Acta Sci. Math., 52 (1988), 373—386

О подсистемах сходимости произвольной ортонормированной системы

Г. А. КАРАГУЛЯН

Известна следующая теорема, доказанная в 1936 г. независимо Д. Е. Меньшовым и И. Марцинкевичем:

Теорема А. (см. [1], [2]). *Для любой ортонормированной системы (ОНС) $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0, 1)$ существуют номера $n_1<n_2<\ldots$ такие, что подсистема $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой сходимости (ОНС $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется системой сходимости, если всякий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2<\infty$$

сходится почти всюду).

По этому поводу в работе [3] Г. Беннетом был поставлен следующий вопрос: существует ли последовательность чисел $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что из лыбой ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{n_k}{r_k}=0$?

В работе [4] Б. С. Кашиным дан положительный ответ на этот вопрос. В ней сформулирована следующая.

Теорема В. *Из произвольной ОНС $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ можно извлечь подсистему сходимости $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ с $n_k<R_k$ $(k=1, 2, \ldots)$, где $R_1=3$, $R_{k+1}=(R_k)!$ $(k=1, 2, \ldots)$.*

В той же работе ([4]) Б. С. Кашин поставил следующий вопрос: можно ли в формулировке теоремы В условие $n_k<R_k$ заменить на $n_k<k^{1+\varepsilon}$ $(k=1, 2, \ldots)$ для любого $\varepsilon>0$?

В настоящей работе усилен результат теоремы В. Точнее, доказывается следующая

Поступило 16 августа 1985.

Теорема. *Для любой ОНС* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0,1)$ *и любого* $\beta>0$ *существует подсистема сходимости* $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *с условием*

$$n_1=1,\ 2^{(2+\beta)(k-1)\log_2(k-1)}<n_k\leqq 2^{(2+\beta)k\log_2 k}\quad (k=2,3,\ldots).$$

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$, $x\in(0,1)$ *конечная ОНС и* $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ *семейство измеримых множеств из* $(0,1)$. *Тогда существует целое число* $1\leqq k\leqq n$ *такое, что*

$$\frac{1}{\mu(E_p)}\left|\int_{E_p}\varphi_k(t)\,dt\right|\leqq\sqrt{\frac{m}{n\cdot\min\limits_{1\leqq i\leqq m}\mu(E_i)}},\quad p=1,2,\ldots,m$$

(μ-*мера Лебега на* $(0,1)$).

Доказательство. Предположим обратное, что для любого $1\leqq k\leqq n$ существует, зависящее от k, число $1\leqq p(k)\leqq m$ такое, что

$$\frac{1}{\mu(E_{p(k)})}\left|\int_{E_{p(k)}}\varphi_k(t)\,dt\right|>\sqrt{\frac{m}{n\cdot\min\limits_{1\leqq i\leqq m}\mu(E_i)}}\quad (1\leqq k\leqq n).\tag{1}$$

Тогда легко убедится, что для некоторого $1\leqq q\leqq m$ равенство $p(k)=q$ выполняется при некоторых различных $k=k_1,k_2,\ldots,k_l$, где $l\geqq\frac{n}{m}$. И следовательно, для этого q имеем (см. (1))

$$\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{\mu(E_q)}\int_{E_q}\varphi_{k_i}(t)\,dt\right)^2=\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{\mu(E_{p(k_i)})}\int_{E_{p(k_i)}}\varphi_{k_i}(t)\,dt\right)^2>\tag{2}$$

$$>l\left(\sqrt{\frac{m}{n\cdot\min\limits_{1\leqq i\leqq m}\mu(E_i)}}\right)^2=l\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{\min\limits_{1\leqq i\leqq m}\mu(E_i)}\geqq\frac{1}{\mu(E_q)}.$$

С другой стороны, используя неравенство Бесселя для ОНС $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{n}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{l}\left(\frac{1}{\mu(E_q)}\int_{E_q}\varphi_{k_i}(t)\,dt\right)^2\leqq\frac{1}{[\mu(E_q)]^2}\|\chi_{E_q}\|^2_{L^2(0,1)}=\frac{1}{\mu(E_q)}.\tag{3}$$

Из (2) и (3) получится противоречие. Следовательно, наше предположение неверно. Лемма 1 доказана.

Пусть $\{E_i^{(m)},\ i\in Q^{(m)}\}$, $m=1,2,\ldots$, где $Q^{(m)}$ $(m\geqq1)$ конечное или счётное множество индексов i, семейства измеримых множеств из $(0,1)$, уловлетворяющих следующим условиям:

(4) 1) $\mu\Big(\bigcup\limits_{i\in Q^{(m)}}E_i^{(m)}\Big)=1,\quad \mu(E_i^{(m)})>0,\quad i\in Q^{(m)},\quad m=1,2,\ldots,$

(5) 2) $E_i^{(m)}\cap E_j^{(m)}=\emptyset$ при $i\neq j$ $(i,j\in Q^{(m)})$,

(6) 3) если $E_i^{(n)}\cap E_j^{(m)}\neq\emptyset$ $(n\geqq m)$, то $E_i^{(n)}\subset E_j^{(m)}$.

Тогда имеем, что множество

$$E=\bigcap_{m=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{i\in Q^{(m)}}E_i^{(m)}\Big)$$

имеет полную меру на (0, 1). Обазначая $\tilde{E}_i^{(m)}=E_i^{(m)}\cap E$, легко убедится, что выполняются чледующие условия:

1°) $\bigcup_{i\in Q^{(m)}}\tilde{E}_i^{(m)}=E,\quad \mu(\tilde{E}_i^{(m)})>0,\quad i\in Q^{(m)},\quad m=1,2,\ldots,$

2°) $\tilde{E}_i^{(m)}\cap\tilde{E}_j^{(m)}=\emptyset$ при $i\neq j\quad (i,j\in Q^{(m)})$,

3°) если $\tilde{E}_i^{(n)}\cap\tilde{E}_j^{(m)}\neq\emptyset\quad (n\geqq m)$, то $\tilde{E}_i^{(n)}\subset\tilde{E}_j^{(m)}$.

Пусть T_m $(m\geqq 1)$ — σ-алгебра порождённая из множеств $E_i^{(m)}$, $i\in Q^{(m)}$. Тогда имеем $T_m\subset T_{m+1}$ $(m=1,2,\ldots)$. Очевидно, что если $g\in L^1(0,1)$, то последовательность функций

$$g_m(x)=\frac{1}{\mu(\tilde{E}^{(m)}_{i^{(m)}(x)})}\int_{\tilde{E}^{(m)}_{i^{(m)}(x)}}g(t)\,dt=\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i^{(m)}(x)})}\int_{E^{(m)}_{i^{(m)}(x)}}g(t)\,dt,\quad x\in E,$$

где $\tilde{E}^{(m)}_{i^{(m)}(x)}$ есть множество из семейства $\{\tilde{E}_i^{(m)},\ i\in Q^{(m)}\}$ $(m\geqq 1)$ соодержащее в себе точку $x\in E$ (в силу условий 1° и 2°, очевидно, что для любого $x\in E$ такое множество существует и единственно), образует мартингал относительно семейства σ-алгебр T_m $(m\geqq 1)$ и удовлетворяет условию $\sup\limits_{1\leqq m<\infty}\int_E|g_m(t)|\,dt<\infty$ (определение мартингала см. напр. [5] стр. 103).

Тогда, используя известный факт (см. [5] стр. 112) о том, что любой мартингал $\{f_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ (относительно некоторого семейства σ-алгебр $T_m(T_m\subset T_{m+1})$), удовлетворяющий условию $\sup\limits_{1\leqq m<\infty}\int|f_m(t)|\,dt<\infty$, сходится почти всюду, имеем, что существует предел

$$\lim_{m\to\infty}g_m(x)=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i^{(m)}(x)})}\int_{E^{(m)}_{i^{(m)}(x)}}g(t)\,dt=g_\infty(x),\quad \big(g(x)\in L^1(0,1)\big)\tag{7}$$

п.в. на E, и следовательно, п.в. на (0, 1) ($g_\infty(x)$ — некоторая п.в. конечная функция на (0, 1)).

Используя этот факт, докажем следующую лемму:

Лемма 2. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x\in(0,1)$ *ортонормированная система и* $\{E_i^{(m)},\ i\in Q^{(m)}\}$, $m=1,2,\ldots$, *где* $Q^{(m)}$ $(m\geqq 1)$ *есть конечное или счётное множество индексов* i, *семейства множеств удовлетворяющих условиям* (4), (5) *и* (6). *Предположим, что справедливы следующие соотношения:*

1) *Для любого* $m=1, 2, \dots$ *существует подмножество индексов* $G^{(m)}\subset Q^{(m)}$ *такое, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[1-\mu\left(\bigcup_{i\in G^{(m)}} E_i^{(m)}\right)\right]<\infty \tag{8}$$

и

$$\frac{1}{\mu(E_i^{(k)})}\left|\int_{E_i^{(k)}}\varphi_n(t)\,dt\right|<\gamma_n \tag{9}$$

при

$$1\leqq k\leqq n-1,\quad i\in G^{(k)}\quad (n\geqq 2),$$

где γ_n $(n\geqq 2)$ *такие числа, что*

$$\sum_{n=2}^{\infty}\gamma_n<\infty; \tag{10}$$

2) *Для любого* $k=1, 2, \dots$ *справедливо равенство*

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{1}{\mu(E_{i^{(m)}(x)}^{(m)})}\int_{E_{i^{(m)}(x)}^{(m)}}\varphi_k(t)\,dt-\varphi_k(x)\right|=0 \quad \textit{для п.в.}\quad x\in(0, 1), \tag{11}$$

3) *Для любой точки* x *из множества*

$$E=\bigcup_{k\geqq 1}\bigcap_{m\geqq k}\left[\bigcup_{i\in G^{(m)}} E_i^{(m)}\right] \tag{12}$$

существует, зависящее от x *постоянное* $c(x)$ *такое, что*

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{1}{\mu(E_{i^{(m)}(x)}^{(m)})}\int_{E_{i^{(m)}(x)}^{(m)}}\varphi_k(t)\,dt-\varphi_k(x)\right|^2<c(x),\quad m=1, 2, \dots. \tag{13}$$

Тогда $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *является системой сходимости.*

Доказательство. Предполагая

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty, \tag{14}$$

имеем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x) \tag{15}$$

сходится в метрике $L^2(0, 1)$ к некоторой функции $f(x)\in L^2(0, 1)$. Тогда для любого измеримого множества $F\subset(0, 1)$, произведя пределный переход под знаком интеграла, имеем

$$\int_F f(t)\,dt=\int_F\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_F\varphi_k(t). \tag{16}$$

В силу (7), справедливо равенство

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i(m)(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i(m)(x)}} f(t)\,dt=f_\infty(x)\quad\text{для п.в.}\quad x\in(0,1)\tag{17}$$

для некоторой п.в. конечной функции $f_\infty(x)$.

Пусть A и B множества таких x, для которых выполняются, соответственно, равенства (17) и (11). Тогда они имеют полные меры. Из (8) следует, что множество $\overset{\circ}{E}$ (см. (12)) тоже имеет полную меру. Следовательно, обозначив

$$D=A\cap B\cap \overset{\circ}{E},\tag{18}$$

имеем $\mu(D)=1$. Тогда, для доказательства сходимости п.в. ряда (15), достаточно доказать её сходимость на множестве D.

Итак, пусть точка $x\in D$ фиксирована. Из (16) для любого $m=1,2,\dots$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\mu(E^{(m)}_{i(m)(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i(m)(x)}}\varphi_k(t)\,dt=\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i(m)(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i(m)(x)}} f(t)\,dt\quad(m\geqq 1).\tag{19}$$

Пусть $\varepsilon>0$ некоторое число. В силу (14) существует число M такое, что

$$\Big(\sum_{k=M+1}^{\infty}a_k^2\Big)^{1/2}<\varepsilon/\big(2\sqrt{c(x)}\big).\tag{20}$$

Используя (10), (11), а также включение $x\in D\subset B$ (см. (18)), где B определено выше, для этого M найдётся число $N>M$ такое, что одновременно выполнялись неравенства

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\max_{1\leqq l<\infty}|a_l|\cdot\gamma_k<\varepsilon/4\tag{21}$$

и

$$\sum_{k=1}^{M}|a_k|\left|\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i(m)(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i(m)(x)}}\varphi_k(t)\,dt-\varphi_k(x)\right|<\varepsilon/4\quad\text{при}\quad m>N.\tag{22}$$

Тогда, используя неравенство Гёльдера и включение $x\in D\subset \overset{\circ}{E}$ (см. (18)), при $m>N>M$ имеем (см. (13), (20), (21), (22))

$$\left|\sum_{k=1}^{m}a_k\varphi_k(x)-\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i(m)(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i(m)(x)}}\varphi_k(t)\,dt\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{M}a_k\left(\varphi_k(x)-\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i(m)(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i(m)(x)}}\varphi_k(t)\,dt\right)+\right.$$

$$+\sum_{k=M+1}^{m} a_k\left(\varphi_k(x)-\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i^{(m)}(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i^{(m)}(x)}}\varphi_k(t)\,dt\right)-$$

$$-\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{a_k}{\mu(E^{(m)}_{i^{(m)}(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i^{(m)}(x)}}\varphi_k(t)\,dt\Bigg|\leqq$$

$$\leqq\sum_{k=1}^{M}|a_k|\left|\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i^{(m)}(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i^{(m)}(x)}}\varphi_k(t)\,dt-\varphi_k(x)\right|+$$

$$+\Big(\sum_{k=M+1}^{m}a_k^2\Big)^{1/2}\left[\sum_{k=M+1}^{m}\left(\frac{1}{\mu(E^{(m)}_{i^{(m)}(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i^{(m)}(x)}}\varphi_k(t)\,dt-\varphi_k(x)\right)^2\right]^{1/2}+$$

$$+\sum_{k=m+1}^{\infty}\max_{1\leqq l<\infty}|a_l|\cdot\gamma_k\leqq\varepsilon/4+\varepsilon\sqrt{c(x)}/(2\sqrt{c(x)})+\varepsilon/4=\varepsilon.$$

И следовательно, получаем

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\varphi_k(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{\mu(E^{(m)}_{i^{(m)}(x)})}\int\limits_{E^{(m)}_{i^{(m)}(x)}}\varphi_k(t)\,dt\right)=0. \tag{23}$$

Из (17), (19) и (23), имея ввиду включение $x\in D\subset A$ (см. (18)), где A определено выше, имеем $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{m}a_k\varphi_k(x)=f_\infty(x)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любых* $m=1,2,\dots$, $k\leqq m$ *и* $\alpha>1/2$ *существует семейство полуоткрытых интервалов* $\{\Delta_i^{(m)}(k),\ i\in\mathbf{Z}\}$ *(*$\mathbf{Z}$*-множество целых чисел), удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\bigcup\limits_{i\in\mathbf{Z}}\Delta_i^{(m)}(k)=R^1$ *при любых* $m\geqq k\geqq 1$ $(R^1=(-\infty,+\infty))$;

2) $\Delta_i^{(m)}(k)\cap\Delta_j^{(m)}(k)=\emptyset$ *при* $i\neq j$ $(m\geqq k\geqq 1)$;

3) *если* $m\geqq n\geqq k$ *и* $\Delta_i^{(m)}(k)\cap\Delta_j^{(n)}(k)\neq\emptyset$, *то* $\Delta_i^{(m)}(k)\subset\Delta_j^{(n)}(k)$;

4) *для любого* $k=1,2,\dots$ *справедливо равенство*

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ m\geqq k}}\left[\sup_{i\in\mathbf{Z}}d(\Delta_i^{(m)}(k))\right]=0, \tag{24}$$

где $d(\Delta_i^{(m)}(k))$ *— длина интервала* $\Delta_i^{(m)}(k)$;

5) *при любых* $m\geqq k\geqq 1$ *существуют конечные подмножества целых чисел* $G^{(m)}(k)$ *такие, что*

$$[-[k^\alpha],[k^\alpha])=\bigcup_{i\in G^{(m)}(k)}\Delta_i^{(m)}(k)\quad(m\geqq k\geqq 1), \tag{25}$$

$$\max_{i\in G^{(m)}(k)}d(\Delta_i^{(m)}(k))\leqq\frac{2}{\sqrt{m}}\quad(m\geqq k\geqq 1), \tag{26}$$

где $[k^\alpha]$ *— целая часть числа* k^α;

6) *для любых* $m \geqq k \geqq 1$ *существуют конечные подмножества целых чисел* $L^{(m)}(k)$ *такие, что*

$$[-[m^{1/2+\alpha}], [m^{1/2+\alpha}]) = \bigcup_{i \in L^{(m)}(k)} \Delta_i^{(m)}(k) \quad (m \geqq k \geqq 1), \tag{27}$$

$$|L^{(m)}(k)| \leqq 4m^{2\alpha} \quad (m \geqq k \geqq 1), \tag{28}$$

$$L^{(m)}(k) \supset G^{(m)}(k) \quad (m \geqq k \geqq 1), \tag{29}$$

где через $|L^{(m)}(k)|$ *обозначается количество элементов множества* $L^{(m)}(k)$.

Доказательство. Для определения множеств $\Delta_i^{(m)}(k)$, $i \in \mathbf{Z}$ $(m \geqq k \geqq 1)$ обозначим

$$r_m = \left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\log_2 m\right] \quad \text{при} \quad m \geqq 1, \tag{30}$$

$$l_k^{(m)} = \left[\frac{1}{2}\log_2 m\right] \quad \text{при} \quad m \geqq k \geqq 1. \tag{31}$$

Теперь, используя эти обозначения, для фиксированных $m \geqq k \geqq 1$ определим множество $\Delta_i^{(m)}(k)$ $(i \in \mathbf{Z})$ равным

$$[i/2^{l_k^{(m)}}, (i+1)/2^{l_k^{(m)}}) \quad \text{при} \quad -[k^\alpha] \cdot 2^{l_k^{(m)}} \leqq i < [k^\alpha] \cdot 2^{l_k^{(m)}}, \tag{32}$$

$$\left[\frac{i-[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}} - 2^{r_m})}{2^{r_m}}, \frac{i+1-[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}} - 2^{r_m})}{2^{r_m}}\right) \quad \text{при} \quad i \geqq [k^\alpha] \cdot 2^{l_k^{(m)}}, \tag{33}$$

$$\left[\frac{i+[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}} - 2^{r_m})}{2^{r_m}}, \frac{i+1+[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}} - 2^{r_m})}{2^{r_m}}\right) \quad \text{при} \quad i < -[k^\alpha] \cdot 2^{l_k^{(m)}}. \tag{34}$$

Для дальнейших рассуждений заметим, что группа (32) интервалов $\Delta_i^{(m)}(k)$ (при фиксированных $m \geqq k \geqq 1$) представляет собою разбиение множества $[-[k^\alpha], [k^\alpha])$ на непересекающиеся полуоткрытые интервалы длинами $\dfrac{1}{2^{l_k^{(m)}}}$, а группы (33) и (34) представляют собою соотственно разбиение множеств $[[k^\alpha], +\infty)$ и $(-\infty, -[k^\alpha])$ на непересекающиеся полуоткрытые интервалы длинами $\dfrac{1}{2^{r_m}}$.

Тогда, очевидна выполнимость условий 1) и 2). Очевидно также 3), если заметить, что при фиксированном $k \geqq 1$, $l_k^{(m)}$ и r_m неубывают относительно m (см. (30), (31)).

Из того же факта следует

$$\sup_{i \in \mathbf{Z}} d(\Delta_i^{(m)}(k)) = \max\{1/2^{l_k^{(m)}}, 1/2^{r_m}\} \quad (m \geqq k \geqq 1),$$

и следовательно, имея ввиду (30) и (31), имеем (24).

Обозначим

$$G^{(m)}(k)=\{i\in\mathbf{Z},\ -[k^\alpha]\cdot 2^{l_k^{(m)}}\leqq i<[k^\alpha]\cdot 2^{l_k^{(m)}}\}\quad (m\geqq k\geqq 1). \tag{35}$$

Тогда, очевидно, что множества $\Delta_i^{(m)}(k)$, $i\in G^{(m)}(k)$ представляют интервалы из группы (32), и следовательно, в силу замечания сделанного выше, имеем (25). Выполнимость условия (26) тоже очевидно. Действительно, имеем (см. (31), (32), (35))

$$\max_{i\in G^{(m)}(k)} d(\Delta_i^{(m)}(k))=1/2^{l_k^{(m)}}=1/2^{\left[\frac{1}{2}\log_2 m\right]}\leqq 2/2^{\frac{1}{2}\log_2 m}=2/\sqrt{m}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned}L^{(m)}(k)=\{i\in\mathbf{Z};\ &-[m^{1/2+\alpha}]\cdot 2^{r_m}-[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}}-2^{r_m})\leqq\\ &\leqq i<[m^{1/2+\alpha}]\cdot 2^{r_m}+[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}}-2^{r_m})\}.\end{aligned} \tag{36}$$

Тогда, из (35) и (36), с учётом неравенства $m\geqq k$, легко получить (29). Легко убедиться, также, в справедливости соотношения (27). Покажем выполнимость неравенства (28). Используя неравенства $m\geqq k$ и $\alpha>1/2$ имеем (см. (30), (31), (36))

$$\begin{aligned}|L^{(m)}(k)|&=[m^{1/2+\alpha}]\cdot 2^{r_m}+[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}}-2^{r_m})-\\ &-(-[m^{1/2+\alpha}]2^{r_m}-[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}}-2^{r_m}))=\\ &=2([m^{1/2+\alpha}]\cdot 2^{r_m}+[k^\alpha](2^{l_k^{(m)}}-2^{r_m}))\leqq\\ &\leqq 2(m^{1/2+\alpha}\cdot 2^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\log_2 m}+k^\alpha\cdot 2^{\frac{1}{2}\log_2 m})\leqq\\ &\leqq 2(m^{2\alpha}+m^{\alpha+1/2})<4m^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство Теоремы. Прежде, чем выделить подсистему $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$ удовлетворяющую требованиям теоремы, предположим её известным и введём некоторые обозначения. Обозначим через $A^{(m)}$ $(m\geqq 1)$ множество всевозможных мультииндексов $\bar{i}=(i_1,i_2,\dots,i_m)$, где $i_1,i_2,\dots,i_m$ целые числа. Для каждого $m=1,2,\dots$ обозначим

$$E_{\bar{i}}^{(m)}=E_{i_1i_2\dots i_m}^{(m)}=\bigcap_{k=1}^m\{x;\ \varphi_{n_k}(x)\in\Delta_{i_k}^{(m)}(k)\}\quad\text{при}\quad \bar{i}\in A^{(m)}, \tag{37}$$

где $\Delta_i^{(m)}(k)$ $(i\in\mathbf{Z},\ m\geqq k\geqq 1)$ интервалы удовлетворяющие всем условиям Леммы 3 при $\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\beta}{5}$ (β — заданное в теореме число). Пусть $Q^{(m)}\subset A^{(m)}$ $(m\geqq 1)$ множество тех мультииндексов, для которых имеем

$$\mu(E_{\bar{i}}^{(m)})>0\quad\text{при}\quad \bar{i}\in Q^{(m)}\quad (m\geqq 1). \tag{38}$$

Обозначим

(39)

$$B^{(m)} = \{\bar{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_m);\ i_1 \in L^{(m)}(1),\ i_2 \in L^{(m)}(2), \ldots, i_{m-1} \in L^{(m)}(m-1),\ i_m \in G^{(m)}(m)\},$$

где $L^{(m)}(k)$ и $G^{(m)}(k)$ $(m \geqq k \geqq 1)$ — множества из Леммы 3. Очевидно, что (см. (28), (29))

$$|B^{(m)}| = |L^{(m)}(1)| \cdot |L^{(m)}(2)| \cdot \ldots \cdot |L^{(m)}(m-1)| \cdot |G^{(m)}(m)| \leqq 4^m \cdot m^{2\alpha m}. \tag{40}$$

Через $G^{(m)}$ $(m \geqq 1)$ обозначим множество тех мультииндексов из $B^{(m)}$, для которых имеем

$$\mu(E_{\bar{i}}^{(m)}) \geqq 1/(m^2 \cdot 4^m \cdot 2^{2\alpha m \log_2 m}) \quad \text{при} \quad \bar{i} \in G^{(m)} \subset B^{(m)}. \tag{41}$$

Тогда из соотношений $G^{(m)} \subset B^{(m)}$ и (40), следует

$$|G^{(m)}| \leqq |B^{(m)}| \leqq 4^m \cdot m^{2\alpha m}, \tag{42}$$

и, следовательно, имеем

$$\sum_{k=1}^{m} |G^{(k)}| \leqq m \cdot 4^m \cdot m^{2\alpha m}. \tag{43}$$

Теперь приступим к построению номеров n_k $(k=1, 2, \ldots)$. Построим их такими, чтобы выполнялись следующие условия:

$$n_1 = 1,\ 2^{(2+\beta)(k-1)\log_2(k-1)} < n_k \leqq 2^{(2+\beta)k\log_2 k} \quad \text{при} \quad k \geqq 2, \tag{44}$$

$$\frac{1}{\mu(E_{\bar{i}}^{(m)})} \Big| \int_{E_{\bar{i}}^{(m)}} \varphi_{n_k}(t)\,dt \Big| < \big((k-1)^3 \cdot 16^{k-1}/2^{((k-1)\log_2(k-1))/5}\big)^{1/2} \tag{45}$$

$$\text{при} \quad \bar{i} \in G^{(m)}, \quad m = 1, 2, \ldots, k-1 \quad (k \geqq 2),$$

где $G^{(m)}$ $(m \geqq 1)$ определны выше (см. (41)).

Сделаем это методом математической индукции. Определим $n_1 = 1$. Предположим, что определены номера $n_1, n_2, \ldots, n_p$ такие, что справедливы условия (44) и (45) при $k=1, 2, \ldots, p$. Определим число n_{p+1}. Используя Лемму 1 для множеств $E_{\bar{i}}^{(k)}$, $\bar{i} \in G^{(k)}$, $k=1, 2, \ldots, p$ (количество которых равно $\sum_{k=1}^{p} |G^{(k)}|$) и функций $\varphi_j(x)$, $2^{(2+\beta)p\log_2 p} < j \leqq 2^{(2+\beta)(p+1)\log_2(p+1)}$, найдём натуральное число, которое обозначим через n_{p+1}, такое, что

$$2^{(2+\beta)p\log_2 p} < n_{p+1} \leqq 2^{(2+\beta)(p+1)\log_2(p+1)}, \tag{46}$$

и выполнялось неравенство

$$\frac{1}{\mu(E_l^{(k)})}\Big|\int\limits_{E_l^{(k)}}\varphi_{n_{p+1}}(t)\,dt\Big| < \tag{47}$$

$$< \Big(\sum_{m=1}^{p}|G^{(m)}|/(2^{(2+\beta)(p+1)\log_2(p+1)}-2^{(2+\beta)p\log_2 p})\min_{\substack{l\in G^{(m)}\\ 1\le m\le p}}\mu(E_l^{(m)})\Big)^{1/2},$$

$$l\in G^{(k)},\quad k=1,2,\dots,p.$$

С другой стороны, используя очевидное неравенство

$$2^{(2+\beta)(p+1)\log_2(p+1)}-2^{(2+\beta)p\log_2 p}\geqq 2^{(2+\beta)p\log_2 p}\qquad (p\geqq 1) \tag{48}$$

и равенство $\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\beta}{5}$, имеем (см. (41), (43), (48))

$$\Big(\sum_{m=1}^{p}|G^{(m)}|/(2^{(2+\beta)(p+1)\log_2(p+1)}-2^{(2+\beta)p\log_2 p})\min_{\substack{l\in G^{(m)}\\ 1\le m\le p}}\mu(E_l^{(m)})\Big)^{1/2}\leqq \tag{49}$$

$$\leqq \big((p\cdot 4^p\cdot p^{2\alpha p})/2^{(2+\beta)p\log_2 p}(1/(p^2\cdot 4^p\cdot p^{2\alpha p}))\big)^{1/2}=\big((p^3\cdot 16^p\cdot 2^{4\alpha p\log_2 p})/2^{(2+\beta)p\log_2 p}\big)^{1/2}=$$

$$=(p^3\cdot 16^p/2^{(p\log_2 p)/5})^{1/2}.$$

Из (46), (47) и (49) следуют неравенства (44) и (45) при $k=p+1$.

Итак, мы построили подсистему $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяющую условиям (44) и (45) при $k\geqq 1$.

Докажем, что она есть система сходимости. Для этого достаточно доказать, что она удовлетворяет всем тербованиям Леммы 2 вместе с выше определенными множествами $E_l^{(m)}$ $(l\in Q^{(m)})$ и $G^{(m)}$ $(m=1,2,\dots)$. Выполнимость условий (4), (5) и (6) непосредственно следует из определения $E_l^{(m)}$ $(l\in Q^{(m)}$, $m=1,2,\dots)$ (см. (37), (38)), если учитывать условия 1)—3) Леммы 3. Обозначив

$$\gamma_k=\big((k-1)^3\cdot 16^{k-1}/2^{((k-1)\log_2(k-1))/5}\big)^{1/2},$$

имеем (10). Тогда из (45) непосредственно следует неравенство (9) для системы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Теперь докажем (8). Так как $G^{(m)}\subset B^{(m)}$ (см. (41)), то имеем

$$\mu\Big(\bigcup_{l\in G^{(m)}}E_l^{(m)}\Big)=\mu\Big(\bigcup_{l\in B^{(m)}}E_l^{(m)}\Big)-\mu\Big(\bigcup_{l\in B^{(m)}\setminus G^{(m)}}E_l^{(m)}\Big)\quad (m\geqq 1). \tag{50}$$

Из определения $G^{(m)}$ (см. (41)) следует, что

$$\mu(E_l^{(m)})<\frac{1}{m^2\cdot 4^m\cdot m^{2\alpha m}}\quad\text{при}\quad l\in B^{(m)}\setminus G^{(m)}\quad (m\geqq 1). \tag{51}$$

И, следовательно, имеем (см. (40))

$$\mu\Big(\bigcup_{l\in B^{(m)}\setminus G^{(m)}}E_l^{(m)}\Big)<\frac{|B^{(m)}\setminus G^{(m)}|}{m^2\cdot 4^m\cdot m^{2\alpha m}}\leqq\frac{4^m\cdot m^{2\alpha m}}{m^2\cdot 4^m\cdot m^{2\alpha m}}=\frac{1}{m^2}. \tag{52}$$

Покажем следующее равенство:

(53) $$\bigcup_{\mathfrak{l}\in B^{(m)}} E_{\mathfrak{l}}^{(m)} = \{x;\ \varphi_{n_k}(x)\in[-[m^{1/2+\alpha}], [m^{1/2+\alpha}])$$
$$\text{при}\quad k=1, 2, \ldots, m-1,\quad \varphi_{n_m}(x)\in[-[m^\alpha], [m^\alpha])\}.$$

Для этого покажем эквивалентность следующих предложений:

(i) $x\in \bigcup_{\mathfrak{l}\in B^{(m)}} E_{\mathfrak{l}}^{(m)}$;

(ii) $x\in E_{\mathfrak{i}^{(m)}(x)}^{(m)}$, где $\mathfrak{i}^{(m)}(x) = (i_1^{(m)}(x), i_2^{(m)}(x), \ldots, i_m^{(m)}(x))\in B^{(m)}$;

(iii) $\varphi_{n_k}(x)\in \Delta_{i_k(x)}^{(m)}(k)$, где $i_k(x)\in L^{(m)}(k)$, при $k=1, 2, \ldots, m-1$ и $i_m(x)\in G^{(m)}(m)$;

(iv) $\varphi_{n_k}(x)\in[-[m^{1/2+\alpha}], [m^{1/2+\alpha}])$ при $k=1, 2, \ldots, m-1$ и $\varphi_{n_m}(x)\in[-[m^\alpha], [m^\alpha])$;

(v) $x\in\{x;\ \varphi_{n_k}(x)\in[-[m^{1/2+\alpha}], [m^{1/2+\alpha}])$ при $k=1, 2, \ldots, m-1$ и $\varphi_{n_m}(x)\in[-[m^\alpha], [m^\alpha])\}$.

Эквивалентность условий (i) и (ii) очевидно. Эквивалентность (ii) и (iii) легко следует из определений $E_{\mathfrak{l}}^{(m)}$ и $B^{(m)}$ $(m\geqq 1)$ (см. (37), (39)). Из (25) и (27) следует эквивалентность (iii) и (iv). Эквиалентность (iv) и (v) тоже очевидно. Итак, имеем, что условия (i) и (v) эквивалентны, откуда следует (53).

Обозначая

$$D_k = \{x;\ \varphi_{n_k}(x)\in[-[m^{\alpha+1/2}], [m^{\alpha+1/2}])\}\quad\text{при}\quad k=1, 2, \ldots, m-1,$$
$$D_m = \{x;\ \varphi_{n_k}(x)\in[-[m^\alpha], [m^\alpha])\}$$

и, используя (53), легко убедится, что

(54) $$\bigcup_{\mathfrak{l}\in B^{(m)}} E_{\mathfrak{l}}^{(m)} = \bigcap_{k=1}^{m} D_k\quad (m\geqq 1).$$

Воспользуясь неравенством Чебишева и ортонормированностью в $L^2(0, 1)$ функций $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$, имеем

$$\mu(D_k^c)\leqq\frac{1}{[m^{\alpha+1/2}]^2}\quad\text{при}\quad k=1, 2, \ldots, m-1\quad\text{и}\quad \mu(D_m^c)<\frac{1}{[m^\alpha]^2},$$

где $D_k^c=(0, 1)\diagdown D_k$, и, следовательно

$$\mu\Big(\bigcap_{k=1}^m D_k\Big) = 1-\mu\Big[\Big(\bigcap_{k=1}^m D_k\Big)^c\Big] = 1-\mu\Big(\bigcup_{k=1}^m D_k^c\Big) >$$
$$> 1-\frac{m-1}{[m^{\alpha+1/2}]^2}-\frac{1}{[m^\alpha]^2}.$$

Отсюда, используя (54), имеем

$$\mu\Big(\bigcup_{\mathbf{l}\in B^{(m)}} E_{\mathbf{l}}^{(m)}\Big) > 1-\frac{m-1}{[m^{1/2+\alpha}]^2}-\frac{1}{[m^\alpha]^2}. \tag{55}$$

Применив (50), (52) и (55) получаем

$$\mu\Big(\bigcup_{\mathbf{l}\in G^{(m)}} E_{\mathbf{l}}^{(m)}\Big) > 1-\frac{m-1}{[m^{1/2+\alpha}]^2}-\frac{1}{[m^\alpha]^2}-\frac{1}{m^2}. \tag{56}$$

Имея ввиду неравенство $\alpha>\frac{1}{2}$, легко убедиться, что

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{m-1}{[m^{1/2+\alpha}]^2}+\frac{1}{[m^\alpha]^2}+\frac{1}{m^2}\right)<\infty. \tag{57}$$

Из (56) и (57) следует (8).

Докажем равенство (11) для системы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Для этого, используя определение множеств $E_{\mathbf{l}}^{(m)}$ (см. (37)), заметим, что если $x, t\in E_{\mathbf{l}}^{(m)}$ для некоторого $\mathbf{l}=(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ $(m\geqq 1)$, то

$$\varphi_{n_k}(t),\ \varphi_{n_k}(x)\in \Delta_{i_k}^{(m)}(k) \quad (k\leqq m),$$

и следовательно, получится

$$|\varphi_{n_k}(x)-\varphi_{n_k}(t)| \leqq d\big(\Delta_{i_k}^{(m)}(k)\big) \leqq \sup_{j\in\mathbf{Z}} d\big(\Delta_j^{(m)}(k)\big) \quad (m\geqq k\geqq 1).$$

Используя последнее, имеем

$$\left|\frac{1}{\mu(E_{\mathbf{l}^{(m)}(x)}^{(m)})}\int_{E_{\mathbf{l}^{(m)}(x)}^{(m)}}\varphi_{n_k}(t)\,dt-\varphi_{n_k}(x)\right| = \left|\frac{1}{\mu(E_{\mathbf{l}^{(m)}(x)}^{(m)})}\int_{E_{\mathbf{l}^{(m)}(x)}^{(m)}}(\varphi_{n_k}(t)-\varphi_{n_k}(x))\,dt\right| \leqq$$

$$\leqq \sup_{j\in\mathbf{Z}} d\big(\Delta_j^{(m)}(k)\big).$$

Из последнего, с учётом (24), получаем (11) для системы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Осталось доказать неравенство (13) для системы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Пусть фиксировано $x\in E= =\bigcup_{k\geqq 1}\bigcap_{m\geqq k}\Big[\bigcup_{\mathbf{l}\in G^{(m)}} E_{\mathbf{l}}^{(m)}\Big]$. Тогда существует целое число $M(x)$ такое, что

$$x\in \bigcup_{\mathbf{l}\in G^{(m)}} E_{\mathbf{l}}^{(m)} \quad \text{при} \quad m>M(x).$$

Последнее означает, что

$$\mathbf{l}^{(m)}(x)=\big(i_1^{(m)}(x), i_2^{(m)}(x), \ldots, i_m^{(m)}(x)\big)\in G^{(m)} \quad \text{при} \quad m>M(x) \tag{58}$$

где $\mathbf{l}^{(m)}(x)$ — индекс из $Q^{(m)}$ для которого $E_{\mathbf{l}^{(m)}(x)}^{(m)}$ содержит в себе точку x. Теперь пусть $p\geqq k>M(x)$ фиксированы. Тогда, используя определение множеств

$E_{\bar{i}}^{(m)}$ (см. (37)), имеем

(59) $$\varphi_{n_k}(E_{\bar{i}^{(k)}(x)}^{(k)}) = \{\varphi_{n_k}(x);\ x\in E_{\bar{i}^{(k)}(x)}^{(k)}\} \subset \Delta_{i_k^{(k)}(x)}^{(k)}(k).$$

Используя (58) при $m=k$ $(k>M(x))$ получаем $\bar{i}^{(k)}(x)\in G^{(k)}$. Тогда из $G^{(k)}\subset B^{(k)}$ (см. (41)) следует $\bar{i}^{(k)}(x)\in B^{(k)}$. Следовательно, ичпользуя определение множества $B^{(k)}$ (см. (39)), имеем $i_k^{(k)}(x)\in G^{(k)}(k)$. Отсюда, применив также (59) и (25) при $m=k$ получаем

(60) $$\varphi_{n_k}(E_{\bar{i}^{(k)}(x)}^{(k)}) \subset [-[k^\alpha], [k^\alpha]).$$

Из $p\geqq k$, ввиду того, что множества $E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)}$ и $E_{\bar{i}^{(k)}(x)}^{(k)}$ имеют общую точку x, имеем $E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)}\subset E_{\bar{i}^{(k)}(x)}^{(k)}$ (см. (6)), и следовательно, получим (см. (60))

(61) $$\varphi_{n_k}(E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)}) \subset [-[k^\alpha], [k^\alpha])$$

В силу (37) имеем

(62) $$\varphi_{n_k}(E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)}) \subset \Delta_{i_k^{(p)}(x)}^{(p)}(k).$$

Тогда, применив (61) и (62), получаем, что множества $\Delta_{i_k^{(p)}(x)}^{(p)}(k)$ и $[-[k^\alpha], [k^\alpha])$ имеют общие точки. Следовательно, используя учловие 2, Леммы 3, а также равенство (25) (при $m=p$) имеем

$$\Delta_{i_k^{(p)}(x)}^{(p)}(k) \subset [-[k^\alpha], [k^\alpha]).$$

Отсюда, из (25) следует

(63) $$i_k^{(p)}(x)\in G^{(p)}(k).$$

Из (26), (62) и (63) получаем

$$|\varphi_{n_k}(t)-\varphi_{n_k}(x)| \leqq 2/\sqrt{p} \quad \text{при} \quad x,\ t\in E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)}.$$

И следовательно, имеем

(64) $$\left|\frac{1}{\mu(E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)})}\int\limits_{E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)}} \varphi_{n_k}(t)\,dt-\varphi_{n_k}(x)\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{\mu(E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)})}\int\limits_{E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)}} |\varphi_{n_k}(t)-\varphi_{n_k}(x)|\,dt \leqq 2/\sqrt{p} \quad (p\geqq k\geqq m(x)).$$

С другой стороны, из (11) (для системы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$) (выполнимость этого условия уже доказана) следует

(65) $$\sum_{k=1}^{m(x)}\left|\frac{1}{\mu(E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)})}\int\limits_{E_{\bar{i}^{(p)}(x)}^{(p)}} \varphi_{n_k}(t)\,dt-\varphi_{n_k}(x)\right|^2 \leqq C_1(x),$$

где $C_1(x)$ зависит только от x. Используя (64) и (65), имеем $(p > M(x))$

$$\sum_{k=1}^{p} \left| \frac{1}{\mu(E^{(p)}_{i^{(p)}(x)})} \int\limits_{E^{(p)}_{i^{(p)}(x)}} \varphi_{n_k}(t)\,dt - \varphi_{n_k}(x) \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{M(x)} \left| \frac{1}{\mu(E^{(p)}_{i^{(p)}(x)})} \int\limits_{E^{(p)}_{i^{(p)}(x)}} \varphi_{n_k}(t)\,dt - \varphi_{n_k}(x) \right|^2 +$$

$$+ \sum_{k=M(x)+1}^{p} \left| \frac{1}{\mu(E^{(p)}_{i^{(p)}(x)})} \int\limits_{E^{(p)}_{i^{(p)}(x)}} \varphi_{n_k}(t)\,dt - \varphi_{n_k}(x) \right|^2 \leqq$$

$$\leqq C_1(x) + \sum_{k=M(x)+1}^{p} \left(\frac{2}{\sqrt{p}} \right)^2 \leqq C_1(x) + \frac{4p}{p} = C(x).$$

Итак, выполнимость условия (13) для системы $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ тоже доказана. Следовательно, используя Лемму 2, имеем, что $\{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ является системой сходимости. Соединяя этот факт с (44), получаем утверждение теоремы.

Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность профессору А. А. Талаляну, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Литература

[1] D. Menchoff, Sur la convergence et la sommations des séries de fonction orthogonales, *Bull. Soc. Math. France*, **64** (1936), 147—170.

[2] J. Marcinkiewicz, Sur la convergence des séries orthogonales, *Studia Math.*, **6** (1936), 39—45.

[3] G. Bennett, *Lecture on matrix transformation on l^p-spaces*, Notes in Banach spaces (ed H. E. Lacey), Austin: University of Texas Press (1980).

[4] Б. С. Кашин, О выборе подсистемы сходимости из данной ортонормированной системы, *Успехи мат. наук*, **40** (1985), 181—182.

[5] П.-А. Мейер, *Вероятность и потенциалы*, Мир (Москва, 1973).

СССР, ЕРЕВАН, 375019, ПР-КТ МАРШАЛА БАГРАМЯНА 24б, ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ АН АРМ. ССР