Acta Sci. Math., 53 (1989), 237—244

Неприводимые правые правоальтернативные представления

Ц. ДАШДОРЖ

В работах [2], [1] А. М. Слинько и И. П. Шестаков определили понятия правого представления и правого модуля для алгебр произвольного многообразия. В настоящей работе изучается неприводимые правые правоальтернативные представления (бесконечномерных) правоальтернативных алгебр. В частном случае альтернативных алгебр и представлений утверждения теорем 1 и 2 дают результат работы И. П. Шестакова [1]. Напомним, что для конечномерных правоальтернативных алгебр исчерпывающее описание неприводимых правых правоальтернативных представлений получено И. П. Шестаковым [1].

Пусть Φ — ассоциативно-коммутативное кольцо с единицей. Алгебра называется правоальтернативной, если она удовлетворяет тождествам

$$(xy)y = xy^2, \quad ((xy)z)y = x((yz)y).$$

Пусть A некоторая правоальтернативная алгебра над Φ, Y — некоторый Φ-модуль, $\mathrm{End}_\Phi(Y)$ алгебра эндоморфизмов Φ-модуля Y.

Определение 1. Если для Φ-линейного отображения $\varrho\colon A \to \mathrm{End}_\Phi(Y)$ выполняются равенства

$$(a^2)^\varrho = (a^\varrho)^2, \quad (ab \cdot a)^\varrho = a^\varrho b^\varrho a^\varrho \tag{1}$$

для любых элементов a, b из A, то модуль Y называется правым правоальтернативным модулем над A, ϱ — правым правоальтернативным представлением алгебры A.

Будем использовать обозначение va вместо va^ϱ, $v \in Y$, $a \in A$, и

$$(a, b) = a^\varrho b^\varrho - (ab)^\varrho, \quad (a, b)^* = b^\varrho a^\varrho - (ab)^\varrho, \quad a, b \in A;$$

$$(A, A) = \{(a, b) \mid a, b \in A\}, \quad (A, A)^* = \{(a, b)^* \mid a, b \in A\}.$$

Поступило 31 октября 1986.

Определение 2. Если $\mathrm{Ann}\, Y=\{a\in A|Ya=0\}=0$, то A-модуль Y называется точным.

Определение 3. Модуль Y называется неприводимым, если 0 является единственным собственным подмодулем A-модуля Y.

Пусть $\mathbf{C}$ — алгебра Кэли—Диксона с канонической инволюцией $^{-}$: $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, а $\mathrm{reg}\,\mathbf{C}$, $\overline{\mathrm{reg}\,\mathbf{C}}$ модули, получающиеся введением на векторном пространстве $Y=\mathbf{C}$ соответственно следующих действий алгебры $\mathbf{C}$: если $v\in Y$, $a\in\mathbf{C}$, то $v\cdot a=va$ для модуля $\mathrm{reg}\,\mathbf{C}$, $v\cdot a=v\bar{a}$, для модуля $\overline{\mathrm{reg}\,\mathbf{C}}$, где через va обозначено произведение элементов v и a в алгебре $\mathbf{C}$.

Основным результатом работы является следующая:

Теорема 1. *Пусть Y — точный неприводимый правый правоальтернативный модуль над правоальтернативной алгеброй A. Тогда либо*

(1) *A примитивное ассоциативное кольцо и Y правый или левый ассоциативный A-модуль, либо*

(2) *A является алгеброй Кэли—Диксона над своим центром и $Y_A\in\in\{\mathrm{reg}\,\mathbf{C}, \overline{\mathrm{reg}\,\mathbf{C}}\}$.*

Рассмотрим некоторые определения и утверждения из теорий йордановых алгебр, необходимые для доказательства основной теоремы.

Определение 4. Если для Φ-модуля J с единицей 1 определена композиция $v_x(y)$, квадратичная по x и линейная по y, удовлетворяющая аксиомам

$$v_1 = id_J, \quad v_x V_{x,y} = V_{y,x} v_x = v_{v_x(y),x}, \quad v_{v_x(y)} = v_x v_y v_x,$$

где

$$v_{x,z} = v_{x+z} - v_x - v_z, \quad V_{x,y}(z) = v_{x,z}(y) = \{xyz\},$$

то тройка $(J, v, 1)$ называется квадратичной йордановой алгеброй с 1. В этом случае единица определяет операцию $x^2=v_x(1)$ возведения в квадрат. Если для Φ-модуля J определены композиции $v_x(y)$, x^2 и модуль $J^{\#}=1\cdot\Phi+J$ является квадратичной йордановой алгеброй с 1, то J называется квадратичной йордановой алгеброй.

Известно, что если A правоальтернативная алгебра, то операторы $v_x(y)==xy\cdot x$, $x^2=xx$ определяют на A структуру квадратичной йордановой алгебры обозначим её через A^+. В дальнейшем под йордановой алгеброй мы будем понимать только квадратичную йорданову алгебру.

Определение 5. Если для некоторого Φ-линейного отображения ϱ: $J\to\mathrm{End}_\Phi(Y)$ выполняются равенства

$$(a^2)^\varrho = (a^\varrho)^2, \quad \{aba\}^\varrho = a^\varrho b^\varrho a^\varrho \tag{2}$$

где $\{aba\}=v_a(b)$ для любых элементов a, b из J, то модуль Y называется специальным йордановым модулем над J, а отображение ϱ — специальным представлением алгебры J. Заметим, что если Y правый правоальтернативный модуль над A, то Y является специальным йордановым модулем над A^+.

Точность и неприводимость для специального йорданового модуля определяется аналогично соответствующим определением для правоальтернативного модуля. Элемент $a\in J$ называется абсолютным делителем нуля йордановой алгебры J, если $v_a(J^\#)=0$, где $J^\#=1\cdot\Phi+J$, 1 — формальная единица. Йорданова алгебра невырождена, если она не содержит ненулевых абсолютных делителей нуля. Известно, что если I, K — идеалы йордановой алгебры J, то Φ-модуль $v_I(K)$, порожденный множеством

$$\{v_a(k) \mid a\in I,\ k\in K\}$$

также является идеалом в J. Йорданова алгебра J первична, если для любых двух идеалов K, L алгебры J из $v_K(L)=0$ следует либо $K=0$, либо $L=0$.

Лемма 1. *Если Y специальный йорданов модуль над J, то множество* $\mathrm{Ann}\, Y=\{a\in J \mid Ya=0\}$ *является идеалом в J, а $J/\mathrm{Ann}\, Y$ специальной йордановой алгеброй.*

Доказательство. Пусть ϱ — специальное представление алгебры J. Ясно, что отображение ϱ: $a\to a^\varrho$, где $a\in J$, $a^\varrho\in \mathrm{End}_\Phi(Y)$, является гомоморфизмом йордановой алгебры J в йорданову алгебру $\mathrm{End}_\Phi(Y)^+$. Таким образом, ядро этого гомоморфизма

$$\mathrm{Ker}\, \varrho = \{a\in J \mid Ya = 0\} = \mathrm{Ann}\, Y$$

является идеалом в J. В силу изоморфизма $\mathrm{Im}\, \varrho\cong J/\mathrm{Ann}\, Y$ фактор-алгебра $J/\mathrm{Ann}\, Y$ специальна, так как $\mathrm{Im}\, \varrho=\{a^\varrho \mid a\in J\}$ йорданова подалгебра, порожденная операторами a^ϱ в $\mathrm{End}_\Phi(Y)^+$. Лемма доказана.

Таким образом, если Y точный специальный J-модуль, то в силу леммы 1 алгебра J-специальна. Обозначим через $R_Y(J)$ ассоциативную подалгебру алгебры $\mathrm{End}_\Phi(Y)$, порождённую множеством $\{a^\varrho \mid a\in J\}$.

Лемма 2. *Пусть Y точный неприводимый специальный модуль над йордановой алгеброй J. Тогда алгебра J первична и невырождена.*

Доказательство. Докажем невырожденность алгебры J. Только что мы заметили, что алгебра J специальна. В силу теоремы А. М. Слинько—В. Г. Скосырского [2; стр. 355], имеем $M(J)\subseteq \mathrm{Loc}(J)$, где $M(J)$ радикал Маккриммона, а $\mathrm{Loc}(J)$ локально-нильпотентный радикал. Далее, по теореме В. Г. Скосырского [2] имеем $\mathrm{Loc}(J)\subseteq \mathrm{Loc}(R_Y(J))$. Ясно, что представление ϱ

алгебры J индуцирует неприводимое представление $\bar{\varrho}$ алгебры $R_Y(J)$ в модуле Y и $\operatorname{Jac}(R_Y(J))\subseteq \operatorname{Ker}\bar{\varrho}$, где $\operatorname{Jac}(R_Y(J))$ радикал Джекобсона алгебры $R_Y(J)$. Следовательно, если $a\in M(J)$, то $a\in \operatorname{Jac}(R_Y(J))$ и $a^{\varrho}=a^{\bar{\varrho}}=0$ т. е. $a\in \operatorname{Ker}\varrho=0$.

Докажем невырожденность алгебры J. Пусть $\{KLK\}=\{\{klk\}|k\in K, l\in L\}=0$, где K, L ненулевые идеалы в J. Если $K\cap L=M\neq 0$, то в силу невырожденности M получаем $\{MMM\}\neq 0$. Но $\{MMM\}\subseteq\{KLK\}=0$. Таким образом $K\cap L=0$, ясно что $K\circ L\subseteq K\cap L=0$, здесь

$$K\circ L=\{k\circ l|k\circ l=(k+l)^2-k^2-l^2, k\in K, l\in L\}$$

т. е. $K\circ L=0$. Из точности модуля Y следует, что $YK\neq 0$. Используя линеаризацию равенство $(a^{\varrho})^2=(a^{\varrho})^2$ для любого $a\in J$, мы имеем

$$vk\cdot a=-va\cdot k+v(a\circ k)\in YK.$$

Отсюда следует, что YK подмодуль J модуля Y. Ввиду неприводимости Y имеем $YK=Y$. Тогда найдутся элементы $k\in K$, $l\in L$, такие, что $Yk\cdot l\neq\{0\}$. Заметим, что

$$vk\cdot l=-vl\cdot k+v(k\circ l)=-vl\cdot k$$

для любого $v\in V$. Значит, $Yk\cdot l=Yl\cdot k$. Далее, в силу линеаризованного тождества (1) для любых элементов $a\in J$ и $v\in Y$ имеем

$$(vk\cdot l)a=-(va\cdot l)k+v\{kla\}=-(va\cdot l)k$$

так как $\{kla\}\in K\cap L=0$. Отсюда следует, что $Yk\cdot l=Yl\cdot k$ есть J-подмодуль модуля Y. Ввиду неприводимости модуля Y имеем $Y=Yk\cdot l$. Однако по тождеству (1)

$$Y=Yk\cdot l=(Yk\cdot l)k\cdot l=Y\{klk\}\cdot l=\{0\},$$

что противоречит неприводимости модуля Y. Лемма доказана.

Следствие 1. *Если Y — неприводимый правый правоальтернативный модуль над A, то* $\operatorname{Ann} Y=\{a\in A|Ya=0\}$ *является идеалом в A.*

Доказательство. Если $b\in\operatorname{Ann} Y$, то для любого элемента $a\in A$ имеем $Y(ab+ba)=Ya\cdot b+Yb\cdot a=0$. Значит, $\operatorname{Ann} Y$ является идеалом в йордановой алгебре A^+. Таким образом, Y точный неприводимый йорданов модуль над алгеброй $\bar{A}=A^+/\operatorname{Ann} Y$. По лемме 2 алгебра $\bar{A}$ первична и невырождена. Значит, $\operatorname{Ann} Y$ является идеалом в A согласно лемме Тэди [5].

Рассмотрим свободную ассоциативную Φ-алгебру от множества порождающих $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$ и свободную специальную йорданову алгебру от X; $SJ[X]\subseteq \operatorname{Ass}[X]^+$. В работе [4] построены вполне характеристический идеал T

алгебры $SJ[X]$ и функция натурального аргумента $f(k)$, $k \geqq 3$, $f(3)=0$, такие что для любых элементов $t \in T^{\langle f(k) \rangle}$, $a_1, \ldots, a_k \in SJ[X]$, справедливо включение

$$\{a_1 \ldots a_i t a_{i+1} \ldots a_k\} = a_1 \ldots t \ldots a_k + a_k \ldots t \ldots a_1 \in SJ[X], \quad 1 \leqq i \leqq k.$$

Обозначим $T_m = T^{\langle f(m) \rangle}$. Пусть J специальная йорданова алгебра и R её ассоциативная обертывающая алгебра. Ясно, что алгебра J является гомоморфным образом некоторой свободной специальной алгебры $SJ[X]$. Пусть $T_m(J)$ гомоморфный образ идеала $T_m(SJ[X])$. Если I идеал в J, то $v_I(J) = \{IJI\} = \check{I}$ тоже является идеалом в J. Множество

$$\operatorname{Ann}(R, T^\infty) = \{a \in R \mid a\check{T}_m(J) = \check{T}_m(J)a = 0 \ \text{ для некоторого } \ m \geqq 1\}$$

является идеалом в алгебре R [7].

Доказательство теоремы 1. Точный неприводимый правоальтернативный модуль Y является точным неприводимым специальным модулем над йордановой алгеброй A^+. По лемме 2 йорданова алгебра A^+ первична и невырождена, следовательно, алгебра A альтернативна [7]. Значит, согласно теореме Слейтера [2] A либо ассоциативна, либо является кольцом Кэли—Диксона.

(а) Предположим, что $T(A^+) \neq 0$. В силу точности A^+-модуля Y алгебра $R_Y(A^+)$ является ассоциативной обертывающей алгеброй для A^+. В [7] доказано, что для любых элементов $a, b \in A$ выполняется включение

$$(a, b) R_Y(A^+)(a, b)^* \subseteqq \tilde{B}(R_Y(A^+)),$$

где $\tilde{B}(R_Y(A^+))$ полный прообраз радикала Бэра $B(\overline{R_Y(A^+)})$ при гомоморфизме

$$R_Y(A^+) \to R_Y(A^+)/\operatorname{Ann}(R_Y(A^+), T^\infty) = \overline{R_Y(A^+)}.$$

Докажем, что $Y\tilde{B}(R_Y(A^+)) = 0$. Пусть $v \in Y$, $W \in \tilde{B}(R_Y(A^+))$ и $vW \neq 0$. Из неприводимости ассоциативного $R_Y(A^+)$-модуля Y следует, что $vWW' = v$ для некоторого оператора $W' \in R_Y(A^+)$. Тогда для любого натурального n имеем $v(WW')^n = v \neq 0$. Найдется $m \geqq 1$ такое что $(WW')^m \in \operatorname{Ann}(R_Y(A^+), T^\infty)$, то есть для некоторого натурльного числа к имеем $(WW')^m \check{T}_k = 0$, $v(WW')^m \check{T}_k = v\check{T}_k = 0$. Множество $Y_1 = \{v \in Y \mid v\check{T}_k = 0\}$ является ненулевым подмодулем йорданова A^+-модуля Y. Значит, из неприводимости A^+-модуля Y следует, что $Y = Y_1$ т. е. $Y\check{T}_k = 0$. Поскольку Y — точный модуль, то $\check{T}_k = 0$. Это противоречит тому, что $\check{T}_k \neq 0$. Таким образом, получаем $Y(a, b)R_Y(A^+)(a, b)^* = 0$. Если $Y(a, b) \neq 0$, то $Y(a, b)R_Y(A^+) = Y$, что влечет $(a, b)^* = 0$. Следовательно, для любых элементов $a, b \in A$, либо $(a, b) = 0$, либо $(a, b)^* = 0$.

Лемма 3. *Пусть* $Y = Y_1 \cup Y_2$, *где* Y_1 *и* Y_2 *подгруппы аддитивной группы* $(Y, +)$. *Тогда либо* $Y = Y_1$ *либо* $Y = Y_2$.

Доказательство. Допустим что $Y \neq Y_1$ и $Y \neq Y_2$. Пусть $v_1 \in Y_1$, $v_1 \notin Y_2$, $v_2 \in Y_2$, $v_2 \notin Y_1$. Тогда $0 \neq v_1 + v_2 \notin Y_1$ и $v_1 + v_2 \notin Y_2$. Противоречие. Лемма доказана.

Зафиксируем элемент $a \in A$. Множества

$$A_1 = \{b \in A \mid (a, b) = 0\}, \quad A_2 = \{b \in A \mid (a, b)^* = 0\}$$

являются аддитивными подгруппами в $(A, +)$. По лемме 3 либо $A_1 = A$, либо $A_2 = A$ т. е. для любого элемента $a \in A$ либо $(a, A) = 0$ либо $(a, A)^* = 0$. Пусть $A_1 = \{b \in A \mid (b, A) = 0\}$ и $A_2 = \{b \in A \mid (b, A)^* = 0\}$. Тогда снова по лемме 3 получаем, что либо $(A, A) = 0$, либо $(A, A)^* = 0$ т. е. либо $A_1 = A$ либо $A_2 = A$.

(б) Пусть $T(A^+) = 0$. Напомним, что центром альтернативного кольца A называется множество

$$z(A) = \{z \in A \mid [z, A] = (z, A, A) = 0\}$$

где $(z, x, y) = (zx)y - z(xy)$ ассоциатор элементов $z, x, y \in A$. Через $Z^*(A)$ обозначим множество обратимых элементов центра $Z(A)$. В ассоциативном случае по теореме Маркова—Роуэна [6] и в альтернативном случае по теореме Слейтера [2] получаем, что $A_1 = Z^*(A)^{-1}A$ является простой конечномерной алгеброй над полем частных $K = Z^*(A)^{-1}z(A)$ или алгеброй Кэли—Диксона над полем K. В первом случае известно, что $\dim_K A_1 \leqq 4$, так как в алгебре A_1 тоже выполняется тождество $T(A^+) = 0$.

Лемма 4. *Пусть A — альтернативная алгебра, Y — неприводимый правый правоальтернативный модуль над A, $z \in Z(A)$, $a \in A$. Тогда $Y(z, a) = 0$.*

Доказательство. В силу линеаризованных тождеств (1) для любых элементов $v \in Y$, $b \in A$ имеем

$$(v, z, a)b = (vz \cdot a)b - (v \cdot za)b =$$

$$= -(vb \cdot a)z + v(za \cdot b + ba \cdot z) + vb \cdot za - v(za \cdot b + b \cdot za) =$$

$$= -(vb \cdot a)z + vb \cdot az = -(vb, a, z) = (vb, z, a).$$

Отсюда следует, что подмножество (Y, z, a) является подмодулем A-модуля Y.

Допустим, что $Y(z, a) = (Y, z, a) \neq 0$. Тогда ввиду неприводимости модуля Y имеем $Y(z, a) = Y$. Заметим, что $v(z, a) = v(a, z)^* = -v(z, a)^*$. Поэтому $v(z, a)(a, z)^* = 0$, так как $(a, b)(a, b)^* = 0$, (см. [2]). Но тогда $Y = Y(z, a)(z, a) = 0$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Определим на Y структуру правого правоальтернативного A_1-модуля. Проверим сначала, что если $0 \neq v \in Y$, $0 \neq z \in Z(A)$, то $vz \neq 0$. Действительно, если $vz = 0$ то по лемме 4 имеем $0 = vz \cdot A = v \cdot zA = v \cdot Az = vA \cdot z = Yz$, откуда $z \in \operatorname{Ann} Y$, $z = 0$.

Для $v_0 z = v_1 \neq 0$ положим $v_1 z^{-1} = v_0$. Далее положим $v \cdot z^{-1}a = vz^{-1} \cdot a$. Докажем корректность такого определения. Пусть $z_1^{-1}a = z^{-1}a_1$. Тогда $za = z_1 a_1$. Сначала докажем равенство

$$vz^{-1} \cdot z_1^{-1} = vz_1^{-1} \cdot z^{-1} = v(zz_1)^{-1} \tag{3}$$

для любых $v \in Y$, $z, z_1 \in Z^*(A)$. Пусть $w = vz^{-1} \cdot z_1^{-1}$, $w_1 = vz_1^{-1} \cdot z^{-1}$. Отсюда следуют, что $wz_1 \cdot z = v$, $wz \cdot z_1 = v$, т. е.

$$w \cdot z_1 z = wz_1 \cdot z = v = w_1 z \cdot z_1 = w_1 \cdot z_1 z, \quad (w - w_1) \cdot z_1 z = 0, \quad w = w_1.$$

В силу леммы 4 и равенства (3) имеем

$$vz^{-1}z_1^{-1}za = vz_1^{-1} \cdot a = v \cdot z_1^{-1}a, \quad vz^{-1}z_1^{-1}z_1 a = vz^{-1} \cdot a_1 = v \cdot z^{-1}a_1$$

т. е.

$$v \cdot z_1^{-1}a = v \cdot z^{-1}a_1. \tag{4}$$

Используя (3) и (4), легко получаем, что

$$v(z^{-1}a \cdot z^{-1}a) = v(z^{-2}a^2) = vz^{-2} \cdot a^2 = (vz^{-1} \cdot z^{-1})a^2 =$$
$$= (vz^{-1} \cdot a^2)z^{-1} = (vz^{-1} \cdot a)a \cdot z^{-1} = (vz^{-1} \cdot a)z^{-1} \cdot a = (v \cdot z^{-1}a) \cdot z^{-1}a,$$
$$v\big((z^{-1}a \cdot z_1^{-1}b)z^{-1}a\big) = \big((v \cdot z^{-1}a)z_1^{-1}b\big) \cdot z^{-1}a.$$

Точность A_1-модуля Y и ясна.

Таким образом, в первом случае (т. е. когда A_1 — ассоциативна) либо Y является правым правоальтернативным модулем над $A_1 = K$, либо $\dim_K A_1 = 4$. Чтобы закончить доказательство можно было сослаться на [3], но ради полноты изложения продолжим рассуждение. Если $A_1 = K$, то $(A_1, A_1) = 0$ (см. [2; стр. 277]).

Пусть $\dim_K A_1 = 4$. В A_1 можно выбрать базу 1, v_1, v_2, v_3. Рассмотрим симметрический многочлен

$$d = (x_1 x_2 - x_3)x_4(x_2 x_1 - x_4).$$

Полагая в d, $x_1 = a^\varrho$, $x_2 = b^\varrho$, $x_3 = (ab)^\varrho$, $x_4 = c^\varrho$, где $a, b, c \in A_1$, получим, что d является симметрическим многочленом от трех букв v_1^ϱ, v_2^ϱ, v_3^ϱ. Значит, по теореме Кона [2] d является йордановым многочленом от v_1^ϱ, v_2^ϱ, v_3^ϱ. Поэтому из $1d = 0$ легко следует, что $d = 0$ на A_1^ϱ.

В работе [1] доказана, что универсальная алгебра правых правоальтернативных представлений $\mathfrak{R}(A_1)$ изоморфна прямой сумме алгебры A_1 и антиизоморфной ей алгебры A_1^0. Докажем, что $(a, b)\mathfrak{R}(A_1)(a, b)^* = 0$, где $a, b \in A_1$. Пусть $(a, b) = x \oplus y$, $x \in A_1$, $y \in A_1^0$, $(a, b)^* = x_1 \oplus y_1$, $x_1 \in A_1$, $y_1 \in A_1^0$. Учитывая равенство $d = 0$ и изоморфную вложимость алгебры A_1 в $\mathfrak{R}(A_1)$ посредством отображения $c \to c \oplus c^0$ имеем $(x \oplus y)(c \oplus c^0)(x_1 \oplus y_1) = xcx_1 \oplus yc^0 y_1 = 0$, $xcx_1 = 0$ и $yc^0 y_1 = 0$ для любого элемента $c \in A_1$. Если $x \neq 0$ и $x_1 \neq 0$, то $xA_1 x_1 = 0$, что противоречит первичности алгебры A_1. Отсюда следует, что либо $x=0$, либо $x_1=0$. Аналогично, либо $y=0$, либо $y_1=0$. Поэтому для любого элемента $c\oplus d^0\in\Re(A_1)$ имеем

$$(a, b)(c\oplus d^0)(a, b)^* = xcx_1\oplus yd^0y_1 = 0\oplus 0 = 0,$$

т. е. $(a, b)\Re(A_1)(a, b)^*=0$.

В алгебре $R_Y(A_1)$ тоже выполняется равенство $(a, b)R_Y(A_1)(a, b)^*=0$, так как $R_Y(A_1)$ является гомоморфным образом алгебры $\Re(A_1)$. Из равенства $Y(a, b)R_Y(A_1)(a, b)^*=0$, рассуждая как в случае (а) получим, что либо $(A_1, A_1)= =0$ либо $(A_1, A_1)^*=0$.

Если алгебра A_1 альтернативна, то $A_1=\mathbf{C}$ и из неприводимости A_1-модуля Y имеем (см. [2; стр. 275]) $Y_\mathbf{C}\in\{\operatorname{reg}\mathbf{C}, \overline{\operatorname{reg}}\,\mathbf{C}\}$. Из неприводимости A-модуля $Y=\mathbf{C}$ следует, что $A=\mathbf{C}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть Y неприводимый правый правоальтернативный модуль над правоальтернативной алгеброй A. Тогда либо $(A, A)=0$, либо $(A, A^*)=0$, либо $Y_{\bar A}\in\{\operatorname{reg}\mathbf{C}, \overline{\operatorname{reg}}\,\mathbf{C}\}$, где $\bar A=A/\operatorname{Ann} Y$.*

Доказательство. Ясно, что всякий неприводимый A-модуль Y является точным неприводимым $\bar A$-модулем, где $\bar A=A/\operatorname{Ann} Y$. Из $v\bar a=v(a+\operatorname{Ann} Y)= =va$ следует, что $(\bar A, \bar A)=0$ или $(\bar A, \bar A)^*=0$ тогда и только тогда, когда, $(A, A)=0$ или $(A, A)^*=0$. Теорема доказана.

Автор благодарит профессора Л. А. Бокутя за научное руководство работой и Е. И. Зельманова за ценные советы.

Литература

[1] А. М. Слинько, И. П. Шестаков, Правые представления алгебр, *Алгебра и логика*, **13** (1974), 544—587.

[2] К. А. Жевлаков и др., *Кольца, близкие к ассоциативным*, Наука (Москва, 1978).

[3] И. П. Шестаков, Неприводимые представления альтернативных алгебр, Мат. заметки, **26** (1979), 673—684.

[4] K. McCrimmon, E. I. Zelmanov, *The structure of prime quadratic Jordan algebras*, Preprint, University of Munich, 1984.

[5] A. Thedy, Radicals of right alternative and Jordan rings, *Comm. Algebra*, **12** (1984), 857—887.

[6] Л. А. Бокуть, *Ассоциативные кольца*. II (Новосибирск, 1980).

[7] Ц. Дашдорж, Невырожденные правоальтернативные кольца, Деп. в ВИНИТИ за №7129-В.

П/Я 46/534
УЛАНБАТОР, МОНГОЛИЯ