Acta Sci. Math., 54 (1990), 305—312

Starke Approximation von Orthogonalreihen mit Cesàroverfahren

W. HENRICH

Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein auf dem Intervall (a, b) definiertes Orthonormalsystem. Wir untersuchen die Orthonormalreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad c_n \in \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty. \tag{1}$$

Mit dem wohlbekannten Satz von Riesz—Fischer folgt, daß Reihe (1) in L^2 gegen eine quadratisch integrierbare Funktion f konvergiert. Wir nennen die Partialsummen von Reihe (1) $s_n(x)$ und die (C, α)-Mittel $\sigma_n^\alpha(x)$.

Eine Verallgemeinerung der Cesàro-Verfahren führt zu den Hausdorffverfahren. Ein Hausdorffverfahren ist ein lineares Limitierungsverfahren, das mit Hilfe einer beliebigen Diagonalmatrix $\mu = \mu_\nu$ und der Differenzenmatrix Δ wie folgt definiert ist.

$$H(\Delta, \mu_\nu) = \Delta \cdot \mu \cdot \Delta \quad \text{mit} \quad \Delta = \left((-1)^\nu \binom{n}{\nu}\right).$$

Die Matrixelemente $h_{n\nu}$ der Hausdorffmatrix $H(\Delta, \mu_\nu)$ haben folgende Darstellung

$$h_{n\nu} = \begin{cases} \binom{n}{\nu} \sum_{k=0}^{n-\nu} (-1)^k \binom{n-\nu}{k} \mu_{\nu+k} & \text{für} \quad 0 \leqq \nu \leqq n \quad (n = 0, 1, \ldots) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Über die Regularität von Hausdorffverfahren gilt folgender

Satz. *Das Hausdorffverfahren H ist genau dann regulär, wenn* $\{\mu_n\}$ *eine reguläre Momentenfolge ist, d. h.* $\mu_n = \int_0^1 t^n \, d\mu(t)$ *mit* $\mu(t) \in \mathrm{BV}\,[0, 1]$ *und* $\mu(+0) = \mu(0) = 0$, $\mu(1) = 1$.

L. Leindler zeigte in [2]

Eingegangen am 8 Februar 1988.

Satz I. *Es sei* $0<\delta<1$ *und*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2\delta} < \infty, \tag{2}$$

dann gilt $f(x)-\sigma_n^1(x)=o_x(n^{-\delta})$ *f. ü. auf* (a, b).

G. SUNOUCHI [5] verallgemeinerte Satz I zur starken Approximation wie folgt:

Satz II. *Es sei* $0<\delta<1$ *und es gelte* (2). *Dann gilt*

$$\left\{\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}|f(x)-s_\nu(x)|^k\right\}^{1/k} = o_x(n^{-\delta})$$

f. ü. auf (a, b) *für* $\alpha>0$ *und* $0<k<\delta^{-1}$ *wobei* $A_n^\alpha=\binom{n+\alpha}{n}$.

LEINDLER [3] wiederum verallgemeinerte das Ergebnis von Sunouchi wie folgt:

Satz III. *Es sei* $0<\delta<1, \alpha>0, 0<k<\delta^{-1}$ *und* $\beta>-\min(1/2, 1/k, \alpha/k)$. *Dann folgt aus* (2)

$$\left\{\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}|\sigma_\nu^\beta(x)-f(x)|^k\right\}^{1/k} = o_x(n^{-\delta}) \quad \text{f.ü. auf} \quad (a, b).$$

Für schwache äußere Verfahren (d. h. α sehr klein) kann sich β offensichtlich nur in einem sehr engen negativen Bereich bewegen. Bezogen auf diese Problematik zeigte LEINDLER [4]

Satz IV. *Es sei* $0<\alpha<1$, $\beta>-1/2$, $0<\delta<\alpha/2$ *und*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 n^{2\delta+1-\alpha} < \infty. \tag{3}$$

dann gilt

$$\left\{\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}|\sigma_\nu^\beta(x)-f(x)|^2\right\}^{1/2} = o_x(n^{-\delta}) \quad \text{f.ü. auf} \quad (a, b).$$

Der Satz von Leindler gibt Kriterien für die starke Approximation an, speziell für schwache äußere (C, α)-Verfahren mit dem Exponent 2. Es stellt sich die Frage: Welche Aussagen kann man für größeren Exponenten $(k>2)$ treffen? Eine Antwort liefert der folgende Satz.

Satz 1. *Es sei* $0<\alpha<1$, $k>2$, $0<\delta<\alpha/2$, $\beta>-1/2+\alpha(1/2-1/k)$, *und es gelte* (3). *Dann gilt*

$$\left(\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1}|\sigma_\nu^\beta(x)-f(x)|^k\right)^{1/k} = o_x(n^{-\delta})$$

f. ü. auf (a, b).

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 1 beweisen wir einen allgemeinen limitierungstheoretischen Satz über Hausdorffverfahren, der besagt: Schaltet man bei der starken Approximation einer beliebigen Reihe vor das innere Verfahren ein reguläres Hausdorffverfahren, so kann man auch auf größere k-Parameterwerte (Exponent) schließen. Der Schluß auf kleinere k-Parameterwerte kann immer in einfacher Weise mit der Hölderschen Ungleichung vollzogen werden.

Satz 2. *Es sei* $k_1 > k_2 \geqq 1$; $p > 1$,

$$g_n = \int_0^1 t^n g(t)\,dt \quad mit \quad g(t) \in L^p[0, 1] \quad und \quad g_0 = 1$$

$$h_n = \int_0^1 t^n h(t)\,dt \quad mit \quad h(t) \in L[0, 1], h(t) > 0 \quad für \quad t \in [0, 1].$$

Zusätzliche gelte für die Funktionen $g(t)$ *und* $h(t)$

$$z(t) := \begin{cases} |g(t)|^{k_1(1-p+(p/k_2))}\, h(t)^{(k_2-k_1)/k_2} & für \quad g(t) \neq 0 \\ 0 & sonst, \end{cases}$$

$z(t) \in L[0, 1]$ *und* $z(t) = o(t^{-r})$ *für* $t \in [0, \varepsilon]$ *mit* $\varepsilon > 0$ *und* $0 < r < 1$. Q *sei eine beliebige Limitierungsmatrix, G bzw. H seien Hausdorffmatrizen, die durch die Momentenfolgen* $\{g_n\}$ *bzw.* $\{h_n\}$ *gegeben sind. Wir bezeichnen die Matrixelemente von H mit* $h_{n\nu}$. *Dann folgt für eine beliebige Folge* $\{s_n\}$ *und für alle* $\delta > 0$ *mit* $k_1\delta < 1 - r$ *aus*

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{n} h_{n\nu} |Q(s_\nu) - s|^{k_2}\Big)^{1/k_2} = o(n^{-\delta}),$$

daß

$$\Big(\sum_{\nu=0}^{n} h_{n\nu} |GQ(s_\nu) - s|^{k_1}\Big)^{1/k_1} = o(n^{-\delta}).$$

Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma 1. *Es sei* $k_1 > k_2 \geqq 1$; $p > 1$. *Die Hausdorffverfahren G und H seien definiert wie in Satz 2*

$$z_n := \int_0^1 t^n z(t)\,dt \quad mit \quad z(t) \quad aus\ Satz\ 2.$$

Das Hausdorffverfahren Z sei definiert durch die Momentenfolge $\{z_n\}$. *Dann gilt für jede beliebige Folge* $\{s_\nu\}$:

$$\big|(G(s_\nu))_n\big|^{k_1} \leqq K\big(H(|s_\nu|^{k_2})\big)_n^{(k_1/k_2)-1} \cdot \big(Z(|s_\nu|^{k_2})\big)_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei K eine Konstante ist.

Lemma 2. *Es sei $\{s_n\}$ eine Folge mit $s_n \to 0$ für $n \to \infty$. Das Limitierungsverfahren A sei gegeben durch die Matrix $(a_{n\nu})$. Dann gilt: Das Verfahren A limitiert die Folge $\{s_n\}$ zum Wert Null, d. h. $A(s_n) \to 0$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(I) $\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| < K$, *wobei K unabhängig von n ist,* $n = 0, 1, 2, \ldots$

(II) $a_{n\nu} \to 0$ *für jedes feste* ν *und für* $n \to \infty$.

Beweis. Siehe ([1] Seite 43—46).

Hilfssatz 1.

$$\binom{n}{\nu} \int_0^1 t^\nu (1-t)^{n-\nu} t^{-r} \, dt = O(1) (\nu+1)^{-r}/(n+1)^{1-r} \quad \textit{für} \quad 0 < \nu \leqq n,$$

$$n = 0, 1, \ldots \quad \textit{und} \quad 0 < r < 1.$$

Beweis. Ergibt sich leicht unter Berücksichtigung der Integraldarstellung der Matrixelemente der Cesàro-Verfahren.

Beweis von Lemma 1. Wir setzen

$$f_n(t) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} s_\nu \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Zunächst führen wir eine Abschätzung durch, die wir im letzten Beweisschritt benutzen werden.

$$|f_n(t)|^{k_2} \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} |s_\nu|^{k_2} \left(\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} \right)^{k_2-1} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} |s_\nu|^{k_2}.$$

Also erhalten wir

$$(*) \qquad \int_0^1 h(t) \, |f_n(t)|^{k_2} \, dt \leqq \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^1 \binom{n}{\nu} t^\nu (1-t)^{n-\nu} h(t) \, dt \, |s_\nu|^{k_2} = \left(H(|s_\nu|^{k_2})\right)_n.$$

In analoger Weise ergibt sich

$$(**) \qquad \int_0^1 z(t) \, |f_n(t)|^{k_2} \, dt \leqq \left(Z(|s_\nu|^{k_2})\right)_n.$$

Es sei M die Menge aller Punkte t, für die gilt $t\in[0,1]$ und $g(t)\neq 0$.

$$|G(s_\nu)_n|^{k_2} \leqq \Big\{\int_0^1 |g(t)|^p\,dt\Big\}^{k_2-1}\Big\{\int_M |g(t)|^{(1-p(1-1/k_2))k_2}|f_n(t)|^{k_2}\,dt\Big\} =$$

$$= K^{k_2-1}\int_M |g(t)|^{(1-p(1-1/k_2))k_2}|f_n(t)|^{k_2}\,dt.$$

$$|G(s_\nu)_n|^{k_2} \leqq K^{k_2-1}\int_M h(t)^{(k_2-k_1)/k_1}|f_n(t)|^{k_2(k_2/k_1)}|g(t)|^{k_2(1-p+(p/k_2))}\times$$

$$\times h(t)^{(k_1-k_2)/k_1}|f_n(t)|^{k_2(k_1-k_2)/k_1}\,dt \leqq$$

$$\leqq K^{k_2-1}\Big\{\int_M h(t)^{(k_2-k_1)/k_2}|f_n(t)|^{k_2}|g(t)|^{k_1(1-p+(p/k_2))}\,dt\Big\}^{k_2/k_1}\times$$

$$\times\Big\{\int_M h(t)|f_n(t)|^{k_2}\,dt\Big\}^{(k_1-k_2)/k_1}.$$

Mit $z(t)=|g(t)|^{k_1(1-p+(p/k_2))}h(t)^{(k_2-k_1)/k_2}$ und mit den Abschätzungen $(*)$ und $(**)$ folgt

$$|G(s_\nu)_n|^{k_2} \leqq K^{k_2-1}\big(H(|s_\nu|^{k_2})\big)_n^{(k_1-k_2)/k_1}\big(Z(|s_\nu|^{k_2})\big)_n^{k_2/k_1}.$$

Indem man diese Ungleichung mit k_1/k_2 potenziert erhält man die Behauptung.

Beweis von Satz 2. Zum Beweis von Satz 2 reicht es aus, den Fall $Q=1$ zu betrachten. Es sei $\{s_n\}$ eine beliebige Folge, und es gelte

$$\Big\{\sum_{\nu=0}^n h_{n\nu}|s_\nu-s|^{k_2}\Big\}^{1/k_2} = o(n^{-\delta}).$$

Mit $z_{n\nu}$ bezeichnen wir die Matrixelemente des Limitierungsverfahrens Z, das durch die Momentenfolge $\{z_n\}$ aus Lemma 1 gegeben ist.

Da das Hausdorffverfahren G regulär ist, gilt insbesondere

$$\big(G(s_j)\big)_\nu - s = \big(G(s_j-s)\big)_\nu.$$

Unter Verwendung von Lemma 1 erhalten wir

$$n^{k_1\delta}\sum_{\nu=0}^n h_{n\nu}\big|\big(G(s_j)\big)_\nu - s\big|^{k_1} = n^{k_1\delta}\sum_{\nu=0}^n h_{n\nu}\big|\big(G(s_j-s)\big)_\nu\big|^{k_1} =$$

$$= O(1)n^{k_1\delta}\sum_{\nu=0}^n h_{n\nu}\{H(|s_j-s|^{k_2})\}_\nu^{(k_1/k_2)-1}\{Z(|s_j-s|^{k_2})\}_\nu =$$

$$= O(1)n^{k_1\delta}\sum_{\nu=0}^n h_{n\nu}\{Z(|s_j-s|^{k_2})\}_\nu\cdot(\nu+1)^{\delta(k_2-k_1)}.$$

Denn nach Voraussetzung gilt $\big(H(|s_j-s|^{k_2})\big)_\nu = o(\nu^{-k_2\delta})$.

Die Hausdorffverfahren H und Z sind vertauschbar. Somit gilt

$$n^{k_1\delta}\sum_{\nu=0}^{n} h_{n\nu}(Z(|s_j-s|^{k_2}))_\nu(\nu+1)^{-k_1\delta+k_2\delta}=$$

$$=O(1)n^{k_1\delta}\sum_{\nu=0}^{n} z_{n\nu}\sum_{j=0}^{\nu} h_{\nu j}|s_j-s|^{k_2}(\nu+1)^{-k_1\delta+k_2\delta}=$$

$$=O(1)\sum_{\nu=0}^{n} n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta}z_{n\nu}t_\nu$$

mit

$$t_\nu=(\nu+1)^{k_2\delta}\sum_{j=0}^{\nu} h_{\nu j}|s_j-s|^{k_2}.$$

Nach Voraussetzung gilt $t_\nu=o(1)$. Somit haben wir unter Beachtung von Lemma 2 zu zeigen:

(I) $$\sum_{\nu=0}^{\infty}|n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta}z_{n\nu}|<K \quad \text{für} \quad n=0,1,2,\ldots$$

(II) $$\{n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta}z_{n\nu}\}\to 0 \quad (n\to\infty) \quad \text{für} \quad \nu=0,1,2,\ldots.$$

Zu (I). Mit der Integraldarstellung der Hausdorffschen Matrixelemente $z_{n\nu}$ ergibt sich somit:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta}z_{n\nu}=\sum_{\nu=0}^{n} n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta}\binom{n}{\nu}\int_0^1 t^\nu(1-t)^{n-\nu}z(t)\,dt=$$

$$=n^{k_1\delta}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\int_0^\varepsilon t^\nu(1-t)^{n-\nu}z(t)\,dt(\nu+1)^{-k_1\delta}+$$

$$+n^{k_1\delta}\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\int_\varepsilon^1 t^\nu(1-t)^{n-\nu}z(t)\,dt(\nu+1)^{-k_1\delta}=\Sigma_1+\Sigma_2.$$

Nach Voraussetzung gilt $z(t)=o(t^{-r})$ für $t\in[0,\varepsilon]$. Somit erhalten wir mit Hilfssatz 1

$$\Sigma_1=O(1)\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\int_0^1 t^\nu(1-t)^{n-\nu}t^{-r}\,dt\,n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta}=$$

$$=O(1)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{(\nu+1)^{-r}}{(n+1)^{1-r}}n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta}=O(1).$$

Nun betrachten wir Σ_2

$$\Sigma_2 = O(1) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n+1}{\nu+1} \binom{n}{\nu} \int_{\varepsilon}^{1} t^{\nu}(1-t)^{n-\nu} z(t)\, dt =$$

$$= O(1) \int_{\varepsilon}^{1} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+1}{\nu+1} t^{\nu+1}(1-t)^{n+1-\nu-1} \frac{z(t)}{t}\, dt = O(1)$$

da $z(t) \in L[0, 1]$. Damit ist (I) bewiesen.

Zu (II). Zum Beweis von (II) benutzen wir dieselbe Aufspaltung des Integrals mit den damit verbundenen Abschätzungen wie im Beweis zu (I).

$$n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta} z_{n\nu} = n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta} \binom{n}{\nu} \int_{0}^{\varepsilon} t^{\nu}(1-t)^{n-\nu} z(t)\, dt +$$

$$+ n^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta} \binom{n}{\nu} \int_{\varepsilon}^{1} t^{\nu}(1-t)^{n-\nu} z(t)\, dt =$$

$$= O(1) \left(\frac{(\nu+1)^{-r}}{(n+1)^{1-r}} (n+1)^{k_1\delta}(\nu+1)^{-k_1\delta} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n+1)^{k_1\delta-1}}{(\nu+1)^{k_1\delta-1}} \int_{\varepsilon}^{1} \binom{n+1}{\nu+1} t^{\nu+1}(1-t)^{n-\nu} \frac{z(t)}{t}\, dt \right) =$$

$$= O(1)\left((\nu+1)^{-r-k_1\delta}(n+1)^{r-1+k_1\delta} + (\nu+1)^{1-k_1\delta}(n+1)^{k_1\delta-1}\right) = o(1)$$

für jedes feste ν und $k_1\delta < 1-r$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Beweis zu Satz 1. Mit Satz IV von L. Leindler folgt aus obiger Bedingung für $0<\alpha<1$, $0<\delta<\alpha/2$ und $\beta' > -1/2$

$$\left(\frac{1}{A_n^{\alpha}} \sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} |\sigma_{\nu}^{\beta'}(x) - f(x)|^2 \right)^{1/2} = o_x(n^{-\delta}).$$

Wir schalten vor das innere Verfahren ein reguläres Cesàro-Verfahren der Ordnung γ und können unter Verwendung von Satz 2 eine Aussage für größere k-Parameterwerte machen. Nach Definition der Matrixelemente für Cesàroverfahren gilt für die Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ aus Satz 2:

$$g(t) = \gamma(1-t)^{\gamma-1};\quad g(t) \in L^p[0, 1] \quad \text{mit} \quad p = \frac{1}{1-\gamma} - \varepsilon', \quad 0 < \varepsilon'$$

$$h(t) = \alpha(1-t)^{\alpha-1}$$

und somit

$$z(t) = O(1)(1-t)^{k(\gamma-1)(1-(1/2(1-\gamma))+(\varepsilon'/2))+(\alpha-1)(1-(k/2))}.$$

Es ist zu zeigen: $z(t) \in L[0, 1]$. Dazu muß gelten

$$k(\gamma-1)\big(1-(1/2(1-\gamma))+(\varepsilon'/2)\big)+(\alpha-1)\big(1-(k/2)\big)>-1.$$

Dies ist erfüllt, falls gilt

$$\gamma>\alpha\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{k}\right).$$

Weiterhin muß gelten $z(t)=O(t^{-s})$ für $t \in [0, \varepsilon]$. Dies ist für $s>0$ erfüllt, da $z(t)$ in der Umgebung von Null beschränkt ist. Mit dem Satz von L. Leindler und Satz 2 folgt die Behauptung.

Literaturverzeichnis

[1] G. H. Hardy, *Divergent series* (Oxford, 1949).

[2] L. Leindler, Über die Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen, *Acta Sci. Math.*, **24** (1963), 129—138.

[3] L. Leindler, On the strong approximation of orthogonal series, *Acta Sci. Math.*, **32** (1971), 41—50.

]4] L. Leindler, On the strong summability and approximation of orthogonal series, *Acta Math. Sci. Hungar.*, **37** (1981), 245—254.

[5] G. Sunouchi, On the strong summability of orthogonal series, *Acta Sci. Math.*, **27** (1966), 71—76.

BREITGASSE 15
D-6306 LANGGÖNS
DEUTSCHLAND