbar ist wegen (5.2) und (5.3) x nicht eindeutig.

Satz 5.2. *Gilt* $q(1) < q \leqq q(2)$ *und ist* $x \in]0, 1[$ *eindeutig in Bezug auf die intervallfüllende Folge* $\{1/q^n\} \in \Lambda$, *so gibt es ein* $N \in \mathrm{N}$ *derart, dass*

$$x = (1/q^{N-1}) \sum_{k=1}^{\infty} 1/q^{2k-1} \tag{5.4}$$

gültig ist.

Beweis. (i) Es sei $x \in [1/q, 1)$ eindeutig. Dann gilt wegen Satz 5.1. $x \in [L/q, 1)$. Da $x = 1/q + Tx/q$ gilt, ist $Tx \in]0, 1[$ eindeutig, weil andernfalls x nicht eindeutig wäre. Anderseits haben wir $Tx \in [L-1, q-1)$, woraus wegen $1/q^2 \leqq L-1 < q-1 \leqq L/q$ (diese Ungleichungen sind für $q(1) < q \leqq q(2)$ richtig) unter Berücksichtigung von Satz 5.1.

$$Tx \in [L/q^2, 1/q)$$

folgt. Daraus ergibt sich, dass

$$Sx := qTx \in [L/q, 1) \subset [1/q, 1)$$

und Sx eindeutig ist, weil Tx eindeutig war. Nun folgt

$$x = 1/q + Sx/q^2, \tag{5.5}$$

wobei $Sx \in [L/q, 1) \subset [1/q, 1)$ eindeutig ist. Wir zeigen mittels Induktion nach n, dass

$$x = \sum_{k=1}^{2n-1} 1/q^{2k-1} + S^n x/q^{2n} \tag{5.6}$$

gilt, wobei $S^n x := S(S^{n-1}x) \in [1/q, 1)$ eindeutig ist. Für $n=1$ ist (5.6) wegen (5.5) erfüllt. Gilt (5.6), so haben wir wegen (5.5)

$$S^n x = 1/q + S^{n+1}x/q^2,$$

wobei $S^{n+1}x \in [1/q, 1)$ eindeutig ist, also gilt

$$x = \sum_{k=1}^{2n-1} 1/q^{2k-1} + (1/q + S^{n+1}x/q^2)/q^{2n} = \tag{5.7}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n-1} 1/q^{2k-1} + 1/q^{2n+1} + S^{n+1}x/q^{2(n+1)},$$

d.h. (5.6) ist auch für $n+1$ richtig. Aus (5.6) folgt wegen $\lim_{n\to\infty} S^n x/q^{2n} = 0$

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} 1/q^{2k-1} \tag{5.8}$$

und zwar ist auf Grund des im Beweis von Satz 2.4. auftretenden Lemmas diese Darstellung tatsächlich eindeutig.

(ii) Falls x in $]0, 1[$ enthalten und eindeutig ist, so gibt es ein $N \in \mathbf{N}$ derart, dass $x \in [1/q^N, 1/q^{N-1})$ gilt. Daraus ergibt sich, dass $q^{N-1}x \in [1/q, 1)$ eindeutig ist, d.h. es gilt wegen (i) notwendigerweise (5.8). Also ist x in der Tat von der Gestalt (5.4).

Bemerkung. Auf Grund der Definition sieht man leicht ein, dass für eindeutiges $x \in]0, L[$ auch $L-x$ eindeutig ist.

6. Volladditive Funktionen im Falle $q(1) < q \leqq q(2)$

Satz 6.1. *Ist $q(1) < q \leqq q(2)$ und $F: [0, L] \to \mathbf{R}$ volladditiv bezüglich der intervallfüllenden Folge $\{1/q^n\} \in \Lambda$ $(L := 1/(q-1))$, so gibt es ein $c \in \mathbf{R}$ derart, dass $F(x) = cx$ für alle $x \in [0, L]$ gilt.*

Beweis. Setzen wir

$$\hat{F}(x) := F(x) - (F(L)/L)x \quad (x \in [0, L]), \tag{6.1}$$

so ist $\hat{F}$ volladditiv und es gilt $\hat{F}(0) = \hat{F}(L) = 0$. Es sei $a_n := \hat{F}(1/q^n)$ $(n \in \mathbf{N})$ und

$$P := \{n \mid n \in \mathbf{N},\ a_n > 0\}.$$

Ferner sei

$$\xi := \sum_{n \in P} 1/q^n.$$

Wir zeigen dass $P \neq \emptyset$ ist. Andernfalls ist $P \neq \emptyset$ und folglich $\xi \in]0, L[$, weil aus $\xi = L$ wegen der Volladditivität von $\hat{F}$ folgen würde, dass $\hat{F}(\xi) = \hat{F}(L) > 0$ ist, also ein Widerspruch. Somit gilt $P\neq\emptyset$ und $P\neq\mathbf{N}$, also ist auf Grund von Satz 3.2. ξ *eindeutig*. Ist nun $x\in]0, L[$ beliebig, so hat man wegen der Volladditivität von $\hat{F}$

(6.2) $$\hat{F}(x)+\hat{F}(L-x) = \hat{F}(L) = 0,$$

woraus $\hat{F}(L/2)=0$ folgt. Daraus ergibt sich $\xi\neq L/2$, d.h. $\xi\in]0, L/2[\cup]L/2, L[$. Auf Grund der Identität (6.2) kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\xi\in]0, L/2[$ voraussetzen. Wegen $q>q(1)$ gilt $L/2<1$, d.h. $\xi\in]0, L/2[\subset]0, 1[$, und auf Grund der Eindeutigkeit von ξ folgt aus Satz 5.2.

(6.3) $$\xi = 1/q^{N-1}\sum_{k=1}^{\infty} 1/q^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} 1/q^{N+2(k-1)}$$

für irgendein $N\in\mathbf{N}$. Es sei

(6.4) $$\alpha := \sum_{k=1}^{\infty} 2/q^{N+4(k-1)}$$

und

(6.5) $$\beta := \sum_{k=1}^{\infty} 2/q^{N+4(k-1)+2}.$$

Dann gilt $\beta<\xi<\alpha$ und

(6.6) $$\alpha+\beta = 2\xi.$$

Lemma. $\hat{F}(\alpha)=2\hat{F}(\alpha/2)$, $\hat{F}(\beta)=2\hat{F}(\beta/2)$.

Beweis des Lemmas. Es sei

(6.7) $$\alpha_i := \sum_{k=i}^{\infty} 2/q^{N+4(k-1)} \quad (i\in\mathbf{N}).$$

Wegen $q\leqq q(2)<q$ hat man

$$q^3-q^2-q-1 < q^3-2q^2+q-1 \leqq 0,$$

woraus $2q^3/(q^4-1)<L$ folgt. Aus (6.7) ergibt sich nun

(6.8) $$\alpha_i = 2q^3/q^{N+4(i-1)-1}(q^4-1) < L/q^{N+4(i-1)-1} \quad (i\in\mathbf{N}).$$

Definitionsgemäss gilt

(6.9) $$\alpha_i = 2/q^{N+4(i-1)}+\alpha_{i+1} \quad (i\in\mathbf{N})$$

und wegen (6.8)

$$\alpha_i^* := 1/q^{N+4(i-1)}+\alpha_{i+1} = \alpha_i-1/q^{N+4(i-1)} <$$

$$< L/q^{N+4(i-1)-1}-1/q^{N+4(i-1)} = (Lq-1)/q^{N+4(i-1)} = L/q^{N+4(i-1)},$$

woraus wir wegen Satz 5.1. die Darstellung

$$\alpha_i^* = \sum_{k=N+4(i-1)+1} \varepsilon_k/q^k \quad (\varepsilon_k\in\{0, 1\})$$

entnehmen, d.h. wegen der Volladditivität von $\hat{F}$ und wiederum wegen Satz 5.1. gilt

$$\hat{F}(\alpha_i) = \hat{F}(1/q^{N+4(i-1)}+\alpha_i^*) = \hat{F}(1/q^{N+4(i-1)})+\hat{F}(\alpha_i^*) =$$
$$= \hat{F}(1/q^{N+4(i-1)})+\hat{F}(1/q^{N+4(i-1)}+\alpha_{i+1}) = 2\hat{F}(1/q^{N+4(i-1)})+\hat{F}(\alpha_{i+1}).$$

Aus der vorigen Gleichung erhalten wir

$$\hat{F}(\alpha_i) = 2a_{N+4(i-1)}+\hat{F}(\alpha_{i+1}) \quad (i\in\mathrm{N}). \tag{6.10}$$

Aus (6.10) erhalten wir mittels Induktion $(\alpha_1=\alpha)$ für beliebiges $K\in\mathrm{N}$

$$\hat{F}(\alpha) = 2\sum_{i=1}^{k} a_{N+4(i-1)}+\hat{F}(\alpha_{K+1}),$$

woraus für $K\to\infty$ wegen der Stetigkeit von $\hat{F}$ im Nullpunkt

$$\hat{F}(\alpha) = 2\sum_{i=1}^{\infty} a_{N+4(i-1)} = 2\hat{F}(\alpha/2)$$

folgt. Für β verläuft der Beweis ganz ähnlich.

Fortsetzung des Beweises des Satzes. Mit Rücksicht auf das Lemma folgt aus (6.6)

$$\hat{F}(\alpha)+\hat{F}(\beta) = 2\hat{F}(\alpha/2)+2\hat{F}(\beta/2) = 2\hat{F}(\xi).$$

Anderseits gelten nach der Definition von ξ die Ungleichungen $\hat{F}(\alpha)<\hat{F}(\xi)$ und $\hat{F}(\beta)<\hat{F}(\xi)$, womit wir auf einen Widerspruch gestossen sind. Es gilt also $P=\emptyset$, und daraus folgt $\hat{F}(x)\leqq 0$ für alle $x\in[0, L]$. Indem wir diesen Gedankengang für $-\hat{F}$ wiederholen, erhalten wir $-\hat{F}(x)\leqq 0$ und somit gilt $\hat{F}(x)=0$ für jedes $x\in[0, L]$. Hieraus folgt nun wegen (6.1) die Behauptung des Satzes.

Literatur

[1] Z. Daróczy, A. Járai, I. Kátai, On functions defined by digits of real numbers, *Acta Math. Hung.*, in print.

(Z. D. und A. J.)
MATHEMATISCHES INSTITUT
L. KOSSUTH UNIVERSITÄT
PF. 12
4010 DEBRECEN, UNGARN

(I. K.)
MATHEMATISCHES INSTITUT
L. EÖTVÖS UNIVERSITÄT
MÚZEUM KRT. 6—8
1088 BUDAPEST, UNGARN