Acta Sci. Math., 54 (1990), 269—271

Ein neuer elementarer Beweis der Kreisaxiome der hyperbolischen Geometrie

J. STROMMER

Unter Kreisaxiomen verstehen wir die folgenden beiden Axiome der elementaren ebenen Geometrie:

K 1. *Wenn A, B, C nicht in einer Geraden gelegene Punkte sind und D ein Punkt der Geraden AB ist, der zwischen A und B liegt, so gibt es einen Punkt B' der Geraden CD, so daß* $AB \equiv AB'$ *ist.*[1])

K 2. *Es seien A, B, C Punkte auf der Geraden a und A, B', C' Punkte auf derselben oder einer anderen Geraden a', so daß C zwischen A und B liegt und B' zwischen A und C' und* $AB \equiv AB'$ *ist; wenn dann D ein Punkt ist, so daß* $CD \equiv DC'$ *wird, so gibt es stets einen Punkt E, so daß* $AB \equiv AE$ *und* $CD \equiv DE$ *ist.*[2])

Es ist bekannt, daß sich das erste der obigen beiden Axiome auf Grund der ebenen Axiome der Verknüpfung, der Anordnung und der Kongruenz aus dem zweiten ableiten läßt. (S. z. B. [1], S. 135.) Daß es auch umgekehrt, das zweite auf Grund derselben Axiome aus dem ersten folgt, habe ich in einer früheren Arbeit [7] bewiesen.

Schon F. Schur hat mit projektiven Methoden bewiesen [5], daß das Axiom K 1 eine Folge der Axiome I—IV ist, die Hilbert zur Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie angenommen hat [3]; außerdem haben J. C. H. Gerretsen [2] und P. Szász [8] mittels der auf die „Endrechnung" von Hilbert gegründeten Trigonometrie bzw. analytischen Geometrie bewiesen, daß auch das Axiom K 2 eine Folge der erwähnten Axiome ist. Später habe auch ich auf Grund der Axiome I—IV einen rein elementaren unmittelbaren Beweis beider Axiome

[1]) Wenn ein Punkt einer Geraden im Inneren eines Kreises liegt, so hat die Gerade mit dem Kreis einen Punkt gemein.

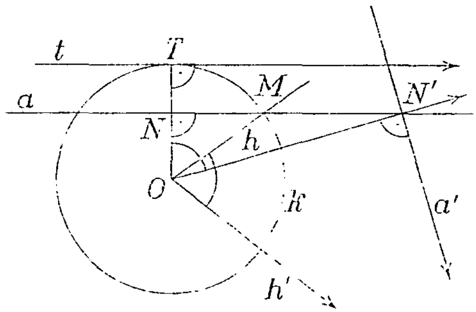
[2]) Wenn ein Kreis einen Punkt im Inneren und einen Punkt im Äußeren eines anderen Kreises hat, so haben die beiden Kreise einen Punkt gemein.

Eingegangen am 16 März 1988.

gegeben [6], der auf einer gewissen Zuordnung zwischen den rechtwinkligen Dreiecken und den Vierecken mit drei rechten Winkeln beruht, die schon Lobatschefsky gefunden hat.

In dem nachfolgenden Beweis stützen wir uns nur auf die Theorie der Hjelmslevschen Halbdrehungen, welche auf Grund der Axiome I—III allein abgeleitet werden kann. (S. z. B. [4].)

Zum Beweise sei a eine beliebige Gerade, die den Radius OT des Kreises k um O in einem inneren Punkt N rechtwinklig schneidet (s. nebenstehende Figur), und ferner t in dem Punkt T an den Kreis k gelegte Tangente. Die von O aus nach



einer Richtung hin parallel zu t gezogene Halbgerade schneide a in N'. Wir bezeichnen die Gerade, welche in N' auf ON' senkrecht steht, mit a' und ziehen dann von O aus der T in bezug auf ON' gegenüberliegenden Seite die zu a' parallele Halbgerade h'. Endlich sei h diejenige Halbgerade von O aus, welche auf derselben Seite von OT wie der Punkt N' liegt und überdies mit h' einen Winkel einschließt, der gleich dem von den Halbgeraden ON und ON' gebildeten Winkel wird.

Es ist nun leicht zu sehen, daß bei einer beliebigen Halbdrehung um O dem gemeinsamen uneigentlichen Punkt zweier beliebigen, zueinander parallelen Geraden ein Punkt des Kreises um O entspricht, dessen Radius gleich dem zum Winkel der Halbdrehung als Parallelwinkel gehörigen Lot ist.[3])

Da aber die zum Winkel $(h', OM) = (N'ON)$ als Parallelwinkel gehörende Lotstrecke gleich OT ist, ist $OM = OT$, und daher schneidet die Gerade a den Kreis k in M. Damit ist der Beweis für das Axiom K 1 vollständig erbracht.

Aber auf Grund der Axiome I—III ist das Axiom K 2, wie bereits erwähnt, eine Folge des Axioms K 1.

[3]) Die Existenz der zu dem Parallelwinkel $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$ gehörigen Lotstrecke p hat schon Hilbert ohne Stetigkeitsbetrachtungen bewiesen. (Vgl. [3], S. 142—144.)

Literaturverzeichnis

[1] H. G. Forder, *The foundations of euclidean geometry* (Cambridge, 1927).

[2] J. C. H. Gerretsen, Die Begründung der Trigonometri in der hyperbolischen Ebene, *Proc. Akad. Wetensch. Amsterdam*, **45** (1942), 360—366, 479—483, 559—566.

[3] D. Hilbert, Neue Begründung der Bolyai—Lobatschefskyschen Geometrie, *Math. Ann.*, **57** (1903), 137—150.

[4] J. Hjelmslev, Neue Begründung der ebenen Geometrie, *Math. Ann.*, **64** (1907), 449—474.

[5] F. Schur, Zur Bolyai—Lobatschefskijschen Geometrie, *Math. Ann.*, **59** (1904), 314—320.

[6] J. Strommer, Ein elementarer Beweis der Kreisaxiome der hyperbolischen Geometrie, *Acta Sci. Math.*, **22** (1961), 190—195.

[7] J. Strommer, Über die Kreisaxiome, *Period. Math. Hungar.*, **4** (1973), 3—16.

[8] P. Szász, New proof of the circle axiom for two circles in the hyperbolic plane by means of the end-calculus of Hilbert, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Sectio Math.*, **1** (1958), 97—100.

TECHNICAL UNIVERSITY
DEPT. OF GEOMETRY
STOCZEK U. 4
BUDAPEST
H-1111