Acta Sci. Math., 54 (1990), 277—283

Представление абсолютно непрерывных функций многих переменных

А. А. ТАЛАЛЯН и Г. Г. ГЕВОРКЯН

Для абсолютно непрерывных функций одной переменной $f(x)$ хорошо известна формула

$$f(x)-f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt, \tag{1}$$

где $f'(t)$ существует почти всюду, а x любая точка из отрезка $[0, 1]$, на котором определена $f(x)$. Цель настоящей статьи-получить аналог представления (1) для абсолютно непрерывных функций n действительных переменных.

Условимся в некоторых обозначениях. Через $x=(x_1, ..., x_n)$ обозначаются точки пространства $\mathbf{R}^n$, а через $|A|$-Лебеговая мера множества $A\subset\mathbf{R}^n$. Если $\Delta=\prod_{i=1}^n \Delta_i$, где $\Delta_i=[a_i^{(1)}; a_i^{(2)})$ любой полуоткрытый интервал на оси OX_i, то

$$\Delta F = \Delta_n(\Delta_{n-1}\cdots(\Delta_1 F(x))), \tag{2}$$

где

$$\Delta_i g(x) = g(x_1, ..., a_i^{(2)}, ..., x_n)-g(x_1, ..., a_i^{(1)}, ..., x_n). \tag{3}$$

Методом математической индукции по количеству переменных n, легко можно убедиться, что

$$\Delta F = \sum_{\substack{i_j=1,2\\ j=1,2,...,n}} (-1)^{i_1+\dots+i_n} F(a_1^{(i_1)}, ..., a_n^{(i_n)}). \tag{4}$$

Определение 1. Скажем, что функция $F(x)$, определенная на $[0, 1]^n$ *абсолютно непрерывна*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого набора прямоугольников $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, ...;\ \Delta^{(k)}=\prod_{i=1}^n \Delta_i^{(k)}$, $\Delta^{(k)}\subset[0, 1]^n$, удовлетворяющих условиям

$$\Delta^{(k)}\cap\Delta^{(k')} = \emptyset, \quad \text{когда} \quad k\neq k', \tag{5}$$

Поступило 15 апреля 1988 г.

и

(6) $$\sum_k |\Delta^{(k)}| < \delta,$$

выполняется

(7) $$\sum_k |\Delta^{(k)} F| < \varepsilon.$$

Определение 2. Функцию $F(k)$, определенную на $[0, 1]^n$, назовем *функцией ограниченной вариации,* если сучествует зависящая от $F(x)$ постоянная M, такая что при любом представлении $[0, 1)^n = \bigcup_k \Delta^{(k)}$, $\Delta^{(k)} \cap \Delta^{(k')} = \emptyset$, когда $k \neq k'$, выполняется

(8) $$\sum_k |\Delta^{(k)} F| \leqq M.$$

Верхнюю грань сумм (8) обозначим $\bigvee_{[0,1)^n} (F)$ и назовем вариацией функции $F(x)$ на $[0, 1)^n$.

Как и для функций одной переменной (см. [1]), легко выдеть, что абсолютно непрерывная функция n переменных $F(x)$ имеет ограниченную вариацию. Хорошо известно, что абсолютно непрерывные функции одной переменной являются так же непрерывными, а функции ограниченной вариации непрерывны всюду, кроме, быть может, некоторого счетного множества точек. В случае многих переменных это уже не так. Абсолютно непрерывная функция многих переменных может не быть даже измеримой. Действительно, если $g(t)$ некоторая неизмеримая функция одной переменной, то функция $F(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1)$ будет неизмеримой, и для любого выполнится $\Delta F = 0$.

Как и для функций одной переменной, для функций многих переменных, имеющих ограниченную вариацию, можно доказать возможность представления

(9) $$F(x) = \Phi(x) - \Psi(x),$$

где $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ при любом Δ удовлетворяют условию

(10) $$\Delta\Phi \geqq 0, \quad \Delta\Psi \geqq 0.$$

В представлении (9) в качестве $\Phi(x)$ можно взять

(11) $$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{\bigcap_{i=1}^{n} [0, x_i)} (F)$$

причем, если $F(x)$-абсолютно непрерывная функция, то функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ тоже абсолютно непрерывны (в условиях Определения 1). Доказательства этих утверждений полностью совпадают с доказательствами аналогичных фактов для функций одной переменной (см. [1]). Поэтому мы их приводить не будем.

Несмотря на то, что абсолютно непрерывная функция многих переменных может не быть измеримой, имеет место следующая

Теорема. *Для того, чтобы $F(x)$ была абсолютно непрерывной функцией, необходимо и достаточно, чтобы она имела представление*

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_j F_j(x_1, \dots, x_n) + \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_1} \varphi(t_1, \dots, t_n)\, dt_1, \dots, dt_n, \tag{12}$$

где $F_j(x_1, \dots, x_n)$ — некоторые функции, зависящие от меньшего числа переменных, а $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ — интегрируемая по Лебегу функция.

Отметим, что в случае $n=2$ и при дополнительных условиях, что функции $F(0, x_2)$ и $F(x_1, 0)$ абсолютно неприрывны (как функции от одной переменной), теорема доказана в [2] методами, отличающимися от ниже изложенных.

Доказательство теоремы. *Достаточность.* Нетрудно проверить, что для функций $F_j(x)$ имеет место (см. (4))

$$\Delta F_j = 0 \quad \text{для любого} \quad \Delta. \tag{13}$$

Поетому

$$\Delta F = \Delta \left(\int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_1} \varphi(t_1, \dots, t_n)\, dt_1, \dots, dt_n \right) = \int_\Delta \varphi(t)\, dt. \tag{14}$$

Из абсолютной непрерывности интеграла Лебега и из (14) получаем, что $F(x)$ абсолютно непрерывна в смысле Определения 1.

Необходимость. Учитывая разложение (9), (10), без ограничения общности, можно считать, что функция $F(x)$ удовлетворяет условию

$$\Delta F \geqq 0 \quad \text{для любого} \quad \Delta. \tag{15}$$

Обозначим

$$\tilde{F}(x) = \Delta_x F, \quad \text{где} \quad \Delta_x = \prod_{i=1}^{n} [0, x_i). \tag{16}$$

Очевидно, что $\tilde{F}(x)$ есть $F(x)$ плюс некоторые функции (см. (4)) меньшего числа переменных. Поэтому

$$\Delta \tilde{F} = \Delta F \geqq 0. \tag{17}$$

Лемма 1. *Если* $\Delta^{(k)}=\prod_{i=1}^{n}\Delta_i^{(k)}$, $k=1,2,\ldots,m$, *удовлетворяют условиям* $\Delta^{(k)}\cap\Delta^{(k')}=\emptyset$, $k\neq k'$, *и* $\bigcup_{k=1}^{m}\Delta^{(k)}=\Delta=\prod_{i=1}^{n}\Delta_i$, *то*

$$\Delta F=\sum_{r=1}^{m}\Delta^{(k)}F. \tag{18}$$

Действительно, когда $m=2$, то при некотором i_0, $\Delta_{i_0}=\Delta_{i_0}^{(1)}\cup\Delta_{i_0}^{(2)}$, $\Delta_{i_0}^{(1)}\cap\cap\Delta_{i_0}^{(2)}=\emptyset$, $\Delta_i=\Delta_i^{(1)}=\Delta_i^{(2)}$, при $i\neq i_0$, и тогда легко выдеть, что в сумме $\sum_{k=1}^{2}\Delta^{(k)}F$ (см. (4)) остаются только те слагаемые, которые нужны для представления ΔF (по формуле (4)).

Случай, когда $\Delta_i=\bigcup_{j=1}^{m_i}\Delta_i^{(j)}$, $\Delta_i^{(j)}\cap\Delta_i^{(j')}=\emptyset$, $j\neq j'$ и

$$\{\Delta^k\}=\left\{\Delta'\colon \Delta'=\prod_{i=1}^{n}\Delta_i^{(j_i)},\ 1\leqq j_i\leqq m_i\right\} \tag{19}$$

т. е. когда каждая компонента Δ_i прямоугольника Δ разбыта на непересекающиеся интервалы $\Delta_i^{(j)}$, а прямоугольники $\Delta^{(k)}$ являются всевозможными декартовыми произведениями этих $\Delta_i^{(j)}$, легко приводится к случаю $m=2$.

Общий случай приводится к случаю (19) путем размельчания прямоугольников $\Delta^{(k)}$. Лемма доказана.

Из (17), (18) следует, что если для каждого прямоугольника определить

$$\nu(\Delta)=\Delta F, \tag{20}$$

то $\nu(\Delta)$ будет мерой, определенной на полукольце прямоугольников $\{\Delta\}$ (см. [3], гл. V, § 2). Эта мера единственным образом продолжается на минимальное кольцо, содержащее полукольцо $\{\Delta\}$.

Из того, что $\nu(\Delta)$ является мерой, легко выводится непрерывность функции $\tilde F(x)$. Действительно,

$$|\tilde F(x^{(1)})-\tilde F(x^{(2)})|=|\Delta_{x^{(1)}}F-\Delta_{x^{(2)}}F|= \tag{21}$$
$$=|\nu(\Delta_{x^{(1)}})-\nu(\Delta_{x^{(2)}})|\leqq\nu\big((\Delta_{x^{(1)}}\setminus\Delta_{x^{(2)}})\cup(\Delta_{x^{(2)}}\setminus\Delta_{x^{(1)}})\big).$$

Учитывая, что $\Delta_{x^{(1)}}\setminus\Delta_{x^{(2)}}$ и $\Delta_{x^{(2)}}\setminus\Delta_{x^{(1)}}$ являются объединением конечнего числа прямоугольников, сумма Лебеговских мер которых стремится к нулю, когда $\|x^{(1)}-x^{(2)}\|\to 0$, из (21) и Определения 1 получаем непрерывность функции $\tilde F(x)$.

Лемма 2. *Мера* ν *σ-аддитивная мера на* $\{\Delta\}$.

Для доказательства леммы достаточно убедиться, что если $\Delta=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta^{(k)}$ то (см. [3], гл. V, § 2)

$$\nu(\Delta)\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\nu(\Delta^{(k)}). \tag{22}$$

Из непрерывности функции $\tilde{F}(x)$ и (4) следует, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдутся Δ', $\Delta^{(k)'}$, $k=1, 2, \ldots$, такие что (см. также (17), (20))

$$\bar{\Delta}'\subset\Delta,\quad \nu(\Delta')\geqq\nu(\Delta)-\varepsilon, \tag{23}$$

$$\Delta^{(k)}\subset\operatorname{int}(\Delta^{(k)'}),\quad \nu(\Delta^{(k)'})\leqq\nu(\Delta^{(k)})+\varepsilon/2^k,\quad k=1, 2, \ldots. \tag{24}$$

Очевидно, что замкнутое множество $\bar{\Delta}'$ покрывается открытыми прямоугольниками $\operatorname{int}(\Delta^{(k)'})$. Следовательно существует конечный набор $\{\operatorname{int}(\Delta^{(k_i)'})\}$, который тоже покрывает $\bar{\Delta}'$. Тогда $\Delta'\subset\bigcup_i\Delta^{(k_i)'}$, и из (23), (24) получаем

$$\nu(\Delta)\leqq\nu(\Delta')+\varepsilon<\sum_i\nu(\Delta^{(k_i)'})+\varepsilon\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\nu(\Delta^{(k)'})+\varepsilon\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\nu(\Delta^{(k)})+2\varepsilon. \tag{25}$$

Из (25) следует (22), а из (22), как уже было отмечено, следует утверждение леммы.

Из Леммы 2 следует (см. [3]), что меру ν можно продолжить на σ-алгебру множеств, измеримых по Лебегу, и эта мера будет σ-аддитивной. Из Определения 1 следует, что мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т. е. если $|A|=0$, то $\nu(A)=0$. В силу теоремы Радона—Никодима (см. [3], гл. VI, § 5) существует интегрируемая (по Лебегу) функция $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$, такая что для любого измеримого по Лебегу множества A имеет место

$$\nu(A)=\int_A\varphi(t)\,dt. \tag{26}$$

В частном случае, когда $A=\prod_{i=1}^{n}[0, x_i]$, из (20), (26), (17) получается

$$\tilde{F}(x)=\int_0^{x_n}\ldots\int_0^{x_1}\varphi(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1\ldots dt_n. \tag{27}$$

Учитывая, что $\tilde{F}(x)$ является суммой $F(x)$ и некоторых функций меньшего числа переменных (см. (16) и (4)), из (27) получаем (12). Теорема доказана.

Полученное соотношение (27) эквивалентно следующему (см. (16))

$$\Delta_x F=\int_0^{x_n}\ldots\int_0^{x_1}\varphi(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1\ldots dt_n \tag{28}$$

которое является аналогом равенства (1) для функций многих переменных.

Существенной разницей между формулами (1) и (28) является то, что в (1) известны способы нахождения подинтегральной функции, а в (28) лишь утверждается существование функции $\varphi(t)$. С целю устронения этой разницы рассмотрим следующие функции. Через $G^{(k)}$ обозначим n-мерные кубы вида $[i_1/2^k, (i_1+1)/2^k)\times\ldots\times[i_n/2^k, (i_n+1)/2^k)$, где $0\leqq i_n<2^k$. Для $k=0, 1, 2, \ldots$ положим

$$(29)\qquad \Phi_k(x)=\frac{1}{|G^{(k)}|}\int\limits_{G^{(k)}}\varphi(t)\,dt,\quad \text{когда}\quad x\in G^{(k)}.$$

Из (26), (20) получаем

$$(30)\qquad \Phi_k(x)=\frac{G^{(k)}F}{|G^{(k)}|},\quad \text{когда}\quad x\in G,^{(k)}\quad k=0, 1, 2, \ldots.$$

С другой стороны, из известной теоремы Йессена, Марцинкевича и Зигмунда (см. [4], теорема 6) следует, что

$$(31)\qquad \lim_{k\to\infty}\Phi_k(x)=\varphi(x)\quad \text{п.в. на}\quad [0, 1]^n.$$

Итак, функция $\varphi(x)$ есть предел последовательности функций $\Phi_k(x)$ которые определяются функцией $F(x)$ формулами (30).

Замечание. Теорему можно доказать также, исходя из функций $\Phi_k(x)$ определяемих формулами (30). Укажем шаги такого способа доказательства. Во-первых, можно убедится, что $\{\Phi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ является равностепенно абсолютно непрерывно интегрируемой мартингальной последовательностью, и поэтому последовательность $\{\Phi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ почти всюду и в метрике L_1 сходится к некоторой функции $\varphi(x)$. Далее, легко проверяется, что для любого $x=(x_1, \ldots, x_n)=$ $=(i_1/2^{k_1}, \ldots, i_n/2^{k_n})$, начиная с некоторого k_0 выполняется

$$(32)\qquad \Delta_x F=\int\limits_0^{x_n}\ldots\int\limits_0^{x_1}\Phi_k(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1\ldots dt_n.$$

Следовательно

$$(33)\quad \Delta_x F=\int\limits_0^{x_n}\ldots\int\limits_0^{x_1}\varphi(t_1, \ldots, t_n)\,dt_1\ldots dt_n\ \text{ при любом }\ x_j=i_j/2^{k_j},\ j=1, \ldots, n.$$

Наконец, так как обе стороны равенства (33) являются непрерывными функциями и точки $(i_1/2^{k_1}, \ldots, i_n/2^{k_n})$ всюду плотны, то (33) выполняется при любом $(x_1, \ldots, x_n)$.

Литература

[1] И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной,* Гостехиздат (Москва, 1957).

[2] E. Berkson and T. A. Gillespie, Absolutely continuous functions of two variables and well-bounded operators, *J. London Math. Soc.*, **30** (1984), 305—321.

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа,* Наука (Москва, 1976).

[4] B. Jessen, J. Marczinkiewicz, A. Zygmund, Note on the differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, **25** (1935), 217—234.

(А.А.Т.)
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
А.Н. АРМ. ССР.
ЕРЕВАН
СССР

(Г.Г.Г.)
ЕРЕВАНСКИЙ ГОС. УНИВЕРСИТЕТ
ЕРЕВАН
СССР