Acta Sci. Math., 52 (1988), 101—111

Об одном интерполяционном процессе Эрмита—Фейера при ультрасферических узлах

Д. Л. БЕРМАН

1. Пусть C множество всех функций, непрерывных в $[-1, 1]$. Для матрицы чисел

$$\text{(m)}\qquad \{x_k^{(n)}\},\quad k=\overline{1,n},\quad n=1,2,\ldots,\quad -1<x_n^{(n)}<x_{n-1}^{(n)}<\ldots<x_1^{(n)}<1,$$

строим полином $H_n(f,x)$ степени $2n-1$, однозначно определяющийся из условий $H_n(f,x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)})$, $H_n'(f,x_k^{(n)})=0$, $k=1,2,\ldots,n$. Классическая теорема Л. Фейера [1] утверждает, что, если n-я строчка матрицы (m) состоит из чисел

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\quad k=1,2,\ldots,n,\quad n=1,2,\ldots, \tag{1}$$

то для любой $f\in C$ выполняется равномерно в $[-1, 1]$ соотношение

$$H_n(f,x)\to f(x),\quad n\to\infty. \tag{2}$$

Хорошо известно, что процесс $\{H_n(f,x)\}$ называется интерполяционным процессом Эрмита—Фейера.

Пусть полином $H_n(f,x)$ построен для n-й строчки произвольной матрицы узлов вида (m). Наряду с полиномом $H_n(f,x)$ рассмотрим полином $F_n(f,x)$ степени $2n+3$, который однозначно определяется из условий

$$F_n(f,x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)});\quad F_n(f,\pm1)=f(\pm1);\quad F_n'(f,x_k^{(n)})=F_n'(f,\pm1)=0,$$
$$k=1,2,\ldots,n.$$

В [2]—[3] автор изучал процесс $\{F_n(f,x)\}$ для случая узлов

$$x_0^{(n+2)}=1;\ x_k^{(n+2)}=\cos\big((2k-1)\pi/2n\big),\quad k=\overline{1,n},\quad x_{n+1}^{(n+2)}=-1,\quad n=1,2,\ldots.$$

Оказалось, что этот процесс, построенный для $f(x)=|x|$, расходится в точке $x=0$. В [4] было доказано, что он расходится всюду в $(-1, 1)$. Такое же утверж-

Поступило 5-ого декабря 1984.

дение имеет место для $f(x)=x^2$ и для $f(x)=x$ при $x\neq 0$ [5]—[6]. В [7]—[8] изучался процесс Эрмита—Фейера при узлах

$$(\mathrm{m}_1)\qquad x_0^{(n+1)}=1,\quad x_k^{(n+1)}=\cos((2k-1)\pi/2n),\quad k=\overline{1,n},\quad n=1,2,\ldots,$$

$$(\mathrm{m}_2)\qquad x_{n+1}^{(n+1)}=-1,\quad x_k^{(n+1)}=\cos((2k-1)\pi/2n,\quad k=\overline{1,n},\quad n=1,2,\ldots,$$

Было доказано, что процесс Эрмита—Фейера, построенный для $f(x)=|x|$ при узлах (m_1) расходится в каждой точке из $[-1, 1)$. Если же этот процесс построить при узлах (m_2), то он расходится всюду в $(-1, 1]$.

На первый взлгяд может показаться, что эти отрицательные результаты связаны с отсутствием производной у функции $f(x)=|x|$ в точке $x=0$. Но это не так, ибо в [9] установлено, что процесс Эрмита—Фейера при узлах (m_1) для $f(x)=x$ расходится всюду в $[-1, 1)$. С другой стороны, простой проверкой можно убедиться, что процесс Эрмита—Фейера при узлах (m_1) для $f(x)=(x-1)^2$ сходится равномерно в $[-1, 1]$. Поэтому возникает вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий для функции для равномерной сходимости процесса Эрмита—Фейера при матрице узлов (m_1). Аналогичный вопрос возникает для матрицы узлов (m_2). Этим вопросам, в основном, и посвящена эта заметка. Аналогичная задача возникает также для процесса $\{F_n(f, x)\}$. Она изучалась в [10]. Рассмотрение будем вести для некоторого класса матриц узлов, включающего матрицы узлов из корней ультрасферических полиномов $\{J_n^{(\alpha)}(x)\}$, где $-1/2\leq\alpha<0$. Недавно R. Bojanic [13] изучал эту задачу для узлов (1), что соответствует тому, что $\alpha=-1/2$. Следует подчеркнуть, что наше рассмотрение совершенно элементарное и не пользуется асимптотическими формулами для полиномов Якоби.

2. Хорошо известно, что при любой матрице узлов (m) полином $H_n(f, x)$ может быть представлен в виде

$$(3)\qquad H_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})h_k^{(n)}(x),\quad h_k^{(n)}(x)=h_k(x)=[l_k^{(n)}(x)]^2V_k^{(n)}(x),$$

$$l_k^{(n)}(x)=l_k(x)=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_k^{(n)})\omega_n'(x_k^{(n)})},\quad \omega_n(x)=\omega(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k^{(n)}),$$

$$V_k^{(n)}(x)=V_k(x)=1-\omega''(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})(\omega'(x_k^{(n)}))^{-1}.$$

Из однозначности полинома $H_n(f, x)$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} h_k^{(n)}(x)=1,\quad n=1,2,\ldots$$

Будем говорить, что матрица узлов (m) обладает свойством (F), если выполняются условия:

1) $h_k^{(n)}(1) \geqq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad n = 1, 2, \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(n)} h_k^{(n)}(1) = 1;$

3) существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(1)]^2.$

Обозначим через Δ подмножество из C, состоящее из всех функций $f(x)$, имеющих левую производную $f'(1)$. Введем функционал

$$\alpha_n(f) = H_n'(f, 1)/2 + (\omega_n'(1)/\omega_n(1))[f(1) - H_n(f, 1)], \tag{4}$$

где $\omega_n(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (x - x_i^{(n)})$ и числа $\{x_i^{(n)}\}_{i=1}^{n}$ составляют n-ую строчку матрицы (m). Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Пусть функционал* $\alpha_n(f)$ *построен при матрице узлов* (m), *обладающей свойством* (F). *Тогда для любой* $f \in \Delta$ *существует конечный* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(f)$ *и выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n(f) = ((1+d)/2) f'(1), \tag{5}$$

где $d = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} [l_i^{(n)}(1)]^2.$

Доказательство. Мы часто опускаем верхний индекс n ради простоты письма. Очевидно, что $d \geqq 0$ — конечное число. Из (3) получим, что

$$H_n'(f, 1) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) [l_k^2(1) V_k'(1) + 2 l_k(1) l_k'(1) V_k(1)]. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$l_k^2(1) V_k'(1) = -\frac{\omega_n^2(1)\omega_n''(x_k)}{(\omega_n'(x_k))^3 (1-x_k)^2}.$$

После простых вычислений имеем

$$l_k'(1) = -\frac{\omega_n(1)}{\omega_n'(x_k)(1-x_k)^2}\left(1 - \frac{\omega_n'(1)}{\omega_n(1)}(1-x_k)\right).$$

Поэтому

$$l_k^2(1) V_k'(1) + 2 l_k(1) l_k'(1) V_k(1) = \left(\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} - \frac{2}{1-x_k}\right) l_k^2(1) + \frac{2\omega'(1)}{\omega(1)} h_k(1).$$

Отсюда и из (6) получим, что

$$(7)\qquad H_n'(f,1) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{1-x_k}h_k(1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{1-x_k}l_k^2(1) + \frac{2\omega'(1)}{\omega(1)}H_n(f,1).$$

Из (4) и (7) вытекает, что

$$(8)\qquad \alpha_n(f) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{1-x_k}h_k(1) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{1-x_k}l_k^2(1) + \frac{\omega'(1)}{\omega(1)}f(1).$$

Положим в (8) $f(x)\equiv 1$ и учтем, что из (4) следует, что в этом случае $\alpha_n(f)=0$. Стало быть, из (8) выводим, что

$$(9)\qquad \frac{\omega'(1)}{\omega(1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_k}h_k(1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-x_k}l_k^2(1).$$

Подставляя (9) в (8), получим, что

$$(10)\qquad \alpha_n(f) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(1)-f(x_k)}{1-x_k}h_k(1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(1)-f(x_k)}{1-x_k}l_k^2(1) = S_1^{(n)} + S_2^{(n)}.$$

По условию существует $f'(1)$. Поэтому по $\varepsilon>0$ можно найти такое $\delta>0$, что

$$(11)\qquad \left|\frac{f(1)-f(x_k)}{1-x_k} - f'(1)\right| < \varepsilon,$$

если $1-x_k<\delta$. Так как $\sum_{k=1}^{n}h_k(1)=1$, то

$$(12)\qquad S_1 - \frac{f'(1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f(1)-f(x_k)}{1-x_k} - f'(1)\right)h_k(1).$$

Из (11) и (12) вытекает, что

$$(13)\qquad \left|S_1 - \frac{f'(1)}{2}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}\sum_{1-x_k<\delta}|h_k(1)| + \frac{1}{2}\sum_{1-x_k\geqq\delta}\left|\frac{f(1)-f(x_k)}{1-x_k} - f'(1)\right| |h_k(1)|.$$

Согласно условию 1) теоремы 1 $h_k(1)\geqq 0$, $k=\overline{1,n}$. Поэтому из (13) получаем, что

$$(14)\qquad |S_1 - f'(1)/2| \leqq \varepsilon/2 + (1/2)\big(2\|f\|/\delta + |f'(1)|\big)\sum_{1-x_k\geqq\delta}h_k(1),$$

где $\|f\| = \max\limits_{-1\leqq x\leqq 1}|f(x)|$. Заметим, что

$$(15)\qquad \sum_{1-x_k\geqq\delta}h_k(1) \leqq (1/\delta)\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)h_k(1),$$

и что для матрицы обладающей свойством (F)

(16) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1-x_k^{(n)}) h_k^{(n)}(1) = 0.$$

Из (14) и (15—(16) выводим, что

(17) $$\lim_{n\to\infty} S_1^{(n)} = f'(1)/2.$$

Рассмотрим теперь $S_2^{(n)}$. Очевидно, что

(18) $$S_2^{(n)} - \frac{f'(1)\,d_n}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n}{}' \left(\frac{f(1)-f(x_k)}{1-x_k} - f'(1) \right) l_k^2(1),$$

где $d_k = \sum_{k=1}^{n} l_k^2(1)$. Ясно, что

(19) $$\left| S_2^{(n)} - \frac{f'(1)\,d_n}{2} \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} l_k^2(1) + \frac{1}{2} \sum_{1-x_k \geqq \delta} \left| \frac{f(1)-f(x_k)}{1-x_k} - f'(1) \right| l_k^2(1).$$

Поскольку матрица узлов обладает свойством (F), то существует такая константа $C_1 > 0$, что $\sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(1)]^2 \leqq C_1$, $n = 1, 2, \dots$. Поэтому из (19) выводим

(20) $$|S_2^{(n)} - f'(1)\,d_n/2| \leqq \varepsilon C_1/2 + (1/2)(2\|f\|/\delta + |f'(1)|) \sum_{1-x_k \geqq \delta} l_k^2(1).$$

Очевидно, что

(21) $$\sum_{1-x_k \geqq \delta} l_k^2(1) \leqq (1/\delta) \sum_{k=1}^{n} (1-x_k) l_k^2(1).$$

Из тождества

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} (x-x_k)\, l_k^2(x)$$

следует, что

(22) $$\sum_{k=1}^{n} (1-x_k) l_k^2(1) = 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k h_k(1).$$

Из условия 2) матрицы узлов, обладающей свойством (F) и из (22) получим, что

(23) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (1-x_k^{(n)}) [l_k^{(n)}(1)]^2 = 0.$$

Поэтому из (20), (21), (23) выводим, что

(24) $$\lim_{n\to\infty} S_2^{(n)} = f'(1)\, d/2,$$

ибо $\lim_{n\to\infty} d_n = d$. Из (10), (17), (24) вытекает (5).

3. Интерполяционный полином $Q_n(f, x)$ Эрмита—Фейера степени $2n+1$ для точек $x_n^{(n)} < x_{n-1}^{(n)} < \ldots < x_1^{(n)} < 1$ определяется однозначно из условий

$$Q_n(f, x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}),\quad Q_n'(f, x_k^{(n)}) = 0,\quad k = \overline{1, n},\quad Q_n(f, 1) = f(1),\quad Q_n'(f, 1) = 0.$$

Положим

$$(25)\qquad r_n(f, x) = r_n = Q_n(f, x) - H_n(f, x).$$

Из определения полиномов $Q_n(f, x)$ и $H_n(f, x)$ имеем, что

$$(26)\qquad r_n = \omega^2(x)(Ax+B),$$

где A и B определяются из системы уравнений

$$\omega^2(1)(A+B) = f(1) - H_n(f, 1),$$
$$2\omega(1)\omega'(1)(A+B) + A\omega^2(1) = -H_n'(f, 1).$$

Отсюда и из (26), после простых вычислений, получим, что

$$(27)\qquad r_n = 2(\omega_n^2(x)/\omega_n^2(1))(1-x)\alpha_n(f) + (\omega_n^2(x)/\omega_n^2(1))(f(1) - H_n(f, 1)),$$

где $\alpha_n(f)$ определяется согласно (4). Теперь можно доказать следующую теорему*.

Теорема 1. *Пусть интерполяционный процесс* $\{Q_n(f, x)\}$ *построен для* $f \in \Delta$ *при матрице узлов* (m), *обладающей свойствами:*

1) $h_k^{(n)}(x) \geqq 0$, $|x| \leqq 1$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=2}^{n} (x_k^{(n)})^i h_k^{(n)}(x) = x^i$, $i = 1, 2$, *равномерно в* $[-1, 1]$.

3) *Существует конечный предел* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(1)]^2$.

4) *Выполняется неравенство* $|\omega_n(x)| \leqq C_2 |\omega_n(1)|$, *где* $|x| \leqq 1$, C_2 — *константа.*

5) $|\omega_n(-1)| = |\omega_n(1)|$, *где* $\omega_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)})$ *и* $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$ *составляют* n*-ую строчку матрицы* (m).

Тогда для равномерной сходимости процесса $\{Q_n(f, x)\}$ *к* $f(x)$ *в* $[-1, 1]$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $f'(1) = 0$.

Доказательство. Докажем сперва достаточность. Из (3) и из условия 1) теоеремы 1 следует, что оператор $H_n(f, x)$ положительный. Поэтому из условия 2) теоремы 1 и из равенства $\sum\limits_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$, в силу теоремы П. П. Коровкина

---

*) Отметим, что все результаты этой статьи без труда переносятся на случай, когда процесс Эрмита—Фейера строится для матрицы узлов $-1 < x_n^{(n)} < x_{n-1}^{(n)} < \ldots < x_1^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$. Условие $f'(1) = 0$ заменяется условием $f'(-1) = 0$.

[12], заключаем, что для любой $f\in C$ выполняется равномерно в $[-1, 1]$ соотношение $H_n(f, x)\to f(x)$, $n\to\infty$.

Стало быть, нужно доказать, что при $f'(1)=0$ выполняется в $[-1, 1]$ равномерно соотношение

$$(28)\qquad r_n(f, x)\to 0,\quad n\to\infty.$$

Из условий теоремы 1 непосредственно следует, что

$$(29)\qquad |r_n(f, x)|\leqq 4C_2|\alpha_n(f)|+C_2|f(1)-H_n(f, 1)|.$$

Ясно, что матрица узлов обладает свойством (F). Поэтому применима лемма. Отсюда, поскольку $f'(1)=0$, то получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(f)=0$. Кроме того, из (2) следует, что $f(1)-H_n(f, 1)\to 0$, $n\to\infty$. Поэтому из (29) вытекает (28).

Необходимость. Положим в (27) $x=-1$ и учтем, что по условию $|\omega_n(-1)|=|\omega_n(1)|$. Поэтому из (27) получим, что

$$(30)\qquad Q_n(f, -1)-H_n(f, -1) = 4\alpha_n(f)+\big(f(1)-H_n(f, 1)\big).$$

По условию $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(f, -1)=f(-1)$. Кроме того, согласно 2) имеем $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(f, \pm 1)=f(\pm 1)$. Стало быть, из (30) заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(f)=0$. Отсюда в силу леммы выводим, что $((1+d)/2)f'(1)=0$. Так как $d\geqq 0$, то отсюда получаем, что $f'(1)=0$.

4. Пусть n-я строчка матрицы (m) состоит из корней полинома $\omega_n(x)=$ $=\omega(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i^{(n)})$. Согласно Л. Фейеру [11] матрица (m) является ϱ-нормальной, если существует такое число $\varrho>0$, что всюду в $[-1, 1]$ выполняется неравентсво

$$V_k(x) = 1-(x-x_k^{(n)})\omega_n''(x_k^{(n)})\big(\omega_n'(x_k^{(n)})\big)^{-1} > \varrho > 0,\quad k=\overline{1, n},\quad n=1, 2, \ldots,$$

где $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{n}$ — корни $\omega_n(x)$. Л. Фейер [11] доказал, что, если матрцца (m) составлена из корней полиномов Якоби $J_n^{(\alpha_n, \beta_n)}(x)$, где $-1<\alpha_n$, $\beta_n<-\gamma<0$, $n=1, 2, \ldots$, а γ — сколь угодно малое фиксированное число, то она ϱ-нормальная. Г. Грюнвальд [14] доказал, что при ϱ-нормальной матрице узлов (m) для любой $f\in C$ выполняется в $[-1, 1]$ равномерно соотношение (2). Поэтому из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть матрица узлов* (m) *ϱ-нормальная и пусть выполняются условия* 3), 4), 5) *из теоремы* 1. *Тогда для равномерной сходимости процесса* $\{Q_n(f, x)\}$ *к* $f(x)$ *в* $[-1, 1]$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $f'(1)=0$. Дадим приложение теоремы 2 к случаю, когда матрица узлов (m) составлена из корней ультрасферических полиномов $J_n^{(\alpha)}(x)$, $-1/2\leqq\alpha<0$. Для этого нужна следующая теорема Л. Фейера [15]

Теорема (Л. Фейера). *Если n-я строчка матрицы* (m) *составлена из корней полинома Якоби* $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $n=1, 2, \ldots$ *и* α, β *удовлетворяют неравенствам* $-1<\alpha, \beta<0$, *то справедливы равентсва*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(1)]^2 = -1/\alpha; \tag{31}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(-1)]^2 = -1/\beta; \tag{32}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(x)]^2 = 1, \quad |x| < 1. \tag{33}$$

У Фейера [15] равенства (31) и (32) имеют следующий вид:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(1)]^2 = 1/(1-2\beta); \tag{34}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(-1)]^2 = 1/(1-2\alpha), \tag{35}$$

ибо он пользуется обозначениями Стилтьеса [16], где α и β соответствуют в наших обозначениях $(\beta+1)/2$ и $(\alpha+1)/2$. Равенства (34) и (35) приводятся также в работе Г. Грюнвальда [14]. По поводу доказательства этой теоремы Фейер [15] пишет „Auf dem beweis werde ich hier nicht eingehen". У Грюнвальда [14] также нет доказательства. Мне неизвестно, где изложено доказательство упомянутой теоремы Фейера. Поэтому я здесь вкратце изложу её доказательство. Идея этого доказательства, для случая полиномов Лежандра, принадлежит Л. Фейеру [15].

Рассмотрим сперва случай, когда $x=1$. Введем функцию

$$f(x) = (1+x)/\varphi(x), \tag{36}$$

где $\varphi(x)=(1+\beta)(1-x)-\alpha(1+x)$. Очевидно, что $\varphi(-1)=2(1+\beta)>0$, ибо $\beta>-1$. $\varphi(1)=-2\alpha<0$, ибо по условию $\alpha<0$. Поскольку $\varphi(x)$ — линейная функция от x, то отсюда заключаем, что $\varphi(x)>0$, в $[-1, 1]$. Значит функция (36) непрерывна в $[-1, 1]$. Поэтому согласно упомянутой теореме Г. Грюнвальда [14] выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) V_k^{(n)}(1) [l_k^{(n)}(1)]^2 = f(1). \tag{37}$$

Но функция (36) выбрана так, что $f(x_k^{(n)}) V_k^{(n)}(1)=1$, $k=\overline{1, n}$, $n=1, 2, \ldots$. Стало быть, (37) принимает вид:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(1)]^2 = -1/\alpha.$$

Аналогичным образом доказывается равенство (32). Докажем теперь равенство (33). Итак, пусть a — фиксированное число из $(-1, 1)$. Введем функцию

(38) $$f_1(x) = (1-x^2)/\varphi_1(x),$$

где $\varphi_1(x)=\varphi_1(x, \alpha, \beta)=(\alpha+\beta+1)x^2+[(\alpha-\beta)-(\alpha+\beta+2)a]x+1-a(\alpha+\beta)$. Поскольку $\varphi_1(x, \alpha, \beta)$ — линейная функция от α и β, то нетрудно проверить, что при $x\in[-1, 1]$, $-1+\gamma_1\leqq\alpha\leqq 0$, $-1+\gamma_1\leqq\beta\leqq 0$, $\varphi(x, \alpha, \beta)>0$, при этом $\gamma_1>0$ — сколь угодно малое число. Согласно теореме Г. Грюнвальда [14] имеем, что

(39) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_1(x_k^{(n)})V_k^{(n)}(a)[l_k^{(n)}(a)]^2 = f_1(a), \quad |a|<1,$$

ибо $f_1(x)$ непрерывна в $[-1, 1]$. Функция $f_1(x)$ выбрана таким образом, что $f_1(x_k^{(n)})V_k^{(n)}(a)=1$, $k=\overline{1, n}$. Поэтому (39) принимает вид:

(40) $$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[l_k^{(n)}(a)]^2 = f_1(a), \quad |a|<1.$$

Из (38) видно, что $f_1(a)=1$. Поэтому (40) совпадает с (33).

Пользуясь теоремой Л. Фейера [15] можно доказать такую теорему

Теорема 3. *Пусть n-я строчка матрицы* (m) *состоит из корней ультрасферических полиномов* $J_n^{(\alpha)}(x)$, *где*

(41) $$-1/2 \leqq \alpha < 0,$$

и пусть $f\in\Delta$. *Тогда для равномерной сходимости процесса* $\{Q_n(f, x)\}$ *к* $f(x)$ *в* $[-1, 1]$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие* $f'(1)=0$.

Доказательство. Эта теорема непосредственно следует из теоремы 2, ибо все условия теоремы 2 выполнены. Действительно, при выполнении (41) матрица узлов (m) ϱ-нормальная. Как известно, при $\alpha\geqq -1/2$, $|J_n^{(\alpha)}(x)|\leqq|J_n^{(\alpha)}(1)|$, $|x|\leqq 1$. Стало быть, выполняется условие 4) из теоремы 1. Для ультрасферических полиномов $|J_n^{(\alpha)}(-x)|=|J_n^{(\alpha)}(x)|$. Поэтому выполняется условие 5) из теоремы 1. В силу (41) и (31) выполняется условие 3) из теоремы 1. Итак, теорема 3 доказана.

В связи с этой теоремой возникает вопрос о нахождении аналога этой теоремы, когда неравенства (41) заменяются условием $\alpha\in(-1, \infty)\setminus[-1/2, 0)$. Вероятно, для решения этого вопроса будут полезные исследования Szabados [17] и P. Vértesi [18]—[19].

Замечание. Как видно из доказательства леммы условие, что существует конечный $\lim\limits_{n\to\infty} d_n=d<\infty$ можно заменить условием, что существует

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, d_n = d < \infty$ и тогда равенство (5) заменится равенством

$$\lim_{n\to\infty} \bigl(\alpha_n(f) - ((1+d_n)/2)f'(1)\bigr) = 0,$$

которое достаточно для доказательства теореамы 1. Поэтому в теореме 1 можно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = d < \infty$ заменить равенством $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, d_n = d < \infty$. Хорошо известно [11], что для ϱ-нормальной матрицы узлов $d_n \leqq 1/\varrho$. Поэтому в этом случае $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, d_n < \infty$. Стало быть, из теоремы 2 можно исключить условие 3). Л. Фейер [11] доказал что, если матрица узлов (m) составлена из корней полиномов Якоби $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, где $-1 < \alpha, \beta < -\gamma$, γ — сколь угодно малое фиксированное число, то

$$\sum_{k=1}^{n} [l_k^{(n)}(x)]^2 \leqq \max(-1/\alpha, -1/\beta), \quad |x| \leqq 1,$$

Поэтому при доказательстве теоремы 3 можно обойтись без теоремы Л. Фейера (см. стр. 7). Выражаю благодарность референту за полезные замечания.

Литература

[1] L. Fejér, Über Interpolation, *Gött. Nachr.*, **1916**, 66—91.

[2] Д. Л. Берман, К теории интерполяции, *ДАН СССР*, **163** (1965), 551—554.

[3] Д. Л. Берман, К теории интерполяции функции действительного переменного, *Известия вузов, Матем.*, **1967**, №1, 15—20.

[4] Д. Л. Берман, Всюду расходящийся расширенный интерполяционный процесс Эрмита—Фейера, *Известия вузов, Матем.*, **1975**, №9, 84—87.

[5] Д. Л. Берман, Исследование интерполяционного процесса Эрмита—Фейера, *ДАН СССР*, **187**, (1969), 241—244.

[6] Д. Л. Берман, Об одном всюду расходящемся интерполяционном процессе Эрмита—Фейера, *Известия вузов, Матем.*, **1970**, №1, 3—8.

[7] Д. Л. Берман, К теории интерполяции функции действительного переменного, *Известия вузов, Матем.* **1969**, №8, 10—16.

[8] Д. Л. Берман, Всюду расходящиеся интерполяционные процессы Эрмита—Фейера, *Известия вузов, Матем.*, **1978**, №7, 3—4.

[9] Д. Л. Берман, Исследоваиие сходимости всевозможных вариантов расширенного интерполяционного процесса Эрмита—Фейера, *Известия вузов, Матем.*, **1975**, №8, 97—101.

[10] Д. Л. Берман, О расширенном интерполяционном процессе Эрмита—Фейера, *Известия вузов, Матем.*, **1981**, №8, 5—13.

[11] L. Fejér, Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte, *Math. Ann.*, **106** (1932), 1—55.

[12] П. П. Коровкин, *Линейные операторы и теория приближений*, Физматгиз (Москва, 1959).

[13] R. Bojanic, Necessary and sufficient conditions for the convergence of the extended Hermite—Fejér interpolation process, *Acta Math. Hung.*, **36** (1980), 271—279.

[14] G. Grünwald, On the theory of interpolation, *Acta Math.*, **75** (1943), 219—245.

[15] L. Fejér, Bestimmung derjenigen Abszissen eines Intervalles, für welche die Quadratsumme der Grundfunktionen ein möglichst kleines Maximum besitzt, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (2), **1** (1932), 263—276.

[16] Г. Сеге, *Ортогональные многочлены* (Москва, 1962).

[17] J. Szabados, On Hermite—Fejér interpolation for the Jacobi abscissas, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **23** (1972), 449—464.

[18] P. Vértesi, Hermite—Fejér type interpolation. III, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **34** (1979), 67—84.

[19] P. Vértesi, Hermite—Fejér type interpolation. IV. (Convergence criteria for Jacobi abscissas), *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **39** (1982), 83—93.

БАССЕЙНАЯ УЛ. 68, КВ. 90.
192238 ЛЕНИНГРАД-238, СССР