

Symmetrische Schrotungen im reellen dreidimensionalen projektiven Raum

OTTO RÖSCHEL

Herrn Prof. Dr. F. Hohenberg zum 80. Geburtstag

1. Transformationsgleichungen. Im reellen dreidimensionalen projektiven Raum $P_3(\mathbf{R})$ weisen wir den Punkten homogene Koordinaten $x_0:x_1:x_2:x_3 \neq 0:0:0:0$ zu, die wir zu Vektoren $\mathbf{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3)^t$ zusammenfassen. Dann werden durch

$$(1) \quad \mathbf{x} = \mathbf{R}n^i(t) + \mathbf{R}\bar{f}^i(t) \quad (i = 1, 2)$$

mit $n^i(t) = (\dots e_j^i(t) \dots)$, $\bar{f}^i(t) = (\dots f_j^i(t) \dots)$ ($j=0, 1, 2, 3$) und $e_j^i(t), f_j^i(t) \in C^1(I \subset \mathbf{R})$ zwei erzeugendenweise aufeinander bezogene C^1 -Regelflächenstücke Φ_1 und Φ_2 des $P_3(\mathbf{R})$ beschrieben. Den Erzeugenden $e^i(t)$ können Plücker-Koordinaten

$$(2) \quad p_{jk}^i := e_j^i f_k^i - e_k^i f_j^i \quad (i = 1, 2; j, k = 0, 1, 2, 3)$$

zugewiesen werden, die die Plückerbedingung

$$(3) \quad \Omega(e^i(t), e^i(t)) := p_{01}^i p_{23}^i + p_{02}^i p_{31}^i + p_{03}^i p_{12}^i = 0$$

erfüllen. Schneiden der Erzeugenden $e^1(t_0)$ und $e^2(t_0)$ ($t_0 \in I$) ist durch

$$(4) \quad \Omega(e^1(t_0), e^2(t_0)) := \det(n^1(t_0), \bar{f}^1(t_0), n^2(t_0), \bar{f}^2(t_0)) = 0$$

gekennzeichnet (vgl. etwa [1]). Wir werden im folgenden stets

$$(5) \quad \Omega(e^1(t), e^2(t)) \neq 0 \quad \forall t \in I$$

verlangen und können dann dem erzeugendenweise aufeinander bezogenen Regelflächenpaar $\{\Phi_1, \Phi_2\}$ einen *symmetrischen projektiven Bewegungsvorgang* zuordnen (H. PRADÉ beschäftigt sich in [13] ebenfalls mit projektiven Bewegungsvorgängen, die solch einem Regelflächenpaar zugeordnet werden können; er betrachtet die hier untersuchten Zwangsläufe jedoch nicht): Je zwei zugeordnete Erzeugende $e^1(t_0)$ und

$e^2(t_0)$ ($t_0 \in I$) sind nach (5) windschief und bestimmen daher eine eindeutige *axiale Spiegelung* $S(t_0)$ mit den Fixpunktgeraden $e^i(t_0)$ ($i=1, 2$), die wir *Spiegelungsachsen* nennen wollen. Unterwerfen wir nun das Rastsystem Σ' der stetigen Schar der durch $e^i(t)$ ($i=1, 2$) bestimmten axialen Spiegelungen $S(t)$ ($t \in I$), so entsteht eine stetige Folge von Bildern $\Sigma(t)$, die untereinander und auch zu Σ' projektiv äquivalent sind; $\Sigma(t)$ stellt somit die Lagen des *Gangsystems* Σ bei einem *projektiven Zwangslauf* Σ/Σ' dar. Diesen Zwangslauf werden wir als *projektive symmetrische Schrotung mit den erzeugendenweise aufeinander bezogenen Grundregelflächen* Φ_1 und Φ_2 nennen.

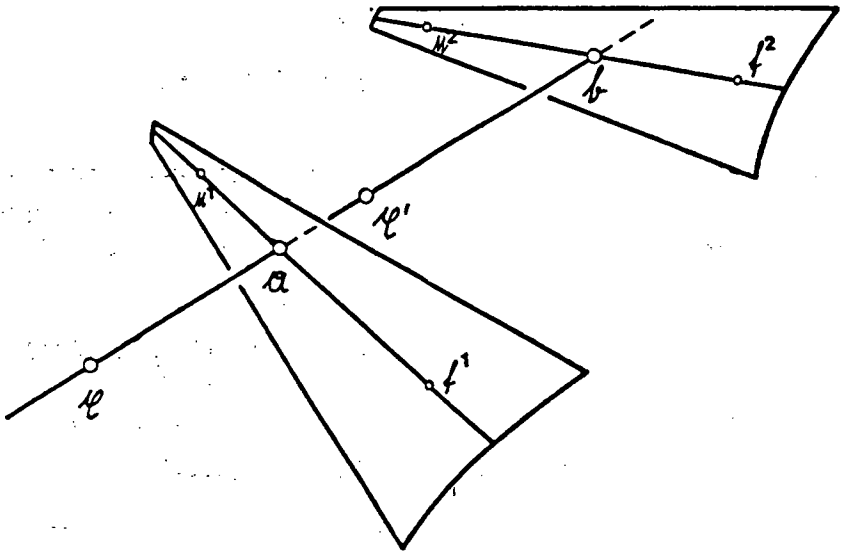


Abbildung 1

Der Punkt x wird bei der Spiegelung $S(t)$ auf einem Strahl des durch $e^1(t)$ und $e^2(t)$ bestimmten Netzes in den Punkt $x'(t)$ transformiert (vgl. Abb. 1). Dieser Netzstrahl trifft $e^1(t)$ und $e^2(t)$ in den Punkten a und b . Für a muß

$$(6) \quad a = u \cdot n^1(t) + v \cdot \bar{f}^1(t) = \lambda x + \mu n^2(t) + v \bar{f}^2(t) \quad (\lambda \neq 0)$$

($u, v, \lambda, \mu, v \in \mathbf{R}$) gelten. Daraus gewinnen wir

$$u = \frac{\lambda \cdot \det(x, \bar{f}^1, n^2, \bar{f}^2)}{\det(n^1, \bar{f}^1, n^2, \bar{f}^2)}, \quad v = \frac{\lambda \cdot \det(n^1, x, n^2, \bar{f}^2)}{\det(n^1, \bar{f}^1, n^2, \bar{f}^2)}$$

(dabei hängen e^i, n^i, \bar{f}^i von t ab ($i=1, 2$)),

$$(7) \quad \mu = -\frac{\lambda \cdot \det(n^1, \bar{f}^1, x, \bar{f}^2)}{\det(n^1, \bar{f}^1, n^2, \bar{f}^2)}, \quad v = -\frac{\lambda \cdot \det(n^1, \bar{f}^1, n^2, x)}{\det(n^1, \bar{f}^1, n^2, \bar{f}^2)}$$

Damit haben wir zusammen mit (4)

$$(8) \quad \mathbf{a} = \frac{\lambda}{\Omega(e^1, e^2)} [n^1 \cdot \det(\mathbf{x}, \mathbf{f}^1, n^2, \mathbf{f}^2) + \mathbf{f}^1 \cdot \det(n^1, \mathbf{x}, n^2, \mathbf{f}^2)]$$

und analog

$$(9) \quad \mathbf{b} = \frac{\lambda}{\Omega(e^1, e^2)} [n^2 \cdot \det(n^1, \mathbf{f}^1, \mathbf{x}, \mathbf{f}^2) + \mathbf{f}^2 \cdot \det(n^1, \mathbf{f}^1, n^2, \mathbf{x})].$$

Auf dem durch \mathbf{x} laufenden Netzstrahl

$$(10) \quad \mathbf{f} = \varrho \cdot \mathbf{a} + \sigma \cdot \mathbf{b} \quad (\varrho, \sigma \in \mathbf{R})$$

erhalten wir wegen (6) bis (9) für $\varrho = \sigma = 1$ genau unseren Ausgangspunkt. Der Bildpunkt \mathbf{x}' ist daher durch

$$(11) \quad -1 = DV(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & \varrho \\ 1 & \sigma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \varrho \\ 0 & \sigma \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\varrho}{\sigma}$$

gekennzeichnet und wird demnach durch

$$(12) \quad \mathbf{x}' = \alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \quad (\alpha \in \mathbf{R} - \{0\} \text{ beliebig})$$

beschrieben. Nach Unterdrückung des nicht verschwindenden Proportionalitätsfaktors $\alpha(\lambda/\Omega(e^1, e^2))$ erhalten wir als Transformationsgleichung

$$(13) \quad \mathbf{x}' = n^1 \cdot \det(\mathbf{x}, \mathbf{f}^1, n^2, \mathbf{f}^2) + \mathbf{f}^1 \cdot \det(n^1, \mathbf{x}, n^2, \mathbf{f}^2) - n^2 \cdot \det(n^1, \mathbf{f}^1, \mathbf{x}, \mathbf{f}^2) - \mathbf{f}^2 \cdot \det(n^1, \mathbf{f}^1, n^2, \mathbf{x}).$$

Unter Verwendung der Plückerkoordinaten (2) gewinnen wir

$$(14) \quad \det(\mathbf{x}, \mathbf{f}^1, n^2, \mathbf{f}^2) = (x_0 f_1^1 - x_1 f_0^1) p_{23}^2 + (x_0 f_2^1 - x_2 f_0^1) p_{31}^2 + (x_0 f_3^1 - x_3 f_0^1) p_{12}^2 + (x_2 f_3^1 - x_3 f_2^1) p_{01}^2 + (x_3 f_1^1 - x_1 f_3^1) p_{02}^2 + (x_1 f_2^1 - x_2 f_1^1) p_{03}^2.$$

Analog können die anderen drei Determinanten in (13) berechnet werden. Wenn wir nun zusätzlich

$$(15) \quad P_{ijkl} = p_{ij}^1 p_{kl}^2 - p_{ki}^1 p_{lj}^2 \quad (i, j, k, l = 0, 1, 2, 3)$$

definieren, können die Transformationsgleichungen (13) in der Form

$$(16) \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} P_{0123} - P_{0213} + P_{0312} & 2P_{0203} & -2P_{0103} & 2P_{0102} \\ -2P_{1213} & P_{0123} + P_{0213} - P_{0312} & -2P_{0113} & 2P_{0112} \\ -2P_{1223} & 2P_{0223} & -P_{0123} - P_{0213} - P_{0312} & 2P_{0212} \\ -2P_{1323} & 2P_{0323} & -2P_{0313} & -P_{0123} + P_{0213} + P_{0312} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

angeschrieben werden.

Wir haben damit den

Satz 1. Zu zwei erzeugendenweise aufeinander bezogenen Grundregelflächen $\Phi_i = \{e^i(t) | t \in I \subset \mathbf{R}, e^1(t) \cap e^2(t) = \emptyset\}$ ($i=1, 2$) existiert ein eindeutig bestimmter symmetrischer projektiver Zwangslauf Σ/Σ' , der durch (13) bzw. (16) beschrieben wird. Die Elemente der diesen Zwangslauf beschreibenden Transformationsmatrix sind bis auf einen Proportionalitätsfaktor quadratische Polynome der Plücker-Koordinaten der Grundregelflächen erzeugenden.

Formel (16) umfaßt die Darstellung der symmetrischen Schrotungen in allen dreidimensionalen Cayley—Klein-Räumen: Man hat dabei zu beachten, daß in diesen Räumen i. a. bereits durch Auszeichnung einer Grundregelfläche $\Phi_1 = \{e^1(t) | t \in I \subset \mathbf{R}\}$ ein solcher Zwangslauf eindeutig bestimmt ist, da den Erzeugenden $e^1(t)$ durch die Polarität an der Maßquadrik des Cayley—Klein-Raumes Erzeugende $e^2(t)$ zugeordnet werden, die die zweite Grundregelfläche Φ_2 erfüllen. So wurde Formel (16) für den euklidischen Raum von O. BOTTEMA und B. ROTH in [2, S. 319] und für den einfach isotropen Raum von M. HUSTY in [3] hergeleitet.

2. Momentanbewegung. Wird Formel (16) kürzer durch $\dot{x}'(t) = A(t)x'$ beschrieben ($\det(A(t)) \neq 0$), so besitzt die infinitesimale Transformation $T(t_0)$ zum Zeitpunkt $t_0 \in I$ die Darstellung

$$(17) \quad \left. \frac{dx'}{dt} \right|_{t=t_0} = A(t_0)A(t_0)x' \quad \text{mit} \quad A(t_0) := \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=t_0}$$

Sie erzeugt eine einparametrische projektive Transformationsgruppe $m(t_0)$, die wir als Momentanbewegung des Zwangslaufs Σ/Σ' (16) zum Zeitpunkt t_0 ansprechen. Um Aussagen über diese Momentanbewegung zu gewinnen, beachten wir, daß offensichtlich

$$(18) \quad m(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} S(t_0+h) \circ S(t_0) + O(h^2)$$

gilt, und $m(t_0)$ damit vom differentialgeometrischen Verhalten erster Ordnung der Erzeugenden $e^i(t_0)$ auf den Grundregelflächen abhängt. Längs den Erzeugenden $e^i(t_0)$ erfüllen die Flächentangenten der Grundregelfläche Φ_i eine spezielle lineare Geradenkongruenz $\mathfrak{f}^i(t_0)$. Ist die Flächenerzeugende $e^i(t_0)$ torsal, so besteht $\mathfrak{f}^i(t_0)$ aus den Geraden der Tangentialebene von Φ_i längs $e^i(t_0)$ und des Geradenbündels durch den Gratpunkt (Kuspidalpunkt von $e^i(t_0)$), andernfalls aus den Geraden eines parabolischen Netzes mit der Brennlinie $e^i(t_0)$ ([1, S. 73 und 78 f.]). Bezeichnet man in Analogie zur Terminologie in dreidimensionalen Cayley—Klein-Räumen jene Geraden, die sowohl $\mathfrak{f}^1(t_0)$ als auch $\mathfrak{f}^2(t_0)$ angehören, als Zentraltangenten (dieser Begriff der Zentraltangenten ist sehr viel weiter gefaßt als in der euklidischen Regelflächentheorie) der beiden Grundflächen, so gilt mit (18) der

Satz 2. Die beiden Grundregelflächen Φ_1 und Φ_2 besitzen in zugeordneten Erzeugenden Zentraltangenten, die bei der Momentanbewegung der zugeordneten symmetrischen projektiven Schrotung Fixgeraden sind.

(Vgl. das euklidische Ergebnis von J. KRAMES [4, S. 397]. Es ist zu bemerken, daß die in Satz 2 angesprochenen Fixgeraden nicht alle Fixgeraden der Momentanbewegung umfassen.)

Es ist unmittelbar einsichtig, daß Fixpunkte von $m(t_0)$ (wir werden im folgenden die komplexe Erweiterung $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})$ des projektiven Raumes vornehmen) auf diesen Zentraltangenten liegen müssen. Zu den Spiegelungen $S(t_0)$ und $S(t_0+h)$ gehören jeweils invariante hyperbolische Geradenetze $\mathfrak{f}(t_0)$ und $\mathfrak{f}(t_0+h)$ mit Brennlinsen $e^i(t_0)$ bzw. $e^i(t_0+h)$, deren Schnittgeraden die Fixpunkte von $S(t_0+h) \circ S(t_0)$ enthalten: Auf jeder dieser Schnittgeraden schneiden die Spiegelungsachsen $e^i(t_0)$ und $e^i(t_0+h)$ Punktpaare einer Projektivität aus, deren Doppelpunkte beim Grenzübergang (18) zu den Fixpunkten der Momentanbewegung $m(t_0)$ werden, während die Schnittgeraden von $\mathfrak{f}(t_0)$ und $\mathfrak{f}(t_0+h)$ gegen die Zentraltangenten konvergieren.

3. Flächenläufige symmetrische Schrotungen im $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$. Bisher hatten wir zwischen den beiden Grundregelflächen Φ_1 und Φ_2 eine erzeugendeweise Kopplung vorausgesetzt. Läßt man zu, daß die Erzeugenden $e^1 \subset \Phi_1$ und $e^2 \subset \Phi_2$ voneinander unabhängig sind, so stellt (16) die Transformationsgleichungen eines flächenläufigen symmetrischen Schrotvorganges im $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ dar. Diese flächenläufigen (zweiparametrischen) Bewegungsvorgänge sind geometrisch deshalb interessanter als die in Abschnitt 2 studierten Zwangläufe, weil sie unabhängig von der (willkürlichen) Koppelung der Grundregelflächenerzeugenden sind. Für algebraische Grundregelflächen gilt nach komplexer Erweiterung der

Satz 3. Sind die Grundregelflächen Φ_1 und Φ_2 einer flächenläufigen symmetrischen Schrotung Σ/Σ' nichtzerfallende und verschiedene algebraische Flächen der Ordnung n_1 beziehungsweise n_2 , so ist die von einem allgemeinen Punkt des Gangraums Σ bei Σ/Σ' überstrichene Bahnfläche algebraisch von der Ordnung $n_1 n_2$.

Beweis. Sei P ein allgemeiner Punkt ($P \notin \Phi_1, \Phi_2$), g eine allgemeine Testgerade, die die Schnittkurve von Φ_1 und Φ_2 nicht trifft. Wir zeigen, daß P bei Σ/Σ' im algebraischen Sinn genau $n_1 n_2$ -mal nach g gelangt (vgl. Abb. 2):

P und g spannen eine Ebene ε auf, die Φ_1 und Φ_2 nach zwei algebraischen Kurven k_1 und k_2 schneidet, die bei allgemeiner Lage von g nicht zerfallen und die Ordnungen n_1 und n_2 besitzen. P gelangt genau dann in einen Punkt P^* auf g , wenn $[P, P^*]$ k_1 und k_2 in einem zu P , P^* harmonischen Punktepaar trifft. Unterwirft man daher etwa k_1 der ebenen projektiven Spiegelung an P und g , so schneiden sich k_2 und die Spiegelkurve k_1^* im algebraischen Sinn in $n_1 n_2$ Punkten X^* , die über

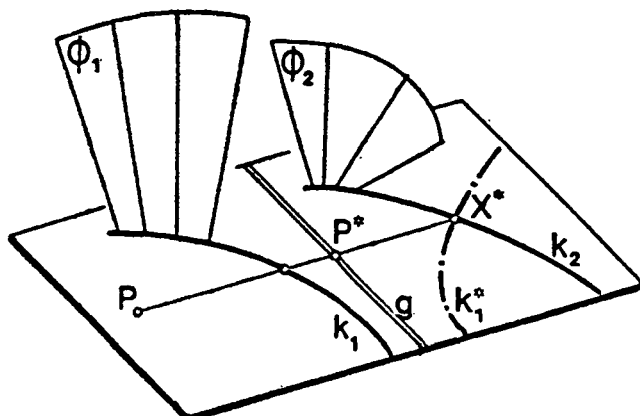


Abbildung 2

$P^* := ([P, X^*], g)$ genau $n_1 n_2$ Lagen von P auf g liefern; die Bahnfläche besitzt somit die Ordnung $n_1 n_2$.

Eine Reduktion der Bahnflächenordnung tritt damit genau dann auf, wenn P der Schnittkurve von Φ_1 und Φ_2 angehört; die Ordnung wird dann $n_1 n_2 - 1$ und verringert sich jeweils weiter um 1, wenn sich Φ_1 und Φ_2 in P berühren usw.

Die Bahnflächenordnung aller allgemeinen Punkte wird sich nur dann reduzieren, wenn Φ_1 und Φ_2 zusammenfallen. Es gilt der

Satz 4. *Stimmen die beiden Grundregelflächen Φ_1 und Φ_2 einer zweiparametrischen symmetrischen Schrotung Σ/Σ' mit einer nichtzerfallenden algebraischen Fläche Φ der Ordnung n überein, so ist die von einem allgemeinen Punkt des Gangraumes Σ bei Σ/Σ' überstrichene Bahnfläche algebraisch von der Ordnung $n(n-1)/2$.*

Beweis. Wie im Beweis zu Satz 3 suchen wir die Schnittpunkte der Bahnfläche eines allgemeinen Punktes mit einer allgemeinen Testgeraden g (vgl. Abb. 3):

k und k^* haben nun $n(n-1)$ für uns interessante Schnittpunkte, weil die n Schnittpunkte von k und g nicht in Betracht kommen. Da die übrigen Schnittpunkte von k und k^* bezüglich g und P symmetrisch liegen, kommt P bei Σ/Σ' im algebraischen Sinn genau $n(n-1)/2$ mal auf die Gerade g .

In diesem Fall wird die Bahnflächenordnung für Punkte der Grundregelfläche $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2$ zu $n(n-1)/2 - 1$.

Flächenläufige symmetrische Schrotungen Σ/Σ' mit durchwegs ebenen Bahnflächen werden wir zweiparametrische symmetrische Darboux-Bewegungen des $P_3(\mathbb{R})$ nennen. Diese Definition erfolgt in Anlehnung an die Bezeichnung Darboux-Zwangläufe des euklidischen Raumes (alle Bahnkurven sind eben; vgl. [2, S. 304 f.]). Es gilt der folgende

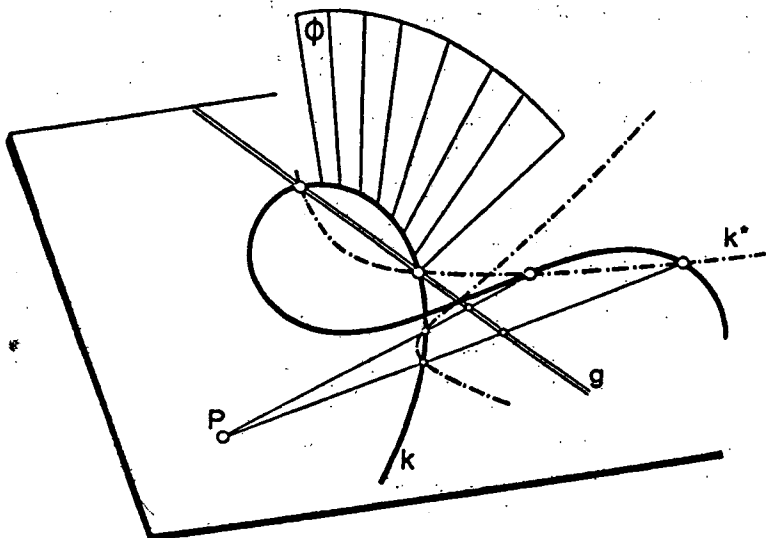


Abbildung 3

Satz 5. Die zweiparametrischen symmetrischen Darboux-Bewegungen des $P_3(\mathbf{R})$ besitzen als Grundregel­flächen Φ_1 und Φ_2 entweder die Tangentenschar­en zweier ebener Kurven in verschiedenen Ebenen des $P_3(\mathbf{R})$ oder es gilt: Φ_1 und Φ_2 erfüllen einen festen Regulus auf einer nichtzerfallenden Quadrik Φ . Im ersten Fall erfüllen die Bahnebenen das von den Träger­ebenen von Φ_1 und Φ_2 aufgespannte Ebenen­büschel, während im zweiten Fall alle allgemeinen Ebenen des $P_3(\mathbf{R})$ als Bahnebenen auftreten.

Beweis. Die allgemeinen Bahnflächen sind bei flächenläufigen symmetrischen Schrotungen nach Satz 3 und 4 genau dann Ebenen, wenn Φ_1 und Φ_2 entweder selbst Ebenen sind oder ein und denselben Regulus einer Quadrik Φ durchlaufen. Im ersten Fall gehören alle Bahnebenen dem von Φ_1 und Φ_2 aufgespannten Ebenen­büschel an. Der zweite Fall ist nicht trivial: Wird der Regulus Φ_i ($i=1, 2$) in der Normalform

$$(19) \quad p_{01}^i = p_{23}^i = 0, \quad p_{02}^i = 1, \quad p_{03}^i = p_{12}^i = u^i, \quad p_{13}^i = (u^i)^2$$

mit $u^i \in I \subset \mathbf{R}$ beschrieben, so erhält der zugehörige flächenläufige symmetrische Schrotvorgang Σ/Σ' mit (16) die Gestalt

$$(20) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} u^1 + u^2 & -2 & 0 & 0 \\ 2u^1 u^2 & -(u^1 + u^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u^1 + u^2 & -2 \\ 0 & 0 & 2u^1 u^2 & -(u^1 + u^2) \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Man bestätigt unschwer, daß jeder nicht auf Φ gelegene Punkt P des Gangraumes Σ als *Bahnfläche eine Ebene* $\Pi(P)$ durchläuft, wobei $\Pi(P)$ genau die *Polarebene von P bezüglich der Grundregelfläche* $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2$ ist. Punkte P von Φ werden auf der zweiten *Erzeugendenschar* von Φ bewegt.

Interessant ist, daß eine Gerade $g \subset \Sigma$, die der Grundquadratik Φ nicht angehört, bei diesen zweiparametrischen symmetrischen Bewegungsvorgängen eine *lineare Geradenkongruenz* \mathfrak{G} durchläuft, deren Leitgeraden von den Bahngeraden der Schnittpunkte von g und Φ gebildet werden. Damit treten je nach Lage von g und Φ *hyperbolische, elliptische oder parabolische lineare Bahngeradenkongruenzen* auf.

4. Flächenläufige symmetrische Schrotungen mit einer reellen Fixebene. Wir wollen versuchen, die beiden Grundregelflächen Φ_1 und Φ_2 so zu bestimmen, daß *die Bahnfläche aller Punkte der Ebene ω ($x_0=0$) diese Ebene ω selbst ist*. Bei der axialen Spiegelung an den Erzeugenden e^i der Grundregelflächen Φ_i ($i=1, 2$) werden nur dann alle Punkte der Ebene ω in dieser Ebene bleiben, wenn *eine der beiden Spiegelungsachsen ganz in ω liegt; eine der beiden Grundregelflächen* (o. B. d. A. Φ_2) *muß daher in ω enthalten sein*. Besondere Beachtung verdient bei diesen Bewegungsvorgängen die Tatsache, daß offensichtlich eine Änderung der Regelfläche Φ_2 in ω die entstehenden Bahnflächen der Punkte nicht ändert! Es existiert in diesem Fall sogar ein *dreiparametrischer symmetrischer Schrotvorgang* im $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$, bei dem jeder Punkt auf einer festen Bahnfläche bleibt. Mit Satz 3 haben wir den

Satz 6. Ist eine der beiden Grundregelflächen Φ_1 einer symmetrischen Schrotung des projektiven Raumes $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ algebraisch von der Ordnung n , während die Schar der zweiten Spiegelungsachsen die Geraden einer festen reellen Ebene ω erfüllt, so entsteht eine dreiparametrische symmetrische Schrotung, bei der alle Punkte auf algebraischen Bahnflächen der Ordnung n gleiten.

(Wird ω als Fernebene eines im $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ eingebetteten affinen Raumes $\mathbf{A}_3(\mathbf{R})$ gedeutet, so sind die hier erwähnten symmetrischen Schrotungen dreiparametrische affine Bewegungsvorgänge. In jedem dieser dreiparametrischen Bewegungsvorgänge kann durch Auszeichnung eines nullteiligen Kegelschnitts in ω über die dann in ω vorliegende Polarität ein eindeutiger euklidischer symmetrischer Zwangslauf im Krames'schen Sinne definiert werden. Umgekehrt kann so jede Krames'sche symmetrische Schrotung des euklidischen Raumes in einen zwei- bzw. dreiparametrischen affinen symmetrischen Bewegungsvorgang eingebettet werden.)

Diese symmetrischen Schrotungen werden wir *affine symmetrische Schrotungen* nennen. Bei affinen symmetrischen Schrotungen sind die Bahnflächen der Punkte P im Gegensatz zum allgemeinen Fall *stets Regelflächen*, deren Erzeugenden $\bar{e}(t)$ aus den Grundregelflächen-erzeugenden $e^1(t)$ mittels einer perspektiven Raumkollinea-

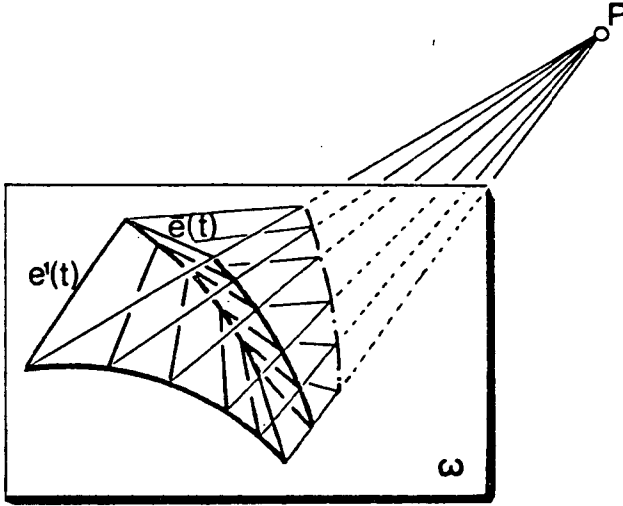


Abbildung 4

tion mit Zentrum P und Fixpunktebene ω hervorgehen; das charakteristische Doppelverhältnis δ hat dabei den Wert $1/2$ (vgl. Abb. 4). Wir haben damit den

Satz 7. *Bei den dreiparametrischen affinen symmetrischen Schrotungen sind die Bahnflächen aller allgemeinen Punkte Regelflächen, die zu der nichtebenen Grundregelfläche Φ_1 projektiv äquivalent sind.*

Die affinen symmetrischen Schrotungen lassen sich wie folgt kennzeichnen:

Satz 8. *Seien Φ_1 und Φ_2 n_1 - und n_2 -parametrische Geradenscharen ($n_1 \geq 1, n_2 \geq 2$), Σ/Σ' der darauf gegründete $(n_1 + n_2)$ -parametrische symmetrische projektive Bewegungsvorgang. Wenn dann alle Punkte des Gangraumes Σ beim ganzen Bewegungsvorgang Σ/Σ' auf Bahnflächen gleiten, ist Σ/Σ' notwendig eine affine symmetrische Schrotung.*

Beweis. Wir wählen in Φ_1 eine einparametrische Geradenschar $e^1(t)$ ($t \in I \subset \mathbf{R}$) aus, während die Schar der zweiten Spiegelungsachsen mindestens zweiparametrisch ist ($e^2(u, v)$, $u, v \in I^2 \subset \mathbf{R}$). Wir setzen voraus, daß $e^1(t)$ nicht in einer Ebene gelegen ist und studieren eine feste Erzeugende $e^1(t_0)$ ($t_0 \in I \subset \mathbf{R}$). Ein nicht auf $e^1(t_0)$ gelegener allgemeiner Punkt P wird bei den axialen Spiegelungen $\{e^1(t_0), e^2(u, v) \mid t_0 = \text{konst.}, u, v \in I^2 \subset \mathbf{R}\}$ nur dann nicht ein ganzes Gebiet der Ebene $[P, e^1(t_0)] = \varepsilon(t_0)$ überstreichen, wenn die Geradenkongruenz $e^2(u, v)$ in $\varepsilon(t_0)$ eine Leitkurve besitzt. Wird nun $e^1(t)$ geändert, müßte $e^2(u, v)$ in jeder der Ebenen $\varepsilon(t)$ eine Leitkurve besitzen, was aber nur möglich ist, wenn die Kongruenz $e^2(u, v)$ einer Ebene angehört,

Literaturverzeichnis

- [1] G. BOL, *Projektive Differentialgeometrie. I, II*, Vandenhoeck und Ruprecht (Göttingen, 1950, 1954).
- [2] O. BOTTEMA und B. ROTH, *Theoretical kinematics*, North-Holland (Amsterdam, 1979).
- [3] M. HUSTY, Symmetrische Schrotungen im einfach isotropen Raum, *Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss.*, **195** (1986), 291—306.
- [4] J. KRAMES, Über Fußpunktkurven von Regelflächen und eine besondere Klasse von Raumbewegungen (Über symmetrische Schrotungen, I), *Monatsh. Math.*, **45** (1937), 394—406.
- [5] J. KRAMES, Zur Bricard'schen Bewegung, deren sämtliche Bahnkurven auf Kugeln liegen (Über symmetrische Schrotungen. II), *Monatsh. Math.*, **45** (1937), 407—417.
- [6] J. KRAMES, Zur aufrechten Ellipsenbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen. III), *Monatsh. Math.*, **46** (1937), 48—50.
- [7] J. KRAMES, Zur kubischen Kreisbewegung des Raumes (Über symmetrische Schrotungen. IV), *Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss.*, **146** (1937), 145—158.
- [8] J. KRAMES, Zur Geometrie des Bennett'schen Mechanismus (Über symmetrische Schrotungen. V), *Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss.*, **146** (1937), 159—173.
- [9] J. KRAMES, Die Borel—Bricard-Bewegung mit punktweise gekoppelten orthogonalen Hyperboloiden (Über symmetrische Schrotungen. VI), *Monatsh. Math.* **46** (1937), 172—195.
- [10] J. KRAMES, Über eine konoidale Regelfläche fünften Grades und die darauf gegründete symmetrische Schrotung, *Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss.*, **190** (1981), 221—230.
- [11] E. P. LANE, Ruled surfaces with generators in one-to-one correspondance, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **25** (1923), 281—296.
- [12] J. M. NORMAND, *A Lie group: Rotations in quantum mechanics*, North-Holland (Amsterdam, 1980).
- [13] H. PRADE, *Über projektive Bewegungen des dreidimensionalen projektiven Raumes, die invariant mit einem Regelflächenpaar verknüpft sind*, Dissertation, TH—Karlsruhe (1960).
- [14] J. TÖLKE, Projektive kinematische Geometrie, *Ber. Math.-Statist. Sect. Forsch. Graz*, **39** (1975), 1—51.
- [15] J. TÖLKE, Eine Bemerkung zu den Projektivbewegungen mit nur ebenen Bahnkurven, *Arch. Math.*, **33** (1979), 279—282.

INSTITUT FÜR GEOMETRIE
 TV—GRAZ
 KOPERNIKUSGASSE 24
 8010 GRAZ, ÖSTERREICH