Acta Sci. Math., 53 (1989), 51—58

Über multiplizitätenfreie Permutationscharaktere

KURT GIRSTMAIR

1. Einleitung. Man erhält — bis auf Ähnlichkeit — alle *transitiven Permutationsdarstellungen* einer endlichen Gruppe G, wenn man G in natürlicher Weise auf den Linksnebenklassen G/H nach Untergruppen H operieren läßt. Der *Charakter* $\pi_{G/H}$ einer solchen Darstellung $(\pi_{G/H}(s)=\text{Zahl der Fixpunkte von } s,\ s\in G)$ zerfällt über einem Körper K der Charakteristik 0 in der Form

$$\pi_{G/H} = \sum_{i=1}^{r} e_i\chi_i, \quad e_i \geqq 0,$$

wobei die χ_i gerade die *irreduziblen* Charaktere von G über K sind. Man nennt $\pi_{G/H}$ bzw. die dazugehörige Permutationsdarstellung *multiplizitätenfrei* (über K), wenn $e_i\in\{0, 1\}$ für alle $i=1, \ldots, r$. Ist $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei über $\mathbf{C}$, so gilt dies für jedes K.

Multiplizitätenfreie Permutationscharaktere sind in mehrfacher Hinsicht von Interesse. Sie haben praktische Bedeutung bei der Bestimmung von (großen) Untergruppen endlicher Gruppen G, bei der Konstruktion primitiver Elemente in Körpererweiterungen und bei der expliziten Erstellung einer irreduziblen Darstellung aus ihrem Charakter (vgl. [5], S. 147 ff., [1]). Ferner sind die häufig untersuchten Permutationsdarstellungen niedrigen Ranges multiplizitätenfrei (vgl. [6]). Auch kennt man im multiplizitätenfreien Fall bemerkenswerte arithmetische Zusammenhänge zwischen den Bahnlängen von H auf G/H und den Charakterdimensionen $\chi_i(1)$, $i=1, \ldots, r$ (vgl. [9], Th. 30.1). Für weitere Motive zum Studium solcher Charaktere siehe [6].

Bis jetzt gibt es keine befriedigende Theorie der multiplizitätenfreien Permutationsdarstellungen bzw. -charaktere. So ist etwa deren Verhältnis zu den primitiven Darstellungen nicht geklärt. D. E. LITTLEWOOD hat einst vermutet, daß alle primitiven Permutationsdarstellungen multiplizitätenfrei sind ([5], S. 147). Dies wurde aufgrund des Gegenbeispiels $G=PSL(2, 11)$, $H=$Diedergruppe der Ordnung 12

Received October 22, 1985 and in revised form November 2, 1987.

widerlegt, das von J. A. TODD mit Hilfe expliziter Charakterrechnungen gegeben wurde ([8]). Mittlerweile kennt man bei einfachen oder fast einfachen Gruppen weitere Gegenbeispiele (für $G=S_n$ vgl. [6], Sect. 2). In vielen anders gearteten Fällen (z. B. für auflösbare oder Frobeniussche Gruppen) ist die Vermutung jedoch richtig. Im übrigen beschränken sich unsere Kenntnisse multiplizitätenfreier Permutationsdarstellungen m. W. auf einige hinreichende Bedingungen (etwa [9], Th. 29.6) und Spezialfälle (vgl. [6]).

In der vorliegenden Note wird aus einem Grundgedanken, der von J. SAXL bei der Untersuchung der Gruppen $G=S_n$ angewendet worden ist ([6], Beweis von Th. 1), eine relativ leicht überprüfbare *notwendige* Bedingung für die Multiplizitätenfreiheit von $\pi_{G/H}$ — über einem beliebigen Körper K der Charakteristik 0 — entwickelt (Satz 1). Diese Bedingung liefert erhebliche Beschränkungen für die Gruppen $H^*\subseteqq G$, die H enthalten (Satz 2). Ferner gibt sie eine gewisse Erklärung dafür, daß gerade bei einfachen Gruppen nicht-multiplizitätenfreie Permutationsdarstellungen zu erwarten sind. Es wird insbesondere auf ganz einfache Weise gezeigt, daß bis auf endlich viele Ausnahmen alle Gruppen $PSL(2,p)$, p prim, solche Darstellungen besitzen (Satz 3; somit ist das Toddsche Gegenbeispiel $p=11$ keineswegs singulär in dieser Gruppenserie). Schließlich wird Satz 1 verwendet zur teilweisen Bestimmung der Struktur der Gruppe G, wenn $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei und die Ordnung von H klein ist; G ist auflösbar für $|H|\leqq 4$ (Satz 5).

2. Die Bahnenungleichung und ihre Anwendung. Sei wie oben $\pi_{G/H}=\sum_{i=1}^{r} e_i\chi_i$, sei H^* eine weitere Untergruppe von G und $\pi_{G/H^*}=\sum_{i=1}^{r} e_i^*\chi_i$. Es gelte

(I) *für alle* $i=1,\dots,r$ *ist entweder* $e_i\leqq e_i^*$ *oder* $e_i^*=0$.

Dann folgt für das innere Produkt (bezüglich G) der beiden Permutationscharaktere

$$\langle\pi_{G/H},\pi_{G/H^*}\rangle=\sum_{i=1}^{r} e_ie_i^*\langle\chi_i,\chi_i\rangle\leqq\sum_{i=1}^{r} e_i^{*2}\langle\chi_i,\chi_i\rangle=\langle\pi_{G/H^*},\pi_{G/H^*}\rangle,$$

da $\langle\chi_i,\chi_i\rangle\in\mathbf{N}$ (für beliebiges K). Nach dem Frobeniusschen Reziprozitätsgesetz ist das erste Glied dieser Ungleichung gleich dem inneren Produkt des 1-Charakters mit der Einschränkung von π_{G/H^*} auf H. Dies aber ist gerade die Anzahl der Bahnen von H auf G/H^* (vgl. [3], S. 597) die wir mit $\mathrm{orb}(H, G/H^*)$ bezeichnen wollen. Andererseits ist das letzte Glied der Ungleichung gleich $\mathrm{orb}(H^*, G/H^*)$ (loc. cit.). Wir haben

Satz 1. *Seien H, H^* Untergruppen von G und e_i bzw. e_i^*, $i=1,\dots,r$, die Vielfachheiten der irreduziblen K-Charaktere von G in $\pi_{G/H}$ bzw. π_{G/H^*}. Ist* (I) *erfüllt, so gilt*

(II) $\mathrm{orb}(H, G/H^*)\leqq\mathrm{orb}(H^*, G/H^*)$.

Ist insbesondere $H \subseteqq H^*$, *so ist* (I) *äquivalent zur Aussage* $\operatorname{orb}(H, G/H^*) = \operatorname{orb}(H^*, G/H^*)$.

Nur die zweite Behauptung des Satzes ist noch zu zeigen. Sie folgt aus der obigen Ungleichung für die inneren Produkte, wenn man $e_i \geqq e_i^*$, $i=1, \ldots, r$, und $\operatorname{orb}(H, G/H^*) \geqq \operatorname{orb}(H^*, G/H^*)$ berücksichtigt. Ferner ergibt sich sofort

Korollar 1. *Sei* $\pi_{G/H}$ *multiplizitätenfrei über dem Körper* K *der Charakteristik* 0. *Dann sind* (I) *und* (II) *erfüllt für alle Untergruppen* H^* *von* G.

Korollar 2. *Seien* $G \supseteqq H^* \supseteqq H$ *endliche Gruppen. Folgende Aussagen sind zu* (I) *und* (II) *äquivalent:*

(III) *Für jedes* $t \in G$ *ist* $H^* t \subseteqq H t H^*$.

(IV) *Für jedes* $t \in G$ *stimmen die Indizes* $[H : H \cap H^{*t}]$ *und* $[H^* : H^* \cap H^{*t}]$ *überein* $(H^{*t} = tH^* t^{-1})$.

Beweis. Nach Satz 1 ist (I) genau dann erfüllt, wenn für jedes $t \in G$ die H^*-Bahn $H^* \bar{t}$ ($\bar{t}$=Restklasse von t in G/H^*) gleich der H-Bahn $H\bar{t}$ ist. Dies liefert die Äquivalenz von (I) und (III). Schreibt man die Längen dieser Bahnen als Gruppenindizes, so erkennt man die Äquivalenz von (I) und (IV).

Die nachfolgenden Bedingungen an Gruppen H^*, die den Punktstabilisator H einer multiplizitätenfreien Permutationsdarstellung enthalten, werden wegen ihrer Einfachheit und praktischen Bedeutung als Satz formuliert. Man gewinnt sie ohne Schwierigkeit aus den obigen Korollaren.

Satz 2. *Sei* $\pi_{G/H}$ *multiplizitätenfrei über* K *und* $H^* \subseteqq G$ *eine Gruppe, die* H *enthält.*

1) *Jede weitere solche Gruppe* H^{**}, $H^{**} \supseteqq H$, *ist mit* H^* *vertauschbar (d. h. die Menge* $H^* H^{**} = H^{**} H^*$ *ist eine Gruppe).*

2) *Jedes* $t \in G$ *mit* $H^t \subseteqq H^*$ *normalisiert die Gruppe* H^*. *Insbesondere ist der Normalisator* $N_G(H)$ *in* $N_G(H^*)$ *enthalten.*

3) *Der Index (in* H^**) des Durchschnitts von* H^* *mit einer dazu konjugierten Gruppe teilt* $|H|$.

Anwendungsbeispiele. Sei $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei über K.

1. Ist $H=1$, so ist $N_G(H)=G$. Nach Satz 2, 2) ist jede Untergruppe H ein Normalteiler in G und mithin G eine abelsche oder hamiltonsche Gruppe (vgl. [3], S. 308). In der Tat ist $\pi_{G/1}$ multiplizitätenfrei über jedem K für abelsches G. Für hamiltonsche Gruppen G und $K=\mathbf{Q}$ gilt: $\pi_{G/1}$ ist genau dann multiplizitätenfrei, wenn $|G|$ nicht durch solche Primzahlen $p \geqq 3$ teilbar ist, für die die Zahl 2 gerade Ordnung in der Primrestgruppe modulo p hat. Diese Tatsache erhält man aus dem Studium der Kreisteilungskörper, über denen die Standard-Quaternionenalgebra

ein Schiefkörper, oder, anders ausgedrückt, -1 nicht Summe zweier Quadrate ist (vgl. [2]).

2. Sei H zyklisch von Primzahlordnung p. Operiert G treu auf G/H, so gibt es keine zyklische p-Gruppe $H^* \neq H$, die H enthält. Sonst wäre nach Satz 2, 3) $H^* \cap H^{*t} \neq 1$ für alle $t \in G$ und damit $H \subseteq \cap H^{*t}$. Da $\cap H^{*t}$ ein Normalteiler von G ist, würde dies auch für H als charakteristische Untergruppe dieser Gruppe gelten.

3. Sei $q = p^k$, p prim, $\mathbf{F}_q$ der Körper mit q Elementen und $G = PSL(2, q)$ die positive Gruppe der projektiven Geraden $\mathbf{F}_q \cup \{\infty\}$. Sei $H^* = ASL(1, q)$ der Stabilisator von ∞ in G. Wegen $\operatorname{orb}(H^*, \mathbf{F}_q \cup \{\infty\}) = 2$ ist π_{G/H^*} multiplizitätenfrei. Sei $H = ASL(1, q')$ ($\subseteq H^*$) mit $q' | q$. Für $q' \neq q$ ist $\pi_{G/H}$ nicht multiplizitätenfrei. Da alle Bahnen von H auf $\mathbf{F}_q \setminus \mathbf{F}_{q'}$ die Länge $|H|$ haben, hat man nämlich $\operatorname{orb}(H, G/H^*) = 2 + (q - q')/|H| > 2 = \operatorname{orb}(H^*, G/H^*)$, im Widerspruch zu Satz 1. (Alternatives Argument: H^* und $H^{**} = PSL(2, q')$ sind nicht vertauschbar.)

Korollar 3. *Die endliche Gruppe G besitze eine transitive Permutationsdarstellung vom Grad n und vom Rang k (d. i. die Zahl der Bahnen eines Punktstabilisators). Ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe und $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei über K (Charakteristik 0), so gilt $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$, wobei $d_i = 0$ oder ein Untergruppenindex von H ist. Insbesondere ist $|H| \geqq n/k$.*

Beweis. Nach der Bahnenungleichung (II) ist k größer oder gleich der Anzahl der Bahnen von H auf der n-elementigen Menge, die der Darstellung vom Rang k zugrundeliegt. Deshalb läßt sich n in der angegebenen Weise schreiben.

Grob gesprochen bedeutet Korollar 3, daß die Existenz von Permutationsdarstellungen niedrigen Ranges verhindert, daß Darstellungen mit einem Punktstabilisator kleiner Ordnung multiplizitätenfrei sein können. Dies wird besonders deutlich im Beweis des folgendes Satzes.

Satz 3. *Sei p eine Primzahl. Ist jede primitive Permutationsdarstellung von $PSL(2, p)$ multiplizitätenfrei über K (Charakteristik 0), so ist*

$$p \in \{2, 3, 5, 7, 19, 23, 31, 47, 59\}.$$

Beweis. Sei $p \geqq 7$. Nach dem Hauptsatz von Dickson ([3], S. 213) enthält $G = PSL(2, p)$ eine maximale Untergruppe H mit

$$H \cong \begin{cases} A_5 & p \equiv \pm 1 \bmod 5 \\ S_4 & p \equiv \pm 1 \bmod 8 \\ A_4 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei. Da die gewöhnliche Permutationsdarstellung von G auf

$\mathbf{F}_p \cup \{\infty\}$ den Grad $p+1$ und den Rang 2 hat, ist (nach Korollar 3) $|H| \geqq (p+1)/2$, also $p<120$ im ersten, bzw. $p<48$, $p<24$ im zweiten und dritten Fall. Diese Menge von Ausnahmeprimzahlen wird durch genauere Betrachtung der Untergruppenindizes von H verkleinert zu $\{2, 3, 5, 7, 11, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 47, 59\}$. Für $p \geqq 13$ bzw. $p \geqq 11$ besitzt G auch noch Diedergruppen D_{p-1} bzw. D_{p+1} als maximale Untergruppen. Von diesen hat D_{p-1} mehr als zwei Bahnen auf $\mathbf{F}_p \cup \{\infty\}$, sofern $p \equiv 1 \bmod 4$, D_{p+1} dagegen nie. Deshalb kann man die Zahlen 17, 29 und 41 auch noch ausschließen. Die Zahl 11 fällt nach TODD [8] weg.

Bemerkungen. 1. Auch das Toddsche Gegenbeispiel $G=PSL(2, 11)$, $H=D_{12}$, läßt sich ohne Charakterrechnungen behandeln. Denn $PSL(2, 11)$ hat eine 2-fach transitive Darstellung vom Grad 11 ([3], S. 214). Wäre $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei, müßte nach Korollar 4 die Zahl 11 Summe von höchstens zwei Teilern von 12 sein.

2. Betrachtet man die der hier beschriebenen Methode zugrunde liegenden Tatsachen genauer, so gewinnt Satz 3 sofort folgende Gestalt: Sei χ der eindeutig bestimmte, absolut irreduzible Charakter der Dimension p, der im gewöhnlichen Permutationscharakter (vom Grad $p+1$) von $G=PSL(2,p)$ auftritt. Genau dann ist die Vielfachheit von χ in jedem primitiven Permutationscharakter von G kleiner oder gleich 1, wenn $p=11$ oder eine der Ausnahmeprimzahlen des Satzes 3 ist. Zu den irreduziblen Charakteren von G vergleiche [4], S. 211 ff.

3. Mit Hilfe der Charaktertheorie von $G=PSL(2,p)$ kann man im Satz 3 die Ausnahmeprimzahlen $p \geqq 19$ ausschließen, zumindest für algebraisch abgeschlossenes K. Der Normalisator H eines Singer-Zyklus S von G $(|S|=(p+1)/2)$ ist nämlich eine Diedergruppe der Ordnung $p+1$ ([3], S. 192) und maximal in G. Ferner gibt es einen zu S gehörigen "Ausnahmecharakter" χ mit folgenden Eigenschaften (vgl. [4], S. 204 ff.): $\chi(1)=p-1$, $\chi(t)=2$ für alle Involutionen t in G und $\chi(s^k)=-(\varepsilon^k+\varepsilon^{-k})$, $k=1, \ldots, (p-1)/2$. Dabei ist $S=\langle s\rangle$ und ε eine primitive $(p+1)/2$-te Einheitswurzel. Daraus ergibt sich (Frobenius-Reziprozität!) $\langle \chi, \pi_{G/H}\rangle = 2$.

Korollar 4. *Sei $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei, $h=|H|$ und H^* eine p-Untergruppe von G. Ist $p>h$, so gilt*

$$[G:N_G(H^*)] \leqq h(p-1)/(p-h).$$

Beweis. Sei $n=[G:H^*]$, j die Anzahl der H^*-Fixpunkte in G/H^* und l die Anzahl der H^*-Bahnen der Länge $\geqq p$ auf G/H^*. Es ist $j=[N_G(H^*):H^*]$ und $j+lp \leqq n$. Ferner ist nach (II) $j+l=\operatorname{orb}(H^*, G/H^*) \geqq \operatorname{orb}(H, G/H^*) \geqq n/h$, sodaß wegen $l \leqq (n-j)/p$ gilt: $j+(n-j)/p \geqq n/h$. Durch Umformung (beachte $p>h$) erhält man $[G:N_G(H^*)]=n/j \leqq h(p-1)/(p-h)$.

Bevor wir dieses Korollar anwenden, notieren wir die folgenden Hilfssätze, deren einfache Beweise weggelassen werden.

Hilfssatz 1. *Sei P eine p-Sylowgruppe der endlichen Gruppe G und $N=\bigcap_{t\in G} N_G(P)^t$. Dann ist $P\cap N$ ein Normalteiler von G. Falls $p\nmid[G:N]$, ist $N=G$, also P Normalteiler von G.*

Hilfssatz 2. *Sei $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei über K, N Normalteiler von G, $\bar{G}=G/N$ und $\bar{H}=HN/N$. Dann ist $\pi_{\bar{G}/\bar{H}}$ multiplizitätenfrei.*

Satz 4. *Sei $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei über K, $h=|H|$ und P eine p-Sylowgruppe von G.*

1) *Ist $p\geqq 4h/3$, so gibt es einen Normalteiler P_0 von G mit $P_0\subseteqq P$ und $[P:P_0]\leqq p$.*

2) *Ist $p\geqq 2h+1$, so ist P abelscher Normalteiler von G.*

Beweis. Im Fall 2) ist nach Korollar 4 $n=[G:N_G(P)]\leqq p-1$, und deshalb nach dem Satz von Sylow $n=1$. Ferner ist jede Untergruppe $H^*\subseteqq P$ normal in P, denn wegen $[G:N_G(H^*)]\leqq p-1$ enthält $N_G(H^*)$ den Sylow-Normalteiler P. Da $p\geqq 3$ ist P abelsch ([3], S. 308).

Zum Beweis von 1) setzen wir $P_0=P\cap N$, N wie im Hilfssatz 1. Die Gruppe $\bar{G}=G/N$ operiert treu und transitiv auf der Menge $G/N_G(P)$, die nach Korollar 4 und dem Sylowschen Satz entweder 1, $p+1$ oder $2p+1$ Elemente hat. Es liege der letzte Fall vor, da nur dann $|\bar{G}|$ durch p^2 teilbar sein kann. Wir fassen $\bar{G}$ als Untergruppe von S_{2p+1} auf. Wäre $\bar{G}=A_{2p+1}$ oder S_{2p+1}, so hätte man wegen Hilfssatz 2 und Korollar 3 den Widerspruch $|\bar{H}|\geqq(2p+1)/2>h$. Ist $\bar{G}$ primitive Untergruppe von S_{2p+1}, $\bar{G}\neq A_{2p+1}$, S_{2p+1}, so teilt p den Index von $\bar{G}$ in S_{2p+1} ([9], Th. 14.1). Ist $\bar{G}$ jedoch imprimitiv, so gilt sogar $p\nmid|\bar{G}|$. Jedenfalls hat man $p^2\nmid|\bar{G}|$ und deshalb $[P:P_0]\leqq p$.

Anwendungsbeispiele. Sei $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei, $h=|H|$. Sei $G_p=P$ eine p-Sylowgruppe von G.

1. $h=2$. Für $p\geqq 5$ ist G_p abelscher Normalteiler von G. Sei $N=\bigcap_{t\in G} N_G(G_3)^t$ und $\bar{G}=G/N$. Ist $N\neq G$, so ist wegen $[G:N_G(G_3)]\leqq 4$ die Gruppe $\bar{G}$ ähnlich zu einer transitiven Untergruppe von S_4. Nach Hilfssatz 1 teilt 3 die Anzahl von $\bar{G}$. Somit ist $\bar{G}=A_4$ oder S_4. Letzteren Fall kann man wegen Hilfssatz 2 ausschließen, da die Summe der Dimensionen der irreduziblen Charaktere von S_4 gleich 10 (<12) ist. Unser Ergebnis lautet: Der Normalteiler N hat die Struktur $N\cong(A\times P)\rtimes Q$, wo A eine abelsche Gruppe, $2,3\nmid|A|$, P eine 3-Gruppe, Q eine 2-Gruppe und „$\rtimes$" das semidirekte Produkt bezeichnet. Es ist $N=G$ oder $G/N\cong A_4$.

2. $h=3$. Ähnlich wie im Fall $h=2$ bleibt hier eine einzelne Primzahl $>h$ gesondert zu untersuchen, nämlich $p=5$. Sei $N=\bigcap_{t\in G} N_G(G_5)^t$ und $\bar{G}=G/N$, $\bar{G}\neq 1$. Nach Korollar 4 und Hilfssatz 1 ist die Gruppe $\bar{G}$ ähnlich zu einer zweifach transitiven Untergruppe von S_6, d. h., $\bar{G}\cong A_5, S_5, A_6, S_6$. Da $\bar{G}$ aber höchstens sechs

5-Sylowgruppen hat, scheiden S_6 und A_6 aus. Wäre $\bar{G} \cong A_5$ oder S_5, so ließe sich nach Hilfssatz 2 und Korollar 3 die Zahl 5 als Summe höchstens zweier Teiler von 3 darstellen. Somit ist $\bar{G}=1$ und G hat nach dem Satz von Zassenhaus die Struktur $G \cong (A \times G_5) \rtimes Q$, mit einer abelschen Gruppe A, $2, 3, 5 \nmid |A|$, und einer $\{2, 3\}$-Gruppe Q.

3. $h=4$. Durch ähnliche, wenn auch weitläufigere Überlegungen (etwa unter Zuhilfenahme der Tabellen in [7]) erhält man in diesem Fall: G hat einen Normalteiler N der Form $N \cong (A \times P \times P') \rtimes Q$, mit abelschem A, $2, 3, 5, 7 \nmid |A|$, einer 7-Gruppe P, einer 5-Gruppe P' und einer $\{2, 3\}$-Gruppe Q; ferner gilt entweder $G=N$ oder $G/N \cong AGL(1, 8)$ oder G/N ist isomorph zu einer Untergruppe von $AGL(1, 16)$, $|G/N|=80$.

Diese Strukturanalyse liefert insbesondere

Satz 5. *Sei $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei über dem Körper K der Charakteristik* 0. *Ist $|H| \leqq 4$, so ist die Gruppe G auflösbar.*

Bemerkungen. 1. Satz 5 ist falsch für $|H|=5, 6$, da die Permutationscharaktere $\pi_{A_5/H}$, $H=\langle(12345)\rangle$, bzw. $H=\langle(123), (12)(45)\rangle$, multiplizitätenfrei sind über jedem K.

2. Gelte in der Situation des Anwendungsbeispiels 1 zu Satz 4: $G \supseteqq H^* \supseteqq H$, $H^* \cong A_4$. Dann ist H^* Normalteiler von G, da sonst A_4 eine Untergruppe vom Index 2 hätte (Satz 2, 3). Man schließt jetzt unschwer: $G \cong N \times A_4$ mit $\pi_{N/1}$ multiplizitätenfrei. Die Gruppe N muß sogar abelsch sein (dies ist darauf zurückzuführen, daß der Gruppenring von A_4 den 3. Einheitswurzelkörper enthält, über dem die Standard-Quaternionenalgebra sicher kein Schiefkörper ist; vgl. Bsp. 1 nach Satz 2). In der Tat sind alle Permutationsdarstellungen dieser Art multiplizitätenfrei.

3. Im Beispiel 3 zu Satz 4 lassen sich die Fälle $G/N \cong AGL(1, 8)$ bzw. $|G/N|=80$ *nicht* ausschließen. Ist etwa $N=1$, so ist die Summe aller K-irreduziblen Charaktere (K beliebig von Charakteristik 0) in beiden Fällen ein multiplizitätenfreier Permutationscharakter der Form $\pi_{G/H}$, $|H|=4$.

4. Viele Beispiele multiplizitätenfreier Permutationsdarstellungen mit kleinen Punktstabilisatoren liefert die folgende Tatsache: Ist A eine Gruppe, $\pi_{A/1}$ multiplizitätenfrei, und $G=A \rtimes H$, so ist $\pi_{G/H}$ multiplizitätenfrei.

Dank. Die Bemerkung 3 zu Satz 3, die Richtigstellung von Beispiel 3 zu Satz 4 und einige kleinere Verbesserungen gehen auf Hinweise des Referenten zurück, dem ich dafür herzlich danke.

Literaturverzeichnis

[1] K. Girstmair, Linear dependence of zeros of polynomials and construction of primitive elements, *Manuscripta Math.*, 39 (1982), 81—97.

[2] H. Hasse, Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen in einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, *J. Reine Angew. Math.*, 153 (1924), 113—130.

[3] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Springer-Verlag (Berlin—Heidelberg—New York, 1979).

[4] B. Huppert, N. Blackburn, *Finite Groups. III*, Springer-Verlag (Berlin—Heidelberg—New York, 1982).

[5] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters and Matrix Representations of Groups*, Oxford Univ. Press (Oxford, 1950).

[6] J. Saxl, On multiplicity-free permutation representations, in: London Math. Society Lecture Note Series 49, Cambridge Univ. Press (1980).

[7] C. C. Sims, Computational methods in the study of permutation groups, in: *Computational Problems in Abstract Algebra* (Proc. Oxford Conference, 1967), Pergamon (Oxford, 1970); pp. 169—183.

[8] J. A. Todd, On a conjecture of D. E. Littlewood, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 49 (1952), 203.

[9] H. Wielandt, *Finite Permutation Groups*, Academic Press (New York—London, 1964).

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UNIVERSITÄT INNSBRUCK
TECHNIKERSTRASSE 25
6020 INNSBRUCK, AUSTRIA