Acta Sci. Math., 55 (1991), 167—179

Der Bidual von F-Banachverbandsalgebren

EGON SCHEFFOLD

In der Arbeit [5] haben C. B. HUIJSMANS und B. DE PAGTER das Arens-Produkt im Ordnungsbidual von Archimedischen f-Algebren untersucht. Die Frage, ob bei den spezielleren F-Banachverbandsalgebren der Bidual, versehen mit dem Arens-Produkt, stets wieder eine F-Banachverbandsalgebra ist, bleibt dabei offen.

In der vorliegenden Arbeit werden wir diese Frage bejahen und zeigen, daß der Bidual als direkte Summe seines Annullatorbandes und dessen orthogonalen Komplements dargestellt werden kann, wobei letzteres algebraisch- und verbandsisomorph zu einem Vektorverbandsideal in der Banachverbandsalgebra $C_0(\mathcal{M})''$ ist. Unter anderem ergibt sich, daß die Banachverbandsalgebren $C_0(X)$ die einzigen F-Banachverbandsalgebren sind, deren Bidual ein algebraisches Einselement mit Norm 1 besitzt.

Vorbemerkungen

Wir benutzen in dieser Arbeit die auf dem Gebiet der Banachverbände übliche Terminologie und Bezeichnungsweise. Der leichteren Lesbarkeit wegen wollen wir kurz ein paar für uns wichtige Begriffe in Erinnerung rufen.

Eine reelle Banachverbandsalgebra A ist ein reeller Banachverband A, welcher gleichzeitig eine reelle (lineare assoziative) Algebra mit den beiden folgenden Eigenschaften ist: $xy \geqq 0$ und $\|xy\| \leqq \|x\| \|y\|$ für alle positiven Elemente x und y von A.

Eine reelle Banachverbandsalgebra A ist eine F- bzw. FF-Banachverbandsalgebra, falls sie die folgende Eigenschaft F bzw. FF besitzt:

F: $\inf(a, b)=0$ impliziert $\inf(ca, b)=0=\inf(ac, b)$ für $a, b, c \in A$ und $c \geqq 0$;

FF: $\inf(a, b)=0$ impliziert $a \cdot b=0$ für $a, b \in A$.

Wie man leicht sieht, ist jede F-Banachverbandsalgebra auch eine FF-Banachverbandsalgebra und somit nach [11, § 2] kommutativ.

Eingegangen am 16. August 1988.

Für einen lokalkompakten Hausdorffraum X bezeichne $C_0(X)$ die reelle Banachverbandsalgebra aller stetigen reellen Funktionen f auf X mit der Eigenschaft, daß für jedes $\varepsilon>0$ die Menge $\{x\in X: |f(x)|\geqq\varepsilon\}$ kompakt ist, versehen mit der Supremumsnorm und der kanonischen punktweisen Multiplikation und Ordnung. Falls K ein kompakter Hausdorffraum ist, stimmt die Banachverbandsalgebra $C_0(K)$ natürlich mit der Banachverbandsalgebra $C(K)$ überein. Alle Banachverbandsalgebren $C_0(X)$ sind F-Banachverbandsalgebren.

Die Banachalgebra der beschränkten Endomorphismen eines Banachverbandes E bezeichnen wir mit $\mathscr{L}(E)$ und den Spektralradius eines Elements a einer reellen normierten Algebra mit $r(a)$. Bekanntlich gilt $r(a)=\lim_{n\to\infty}(\|a^n\|)^{1/n}$.

Ist E ein Banachverband und u ein positives Element von E, so bedeutet E_u das von u im verbandstheoretischen Sinn erzeugte Hauptideal. Es läßt sich bekanntlich mit einem Funktionenverband $C(K)$ (K kompakter Hausdorffraum) identifizieren, und diese Identifizierung werden wir die kanonische Identifizierung eines Hauptideals nennen. Dem Element u entspreche dabei stets die Einsfunktion e_K auf K.

Sei nun A eine F-Banachverbandsalgebra, c ein Element des positiven Kegels A_+ und T_c die linksreguläre Darstellung von c auf A, d.h. $T_c x=cx$ für alle $x\in A$. Nach [6,1.1] gilt dann $T_c x\leqq\|T_c\|x$ für alle $x\in A_+$, wobei $\|T_c\|$ die Operatornorm von T_c in der Banachalgebra $\mathscr{L}(A)$ bezeichnet. Für $a\in A$ gehören also die linksregulären Darstellungen T_a zum Zentrum $Z(A)$ des zugrunde liegenden Banachverbandes A, wobei $Z(A)$ aus allen Operatoren $T\in\mathscr{L}(A)$ besteht mit der Eigenschaft: Es gibt eine von T abhängige Konstante $\gamma\in\mathbf{R}_+$ mit

$$|Tx|\leqq\gamma|x| \quad \text{für alle} \quad x\in A.$$

Mit Hilfe einer kleinen zusätzlichen Überlegung erhält man aus dem Beweis von [6,1.1] sofort das folgende Resultat über positive Orthomorphismen: Es sei E ein Banachverband und T ein positiver Orthomorphismus auf E, d.h. T besitzt die Eigenschaft:

$$\inf(x,y)=0 \quad \text{impliziert} \quad \inf(Tx,y)=0.$$

Dann gilt $Tx\leqq r(T)x$ für alle $x\in E_+$.

Aus der Definition einer F-Banachverbandsalgebra folgt unmittelbar, daß die linksregulären Darstellungen positiver Elemente positive Orthomorphismen sind. Mit der vorhergehenden Aussage über Orthomorphismen erhalten wir die im folgenden wichtige Ungleichung:

Satz 0.1. *Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra. Dann gilt $ab\leqq r(a)b$ für alle positiven Elemente a und b.*

Aus Satz 0.1 folgt sofort, daß in einer F-Banachverbandsalgebra jedes Vektorverbandsideal auch ein Ringideal ist.

Eine Subalgebra einer Banachverbandsalgebra $C_0(X)$, welche gleichzeitig auch ein Vektorunterverband ist, nennen wir eine Verbandssubalgebra. Eine Anwendung der Stone—Weierstrass-Theorie ergibt den folgenden, für uns wichtigen Approximationssatz:

Satz 0.2. *Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und F eine Punkte trennende Verbandssubalgebra der Banachverbandsalgebra $C_0(X)$, welche nirgendwo verschwindet, d.h. zu jedem $t \in X$ existiert eine Funktionen $k \in F$ mit $k(t) \neq 0$. Dann gibt es zu jeder positiven Funktion $g \in C_0(X)$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Funktion $f \in F$ mit $\|f\| \leqq 1$ und $\|g - f \cdot g\| \leqq \varepsilon$, d.h. die nach oben gerichtete Menge $B := \{h \in F\colon h \geqq 0$ und $\|h\| \leqq 1\}$ ist ein approximierendes Einselement in $C_0(X)$.*

1. Die Gelfand-Theorie von F-Banachverbandsalgebren

Wichtiges Hilfsmittel bei der Behandlung von F-Banachverbandsalgebren ist in der Arbeit [6] die Algebra der Zentrumsoperatoren, welche eine Algebra vom Typ $C(K)$ ist. In der Arbeit [5] übernimmt diese Rolle die Algebra der Orthomorphismen. Wir werden dagegen im folgenden wesentlichen Gebrauch von der Gelfand-Theorie machen.

Da F-Banachverbandsalgebren spezielle FF-Banachverbandsalgebren sind, gelten für sie bezüglich der Gelfand-Theorie die in der Arbeit [11] gemachten Aussagen. Wir wollen die wichtigsten Punkte kurz angeben (s. [11, Kap. 2]).

Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra und $\mathcal{M}$ die Menge der nichttrivialen komplexen Homomorphismen auf A. Wir setzen $\mathcal{M} \neq \emptyset$ voraus. Dann sind die Elemente von $\mathcal{M}$ sogar reelle Vektorverbandshomomorphismen. Die Menge $\mathcal{M}$, als Teilmenge des topologischen Duals A' betrachtet und versehen mit der von der schwachen Topologie $\sigma(A', A)$ induzierten Topologie, ist ein lokalkompakter Hausdorffraum und kann als der Raum der maximalen regulären Ideale von A angesehen werden. Die Gelfand-Transformation $\Phi\colon a \to \hat{a}$ von A nach $C_0(\mathcal{M})$, definiert durch $\hat{a}(\mu) := \mu(a)$ für alle $a \in A$ und $\mu \in \mathcal{M}$, ist ein Algebra- und Vektorverbandshomomorphismus. Ihr Wertevorrat $\hat{A}$ ist daher eine dichte Verbandssubalgebra der Banachverbandsalgebra $C_0(\mathcal{M})$. Für alle $a \in A$ gilt $r(a) = \|\hat{a}\|$ und das Radikal

$$\operatorname{rad}(A) := \{a \in A\colon r(a) = 0\}$$

von A ist sowohl ein abgeschlossenes Algebraideal als auch ein Vektorverbandsideal.

Ist $\operatorname{rad}(A) = A$, so folgt aus 0.1 sofort $a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in A$, d.h. die Multiplikation ist trivial. Wir werden daher von nun an stets $\operatorname{rad}(A) \neq A$ voraussetzen, was auch $\mathcal{M} \neq \emptyset$ impliziert.

Unter dem Annullator Ann (B) einer kommutativen Algebra B versteht man die Menge $\{x\in B\colon x\cdot B=\{0\}\}$. Bei der folgenden Charakterisierung des Radikals handelt es sich im Grunde um schon bekannte Ergebnisse (s. [1, 3.1.3] und [8, S.89]).

Satz 1.1. *Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra. Dann gilt:*
(i) $\mathrm{rad}\,(A)=\mathrm{Ann}\,(A)=\{x\in A\colon x^2=0\}$,
(ii) *das Vektorverbandsideal* $\mathrm{rad}\,(A)$ *ist sogar ein Band.*

Beweis. *Zu* (i): Sei $a\in\mathrm{rad}\,(A)$ und $b\in A$. Dann gilt $|a|\in\mathrm{rad}\,(A)$, $|a\cdot b|\leqq\leqq|a||b|\leqq r(|a|)|b|=0$ und somit $a\cdot b=0$, d.h. $\mathrm{rad}\,(A)\subseteqq\mathrm{Ann}\,(A)$. Da die Beziehung $\mathrm{Ann}\,(A)\subseteqq\mathrm{rad}\,(A)$ offensichtlich ist, erhalten wir $\mathrm{rad}\,(A)=\mathrm{Ann}\,(A)$. Für $y\in\mathrm{Ann}\,(A)$ ist $y^2=0$. Ist andererseits $x\in A$ und $x^2=0$, so gilt $r(x)=0$ und somit $x\in\mathrm{rad}\,(A)\subseteqq\subseteqq\mathrm{Ann}\,(A)$. Es ist also auch $\mathrm{Ann}\,(A)=\{x\in A\colon x^2=0\}$.

Zu (ii): Sei $x, a\in A_+$ und $\{a_j\colon j\in J\}$ ein nach oben gerichtetes Netz positiver Elemente in $\mathrm{Ann}\,(A)$ mit $a=\sup\{a_j\colon j\in J\}$. Da die Multiplikation ordnungsstetig ist, folgt $ax=x\cdot a=\sup\{xa_j\colon j\in J\}=0$. Es ist also $a\in\mathrm{Ann}\,(A)$ und $\mathrm{Ann}\,(A)$ ein Band. Aus $\mathrm{Ann}\,(A)=\mathrm{rad}\,(A)$ ergibt sich die Behauptung.

Mit dem vorhergehenden Satz erhalten wir für ordnungsvollständige F-Banachverbandsalgebren einen erwähnenswerten Darstellungssatz, dessen Beweis klar ist.

Satz 1.2. *Es sei A eine ordnungsvollständige F-Banachverbandsalgebra. Dann ist A direkte Summe der beiden Ringideale* $\mathrm{Ann}\,(A)$ *und* $\mathrm{Ann}\,(A)^{\perp}$. *Das Band* $\mathrm{Ann}\,(A)^{\perp}$ *ist für sich betrachtet eine halbeinfache F-Banachverbandsalgebra, welche algebraisch- und verbandsisomorph zu einer dichten Verbandssubalgebra der Banachverbandsalgebra $C_0(\mathcal{M})$ ist, wobei $\mathcal{M}$ den Raum der maximalen regulären Ideale von A bezeichnet.*

2. Der Bidual von F-Banachverbandsalgebren

Zunächst möchten wir das Arens-Produkt in Erinnerung rufen. Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra, A' ihr topologischer Dual und A'' ihr Bidual. Damit keine Verwechslung mit der natürlichen Multiplikation $\cdot$ bei Funktionenalgebren auftreten kann, werden wir die Multiplikation in A mit $*$ bezeichnen. Für $f\in A$ und $\mu\in A'$ sei das Element $\mu_f\in A'$ definiert durch $\mu_f(g)=\mu(f*g)$ für alle $g\in A$. Nach 0.1 gilt für alle $f\in A_+$ und $\mu\in A'_+$ die Ungleichung

$$\mu_f\leqq r(f)\,\mu.$$

Sei nun $G\in A''$. Bei der Definition des Arens-Produkts spielt der folgende, zu G gehörige Operator $T_G\in\mathscr{L}(A')$, definiert durch $(T_G\mu)(f):=G(\mu_f)$ für alle $\mu\in A'$ und $f\in A$, eine wichtige Rolle. Mit diesem Operator T_G ist für $F, G\in A''$ in A'' das

Arens-Produkt $F*G$ wie folgt definiert:

$$F*G(\mu) := F(T_G\mu)$$

für alle $\mu\in A'$. Durch eine Routinerechnung läßt sich zeigen, daß der Bidual A'', versehen mit diesem Arens-Produkt, eine Banachverbandsalgebra ist.

Mit Hilfe der vorhergehenden Ungleichung und der Kommutativität der Multiplikation erhalten wir, daß die Operatoren T_G zum Zentrum von A' gehören.

Satz 2.1. *Sei A eine F-Banachverbandsalgebra, $\mu\in A'_+$ und $G\in A''_+$. Dann gilt $T_G\mu\leqq\|G\|\,\mu$ und $\|T_G\mu\|\leqq G(\mu)$.*

Beweis. Sei $f\in A_+$ und $S:=\{g\in A_+\colon\ \|g\|\leqq 1\}$. Dann gilt

$$\|\mu_f\| = \sup\{\mu(f*g)\colon g\in S\} = \sup\{\mu(g*f)\colon g\in S\} =$$
$$= \sup\{\mu_g(f)\colon\ g\in S\} \leqq \sup\{r(g)\mu(f)\colon\ g\in S\} \leqq \mu(f),$$

da $r(g)\leqq 1$ für $g\in S$. Hieraus erhalten wir

$$(T_G\mu)(f) = G(\mu_f) \leqq \|G\|\,\|\mu_f\| \leqq \|G\|\,\mu(f).$$

Es gilt also $T_G\mu\leqq\|G\|\,\mu$.

Für $g\in S$ gilt $\mu_g\leqq r(g)\mu\leqq\mu$. Es ist somit

$$\|T_G\mu\| = \sup\{(T_G\mu)(g)\colon\ g\in S\} = \sup\{G(\mu_g)\colon\ g\in S\} \leqq G(\mu).$$

Satz 2.2. *Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra. Dann ist der Bidual A'', versehen mit dem Arens-Produkt, wieder eine F-Banachverbandsalgebra und somit eine kommutative Algebra.*

Beweis. Es sei $F, G, H\in A''_+$. Es genügt zu zeigen: $\inf(F, G)=0$ impliziert $\inf(H*F, G)=0=\inf(F*H, G)$.

Sei $\mu\in A'_+$. Nach 2.1 gilt $\|T_F\mu\|\leqq F(\mu)$. Hieraus folgt

$$(H*F)(\mu) = H(T_F\mu) \leqq \|H\|\,\|T_F\mu\| \leqq \|H\|\,F(\mu).$$

Es ist also $H*F\leqq\|H\|\,F$.

Nach 2.1 gilt auch $T_H\mu\leqq\|H\|\,\mu$. Hieraus ergibt sich

$$(F*H)(\mu) = F(T_H\mu) \leqq \|H\|\,F(\mu).$$

Es ist also auch $F*H\leqq\|H\|\,F$.

Sei nun $\inf(F, G)=0$. Aus $H*F\leqq\|H\|\,F$ und $F*H\leqq\|H\|\,F$ folgt dann sofort

$$\inf(H*F, G) = 0 = \inf(F*H, G).$$

Nach 2.1 gehören die Operatoren $T_G(G\in A'')$ zur Banachverbandsalgebra $Z(A')$ der Zentrumsoperatoren von A'. In Analogie zu [7] nennen wir die Abbildung $G\to T_G$ von A'' nach $Z(A')$ Arens-Homomorphismus. Mit Hilfe von Satz 2.2 erhalten wir, daß diese Abbildung ein Vektorverbandshomomorphismus ist, was wir später benötigen werden (vgl. [5, 5.2]).

Satz 2.3. *Sei A eine F-Banachverbandsalgebra. Dann ist der Arens-Homomorphismus ein Algebra- und Vektorverbandshomomorphismus.*

Beweis. Wie man leicht nachprüft, ist der Arens-Homomorphismus ein positiver Algebrahomomorphismus.

Sei nun $G \in A''$. Da A'' eine F-Banachverbandsalgebra ist, gilt $G^+ * G^- = 0$. In $Z(A')$ bedeutet dies $T_{G^+} \cdot T_{G^-} = 0$. Da $Z(A')$ bekanntlich vom Typ $C(K)$ ist, erhalten wir $\inf(T_{G^+}, T_{G^-}) = 0$. Es ist also der Arens-Homomorphismus auch ein Vektorverbandshomomorphismus.

Als Beispiel betrachten wir nun den Bidual der F-Banachverbandsalgebra $C_0(X)$. Es wird sich später zeigen, daß diese Biduale bei der Darstellung der Biduale allgemeiner F-Banachverbandsalgebren eine bedeutende Rolle spielen. Wie es scheint, ist bis jetzt der Bidual der Banachalgebren $C_0(X)$ nur im Rahmen der B^*-Algebren-Theorie behandelt worden. Wir wollen nun diesen Bidual mit verbandstheoretischen Mitteln charakterisieren.

Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Da der Banachverband $C_0(X)$ ein AM-Raum ist, ist der Dual $C_0(X)'$ ein AL-Raum und somit der Bidual $C_0(X)''$ ein AM-Raum mit Einheit. Wir können also den Banachverband $C_0(X)''$ mit einem Banachverband $C(\Omega)$ identifizieren, wobei Ω ein gewisser kompakter Hausdorffraum ist und die Einsfunktion E auf Ω dem Normfunktional auf $C_0(X)'$ entspricht (s. [10, Kap. II, 7.4 und 9.1]). Wir nennen diesen Banachverband $C(\Omega)$ die kanonische Identifizierung von $C_0(X)''$. Auf $C(\Omega)$ haben wir nun zwei Produkte, das von $C_0(X)$ herrührende Arens-Produkt $*$ und das natürliche Funktionenprodukt.

Satz 2.4. *Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $C(\Omega)$ die kanonische Identifizierung des Banachverbandes $C_0(X)''$. Dann gilt $F * G = F \cdot G$ für alle $F, G \in C(\Omega)$.*

Beweis. Nach 2.2 ist $C(\Omega)$, versehen mit dem Arens-Produkt $*$, eine (kommutative) F-Banachverbandsalgebra. Auf Grund von [2,28.7 und 28.8] ist die Einsfunktion E Einselement für das Arens-Produkt $*$. Nach [11, 1.7] stimmt daher die Multiplikation $*$ mit der natürlichen punktweisen Multiplikation überein.

Wir kehren nun wieder zu der Situation einer allgemeinen F-Banachverbandsalgebra zurück. Im folgenden sei A eine F-Banachverbandsalgebra und $\mathcal{M}$ der Raum der maximalen regulären Ideale von A. Nach 1.2 ist der Bidual A'' direkte Summe von $\operatorname{Ann}(A'')$ und $\operatorname{Ann}(A'')^{\perp}$. Wir werden jetzt diese beiden Summanden genauer untersuchen.

Der Spektralradius r definiert auf A die Halbnorm $x \to r(x)$, welche Spektralhalbnorm genannt und wieder mit r bezeichnet wird. Es sei nun $\tilde{A} := \{\mu \in A'$: Es gibt eine von μ abhängige Zahl $c \in \mathbf{R}_+$ mit $|\mu(x)| \leqq c r(x)$ für alle $x \in A\}$. Die Menge $\tilde{A}$ besteht also aus allen Linearformen in A', welche auch bezüglich der Spektralhalbnorm r stetig sind. Aus diesem Grunde möchten wir die Menge $\tilde{A}$ den spektralen Dual von A nennen. Offensichtlich ist $\tilde{A}$ ein linearer Teilraum von A'.

Zunächst zeigen wir folgenden Zusammenhang zwischen der Gelfand-Transformation und dem spektralen Dual auf, was im übrigen auch in jeder kommutativen Banachalgebra gilt.

Satz 2.5. *Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra. Dann ist der spektrale Dual $\tilde{A}$ gleich dem Wertevorrat der adjungierten Abbildung Φ' der Gelfand-Transformation Φ.*

Beweis. Es gilt offensichtlich $\Phi'(C_0(\mathcal{M})') \subseteqq \tilde{A}$.

Sei nun $\tilde{\mu} \in \tilde{A}$. Da $\tilde{\mu}$ auf $\operatorname{rad}(A)$ verschwindet, ist das folgende Funktional μ_0 auf dem linearen Unterraum $\hat{A}(=\Phi(A))$ von $C_0(\mathcal{M})$ wohl definiert und linear: Für $f \in \hat{A}$ sei $\mu_0(f) := \tilde{\mu}(g)$, wobei $g \in A$ und $f = \Phi(g)$ ist. Da $\|f\| = r(g)$ gilt, ist μ_0 auf $\hat{A}$ stetig. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es nun ein $\mu \in C_0(\mathcal{M})'$ mit $\mu(k) = \mu_0(k)$ für alle $k \in \hat{A}$. Für dieses μ gilt dann offensichtlich $\tilde{\mu} = \Phi'\mu$. Es ist also $\tilde{\mu} \in \Phi'(C_0(\mathcal{M})')$.

Satz 2.6. *Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra. Dann ist der spektrale Dual $\tilde{A}$ ein Ideal in A'. Ferner ist die adjungierte Abbildung Φ' der Gelfand-Transformation Φ ein Vektorverbandsisomorphismus von dem Banachverband $C_0(\mathcal{M})'$ auf das Ideal $\tilde{A}$ in A'.*

Beweis. Da Φ ein Vektorverbandshomomorphismus ist, ist Φ' intervallerhaltend, d.h. es gilt $\Phi'[0, \mu] = [0, \Phi'\mu]$ für alle $\mu \in C_0(\mathcal{M})'_+$. Hieraus folgt, daß $\Phi'(C_0(\mathcal{M})')$ ein Ideal ist. Nach 2.5 ist somit $\tilde{A}$ ein Ideal in A'. Da $\hat{A}$ dicht in $C_0(\mathcal{M})$ ist, ist Φ' injektiv. Ferner ist jeder injektive, intervallerhaltende positive Operator auch ein Vektorverbandshomomorphismus. Es ist also Φ' ein Vektorverbandsisomorphismus von $C_0(\mathcal{M})'$ auf $\tilde{A}$.

Da $C_0(\mathcal{M})'$ ein AL-Raum ist, ist auf $C_0(\mathcal{M})'$ jede positive Linearform ordnungsstetig. Nach dem vorhergehenden Satz hat daher das Ideal $\tilde{A}$ die Eigenschaft, daß für jedes $F \in A''_+$ die Einschränkung $F|_{\tilde{A}}$ von F auf das Ideal $\tilde{A}$ ordnungsstetig ist. Es bezeichne $(A')'_n$ das Band der ordnungsstetigen Linearformen *in* A'' und $(A')'_\sigma$ dessen orthogonales Komplement.

Für $F \in A''_+$ bezeichne $N(F)$ den absoluten Kern von F in A', also $N(F) := \{\mu \in A'$: $F(|\mu|) = 0\}$. Zwischen $\tilde{A}$ und $(A')'_\sigma$ besteht folgende interessante Beziehung:

Satz 2.7. *Es gilt $(A')'_\sigma \subseteqq \tilde{A}^0$, wobei $\tilde{A}^0$ die Polare von $\tilde{A}$ in A'' ist.*

Beweis. Sei $F\in(A')'_\sigma$ und $F>0$. Dann gilt $F\perp G$ für alle $G\in(A')'_n$. Bekanntlich folgt hieraus $N(F)^\perp\subseteqq N(G)$ für alle $G\in(A')'_n$ mit $G\geqq 0$. Da die kanonische Einbettung von A in A'' in dem Band $(A')'_n$ enthalten ist, trennt $(A')'_n$ die Punkte in A'. Aus der vorhergehenden Enthaltenseinsbeziehung folgt daher $N(F)^\perp=\{0\}$. Es gilt also $A'=N(F)^{\perp\perp}$.

Sei nun $\mu\in\tilde{A}$ und $\mu>0$. Da $A'=N(F)^{\perp\perp}$ gilt, existiert in $N(F)$ ein positives, nach oben gerichtetes Netz $\{\mu_\beta\colon \beta\in B\}$ mit $\mu=\sup\{\mu_\beta\colon \beta\in B\}$. Aus der Ordnungsstetigkeit von $F|_{\tilde{A}}$ folgt $F(\mu)=\sup\{F(\mu_\beta)\colon \beta\in B\}=0$. Hieraus ergibt sich $F\in\tilde{A}^0$. Es gilt also $(A')'_\sigma\subseteqq\tilde{A}^0$.

Da die Gelfand-Transformation ein Vektorverbandshomomorphismus ist, ist die Spektralnorm r eine M-Verbandshalbnorm auf A, d.h. $|x|\leqq|y|$ impliziert $r(x)\leqq r(y)$ für alle $x,y\in A$ und es ist $r(\sup(x,y))=\sup(r(x),r(y))$ für alle $x,y\in A_+$.

Satz 2.8. *Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra. Für den spektralen Dual $\tilde{A}\subseteqq A'$ gilt:*

(i) $\mu_f\in\tilde{A}$ *für alle* $\mu\in A'$ *und* $f\in A$;

(ii) $\mu=\sup\{\mu_f\colon f\in A_+$ und $r(f)\leqq 1\}$ *für alle* $\mu\in\tilde{A}_+$;

(iii) $T_G(A')\subseteqq\tilde{A}$ *für alle* $G\in A''$;

(iv) *für* $G\in A''$ *gilt genau dann* $T_G=0$, *wenn* $G\in\tilde{A}^0$.

Beweis. *Zu* (i): Für $f,g\in A$ und $\mu\in A'$ gilt $|g|*|f|\leqq r(|g|)|f|$ nach 0.1 und somit

$$|\mu_f(g)| = |\mu(f*g)| = |\mu(g*f)| \leqq |\mu|(|g|*|f|) \leqq r(|g|)|\mu|(|f|) \leqq \|\mu\|\,\|f\|\,r(g).$$

Es ist also $\mu_f\in\tilde{A}$.

Zu (ii): Diese Gleichung beweisen wir mit Hilfe von 2.6 und der zu A gehörigen F-Banachverbandsalgebra $C_0(\mathscr{M})$ wie folgt: Für alle $f\in A$ und $\mu\in C_0(\mathscr{M})'$ gilt $\Phi'(\mu_{\hat{f}})=(\Phi'\mu)_f$. Hieraus folgt $\Phi'^{-1}(\nu_f)=(\Phi'^{-1}\nu)_{\hat{f}}$ für alle $\nu\in\tilde{A}$ und $f\in A$.

Sei nun $\mu\in\tilde{A}_+$, $\nu\in C_0(\mathscr{M})'_+$ und $S:=\{f\in A_+\colon r(f)\leqq 1\}$. Wir beweisen zunächst $\nu=\sup\{\nu_{\hat{f}}\colon f\in S\}$. Für $f\in S$ gilt $\|\hat{f}\|=r(f)\leqq 1$ und somit $\nu_{\hat{f}}\leqq\nu$. Ferner ist die Menge $\{\nu_{\hat{f}}\colon f\in S\}$ nach oben gerichtet, da r eine M-Verbandshalbnorm ist. Sei $g\in C_0(\mathscr{M})_+$ und $\varepsilon>0$. Da $\hat{A}$ eine Punkte trennende, nirgendwo verschwindende Verbandssubalgebra von $C_0(\mathscr{M})$ ist, gibt es nach 0.2 ein $f_0\in S$ mit $\|g-\hat{f}_0\cdot g\|\leqq\varepsilon$. Hieraus folgt

$$\nu(g) = \sup\{\nu(\hat{f}\cdot g)\colon f\in S\} = \sup\{\nu_{\hat{f}}(g)\colon f\in S\}.$$

Es ist also $\nu=\sup\{\nu_{\hat{f}}\colon f\in S\}$. Insgesamt erhalten wir

$$\Phi'^{-1}(\mu) = \sup\{(\Phi'^{-1}\mu)_{\hat{f}}\colon f\in S\} = \sup\{\Phi'^{-1}(\mu_f)\colon f\in S\}.$$

Das bedeutet aber $\mu=\sup\{\mu_f\colon f\in S\}$.

Zu (iii): Sei $f, g \in A$, $\mu \in A'$ und $G \in A''$. Dann ist

$$|\mu_f(g)| = |\mu(f*g)| \leqq |\mu|(|f|*|g|) \leqq r(|f|)\,|\mu|(|g|) \leqq r(f)\,\|\mu\|\,\|g\|.$$

Es gilt also $\|\mu_f\| \leqq \|\mu\|\, r(f)$. Hieraus folgt

$$|(T_G\mu)(f)| = |G(\mu_f)| \leqq \|G\|\,\|\mu_f\| \leqq \|G\|\,\|\mu\|\, r(f)$$

und somit $T_G\mu \in \tilde{A}$.

Zu (iv): $\Rightarrow$: Sei $G \in A''$ und $T_G = 0$. Nach 2.4 gilt dann auch $T_{|G|} = 0$. Wir nehmen nun an $|G| \notin \tilde{A}^0$. Dann gilbt es ein $\mu \in \tilde{A}_+$ mit $|G|(\mu) > 0$. Nach (ii) gilt $\mu = \sup\{\mu_f : f \in A_+ \text{ und } r(f) \leqq 1\}$, wobei die Menge in der geschweiften Klammer nach oben gerichtet ist. Da $|G|_{|\tilde{A}}$ ordnungsstetig ist, gibt es dann ein $f_0 \in A_+$ mit $r(f_0) \leqq 1$ und $|G|(\mu_{f_0}) > 0$. Dies bedeutet aber $T_{|G|}(\mu) > 0$, was ein Widerspruch ist. Es ist also $|G| \in \tilde{A}^0$ und somit auch $G \in \tilde{A}^0$.

$\Leftarrow$: Sei $f \in A$, $\mu \in A'$ und $F \in \tilde{A}^0$. Dann gilt $\mu_f \in \tilde{A}$ nach (i). Hieraus folgt $(T_F\mu)(f) = F(\mu_f) = 0$. Es ist also $T_F = 0$.

Die angekündigte Charakterisierung der Bänder $\operatorname{Ann}(A'')$ und $\operatorname{Ann}(A'')^\perp$ lautet nun

Satz 2.9. *Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra und $C(\Omega)$ die kanonische Identifizierung des Biduals $C_0(\mathscr{M})''$ der zu A gehörigen Banachverbandsalgebra $C_0(\mathscr{M})$. Ferner bezeichne Φ'' die biadjungierte Abbildung der Gelfand-Transformation. Dann gilt:*

(i) $\operatorname{Ann}(A'') = \tilde{A}^0$;

(ii) *Es ist $\Phi''(A'')$ ein Vektorverbandsideal in $C(\Omega)$. Die Einschränkung der Abbildung Φ'' auf* $\operatorname{Ann}(A'')^\perp$ *ist ein Algebra- und Vektorverbandsisomorphismus von* $\operatorname{Ann}(A'')^\perp$ *auf das Vektorverbandsideal $\Phi''(A'')$ in der Funktionenalgebra $C(\Omega)$.*

Beweis. *Zu* (i): Sei $F \in \tilde{A}^0$. Nach 2.8 (iv) ist dann $T_F = 0$. Dies bedeutet $H * F = 0$ für alle $H \in A''$. Es ist somit $F \in \operatorname{Ann}(A'')$. Sei $G \in \operatorname{Ann}(A'')$. Dann muß $T_G = 0$ sein. Nach 2.8 (iv) gilt dann $G \in \tilde{A}^0$.

Zu (ii): Nach [3, 6.1] ist die Abbildung Φ'' von A'' nach $C(\Omega)$ multiplikativ. Da Φ und Φ' Vektorverbandshomomorphismen sind, ist Φ'' ein intervallerhaltender Vektorverbandshomomorphismus (s. [10, Kap. III, Ex. 24]). Es ist also $\Phi''(A'')$ ein Ideal in $C(\Omega)$. Aus $\tilde{A} = \Phi'(C_0(\mathscr{M})')$ folgt $\tilde{A}^0 = \Phi''^{-1}\{0\}$.

Hieraus ergibt sich, daß die Einschränkung von Φ'' auf $\operatorname{Ann}(A'')^\perp (= \tilde{A}^{0\perp})$ injektiv ist. Insgesamt erhalten wir, daß diese Einschränkung ein Algebra- und Vektorverbandsisomorphismus auf das Ideal $\Phi''(A'')$ in $C(\Omega)$ ist.

Nach dem vorhergehenden Satz können wir also $\operatorname{Ann}(A'')^\perp$ mit dem Vektorverbandsideal $\Phi''(A'')$ in $C(\Omega)$ identifizieren. Es sei nun $\Omega_0 := \{t \in \Omega$: es gibt ein $F \in \Phi''(A'')$ mit $F(t) \neq 0\}$. Dann ist der Unterraum Ω_0 von Ω lokalkompakt. Nach Satz 1.2 ist $\operatorname{Ann}(A'')^\perp$ algebraisch- und verbandsisomorph zu einer dichten Verbandssubalgebra der Banachverbandsalgebra $C_0(\mathcal{M}'')$, wobei $\mathcal{M}''$ den Raum der maximalen regulären Ideale von A'' bedeutet. Der Raum Ω_0 läßt sich nun mit $\mathcal{M}''$ identifizieren.

Satz 2.10. *Der lokalkompakte Raum Ω_0 ist homöomorph zum Raum $\mathcal{M}''$ der maximalen regulären Ideale von A''.*

Beweis. Es bezeichne B das Vektorverbandsideal $\Phi''(A'')$ in $C(\Omega)$. Auf Grund der in 2.9 (ii) angegebenen Isomorphie kann die Punktmenge $\mathcal{M}''$ als die Menge aller nichttrivialen, multiplikativen reellen Vektorverbandshomomorphismen auf B betrachtet werden. Da B ein Vektorverbandsideal ist, trennt B die Punkte in Ω_0. Wir betrachten nun die Abbildung $\tau\colon \Omega_0 \to \mathcal{M}''$, definiert durch $\tau(t)(F) = F(t)$ für alle $F \in B$ und $t \in \Omega_0$. Die Abbildung τ ist injektiv, da B die Punkte trennt. Sie ist aber interessanterweise sogar surjektiv, wie man wie folgt einsieht.

Sei $F \in B$, $F > 0$, $\mathcal{O} := \{t \in \Omega\colon F(t) > 0\}$ und $\beta\mathcal{O}$ die Stone—Čech-Kompaktifizierung von $\mathcal{O}$. Da $C(\Omega)$ ordnungsvollständig ist, ist $\beta\mathcal{O}$ homöomorph zu $\bar{\mathcal{O}}$ in Ω. Es bezeichne $\tilde{F}$ die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von F auf $\beta\mathcal{O}$. Wegen der Homöomorphie zwischen $\beta\mathcal{O}$ und $\bar{\mathcal{O}}$ gilt dan $\tilde{F} \equiv 0$ auf $\beta\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}$. Auf $C(\beta\mathcal{O})$ definieren wir die folgende Multiplikation $**$:

$$G_1 ** G_2 := \tilde{F} \cdot G_1 \cdot G_2 \quad \text{für alle} \quad G_1, G_2 \in C(\beta\mathcal{O}).$$

Es sei $C(\Omega)_F$ das von F in $C(\Omega)$ erzeugte Hauptideal. Wir betrachten die folgende Abbildung φ von $C(\Omega)_F$ nach $C(\beta\mathcal{O})$, welche definiert ist durch $\varphi(G)(t) := \frac{1}{F(t)} G(t)$ für alle $G \in C(\Omega)_F$ und alle $t \in \mathcal{O}$ und $\varphi(G) \equiv \widetilde{\varphi(G)}$ auf $\beta\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}$, wobei $\widetilde{\varphi(G)}$ die kanonische Fortsetzung von $\varphi(G)$ ist. Wie man leicht nachprüft, ist φ ein Algebra- und Vektorverbandsisomorphismus.

Es sei nun $\mu \in \mathcal{M}''$ und $\mu(F) \neq 0$. Es ist also μ ein multiplikativer reller Verbandhomomorphismus auf B. Dasselbe gilt für die Einschränkung μ_F auf $C(\Omega)_F$. Mit μ_F ist dann auch die Linearform $\mu \circ \varphi^{-1}$ ein nichttrivialer multiplikativer reeller Vektorverbandshomomorphismus auf der F-Verbandsalgebra $C(\beta\mathcal{O})$, versehen mit der Multiplikation $**$. Hieraus folgt, es gibt ein $t \in \mathcal{O} (\subseteq \Omega_0)$ mit $\mu_F \circ \varphi^{-1} = F(t)\varepsilon_t$, wobei ε_t das Dirac-Maß im Punkt t bezeichnet. Dies bedeutet aber, daß $\mu_F = \varepsilon_t$ auf $C(\Omega)_F$ gilt.

Der Punkt t bei der Darstellung von μ_F hängt auf den ersten Blick von F ab. Daß er aber unabhängig vom gewählten F ist, kann man zeigen, indem man zu $F_1 \in B$ mit $F_1 > 0$ und $F_1 \neq F$ das Hauptideal $C(\Omega)_{\sup(F, F_1)}$ betrachtet und feststellt, daß der zu F bzw. F_1 gehörige Punkt jeweils mit dem zu $\sup(F, F_1)$ gehörigen Punkt identisch ist. Wir erhalten also, daß es zu μ ein $t \in \Omega_0$ gibt mit $\mu = \varepsilon_t$. Die Abbildung τ ist also surjektiv. Die Homöomorphie zwischen $\mathcal{M}''$ und Ω_0 folgt nun sofort aus [9, 3.2.5].

Im Hinblick auf die Frage, ob A'' halbeinfach ist bzw. ein algebraisches Einselement besitzt, erhalten wir aus dem Vorhergehenden folgende Aussagen.

Satz 2.11. *Der Bidual A'' einer F-Banachverbandsalgebra A ist genau dann halbeinfach, wenn der spektrale Dual $\tilde{A}$ dicht im Dual A' ist. Eine notwendige Bedingung dafür, daß A'' halbeinfach ist, ist $A''=(A')'_n$.*

Beweis. Nach 1.1 (i) und 2.9 (i) gilt $\operatorname{rad}(A'')=\operatorname{Ann}(A'')=\tilde{A}^0$. Es ist also A'' genau dann halbeinfach, wenn $\tilde{A}^0=\{0\}$ ist, wenn also $\tilde{A}$ dicht in A' ist. Die zweite Aussage fogt sofort aus 2.7.

Der Bidual der F-Banachverbandsalgebren $C_0(X)$ besitzt ein algebraisches Einselement mit Norm 1.

Satz 2.12. *Die Banachverbandsalgebren $C_0(X)$ (X lokalkompakter Hausdorffraum) sind die einzigen F-Banachverbandsalgebren, bei denen der Bidual ein algebraisches Einselement mit Norm 1 besitzt.*

Beweis. Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra mit der Eigenschaft, daß A'' ein algebraisches Einselement e mit $\|e\|=1$ besitzt. Ferner sei $C(K_e)$ die kanonische Identifizierung des Ideals A''_e. Wie wir in [11, S. 204] gezeigt haben, ist dann die F-Banachverbandsalgebra A'' isometrisch isomorph zur Banachverbandsalgebra $C(K_e)$. Da A in A'' isometrisch eingebettet ist, erhalten wir $\|a^n\|=\|a\|^n$ für alle $a\in A$ und $n\in\mathrm{N}$. Auf Grund des Satzes von Stone-Weierstrass ist dann die Gelfand-Transformation ein isometrischer Algebra- und Vektorverbandsisomorphismus von A auf die Banachverbandsalgebra $C_0(\mathcal{M})$, wobei $\mathcal{M}$ der Raum der maximalen regulären Ideale von A ist.

Für den in Satz 2.3 betrachteten Arens-Homomorphismus ergeben sich nun folgende Aussagen.

Satz 2.13. *Es sei A eine F-Banachverbandsalgebra. Dann ist der Kern des Arens-Homomorphismus mit dem Band* Ann (A'') *identisch. Der Arens-Homomorphismus ist genau dann surjektiv, wenn A topologisch-algebraisch- und verbandsisomorph zur Banachverbandsalgebra $C_0(\mathcal{M})$ ist.*

Beweis. Es bezeichne S den Arens-Homomorphismus. Nach 2.8 (iv) stimmt der Kern von S mit dem Band $\tilde{A}^0$, welches gleich $\operatorname{Ann}(A'')$ ist, überein.

Sei nun S surjektiv. Ferner sei $G\in A''$ mit $S(G)=T_G=I\in Z(A')$, wobei I die Identität auf A' ist. Nach 2.8 (iii) gilt dann $A'=T_G(A')\subseteqq\tilde{A}$. Dies bedeutet $\tilde{A}=A'$. Hieraus folgt, daß A'' topologisch isomorph zu $C_0(\mathcal{M})''$ ist.

Da auf der Funktionenalgebra $C_0(\mathcal{M})''$ die Normbeziehung $\|F^n\|=\|F\|^n$ für alle $F\in C_0(\mathcal{M})''$ und alle $n\in\mathrm{N}$ gilt, sind auf A'' und somit auch auf A die gegebene Norm und die Spektralhalbnorm r äquivalent. Es ist daher in $C_0(\mathcal{M})$ die dichte Verbands-subalgebra $\hat{A}$ abgeschlossen. Es gilt also $\hat{A}=C_0(\mathcal{M})$. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist dann die Gelfand-Transformation auch ein topologischer Isomorphismus.

Falls wir die im Satz angegebene Isomorphie zwischen A und $C_0(\mathcal{M})$ voraussetzen, können wir auf A eine neue äquivalente Norm einführen, so daß A auch isometrisch isomorph zu $C_0(\mathcal{M})$ ist. Wählen wir nun die kanonische Identifizierung $C(\Omega)$ von $C_0(\mathcal{M})''$, so läßt sich $C_0(\mathcal{M})'$ mit $C(\Omega)'_n$ identifizieren. Nach Satz 2.4 gilt daher

$$\int_\Omega F\, d(T_G\mu) = \int_\Omega F * G\, d\mu = \int_\Omega F \cdot G\, d\mu$$

für alle $F, G \in C(\Omega)$ und alle $\mu \in C_0(\mathcal{M})'$. Hieraus folgt die Darstellung

$$T_G\mu = G\cdot\mu \quad \text{für alle} \quad G\in C(\Omega)$$

und $\mu\in C_0(\mathcal{M})'$. Da aber bekanntlich zu jedem $R\in Z(C_0(\mathcal{M})')$ genau ein $H\in C(\Omega)$ existiert mit $R\mu=H\cdot\mu$ für alle $\mu\in C_0(\mathcal{M})'$, ist in der betrachteten Situation der Arens-Homomorphismus offensichtlich bijektiv.

Beispiele. Die Ergebnisse der Arbeit wollen wir nun an den Banachverbänden c_0, l_1 und l_2 veranschaulichen. Mit der koordinatenweisen Multiplikation sind sie auch F-Banachverbandsalgebren. Alle drei haben denselben Raum $\mathcal{M}$ der maximalen regulären Ideale, nämlich $\mathbf{N}$, versehen mit der diskreten Topologie. Sie haben also auch denselben spektralen Dual $C_0(\mathcal{M})'$ und dasselbe $C_0(\mathcal{M})''$. Es ist

$$C_0(\mathcal{M})\cong c_0,\quad C_0(\mathcal{M})'\cong l_1,\quad C_0(\mathcal{M})''\cong l_\infty \quad\text{und}\quad C_0(\mathcal{M})''\cong C(\Omega) \quad\text{mit}\quad \Omega=\beta\mathbf{N}.$$

Zu $A=c_0$: Aus $A\cong C_0(\mathcal{M})$ folgt $\tilde{A}=A'$ und somit $A''\cong C_0(\mathcal{M})''=C(\beta\mathbf{N})$.

Zu $A=l_1$: Hier gilt $A'\cong l_\infty\cong C(\beta\mathbf{N})$ und $A''\cong C(\beta\mathbf{N})'$. Es ist $\tilde{A}\cong l_1\subsetneqq l_\infty\cong A'$. Wir erhalten $\mathrm{Ann}\,(A'')\cong l_1^0\cong\{\mu\in C(\beta\mathbf{N})'\colon \text{Träger von } \mu\subseteq\beta\mathbf{N}\setminus\mathbf{N}\}$ und $\mathrm{Ann}\,(A'')^\perp\cong$ $\cong l_1$. Satz 2.9 (ii) besagt nun, daß l_1 als ein Vektorverbandsideal in $C(\beta\mathbf{N})$ betrachtet werden kann, was offensichtlich stimmt.

Zu $A=l_2$: Bei diesem Beispiel gilt $A=A''$. Interessant ist aber, daß hier $\tilde{A}(\cong l_1)$ dicht in $A'(\cong l_2)$ ist, daß also nach 2.10 der Bidual A'' und somit A halbeinfach sein muß.

Literatur

[1] M. Basly, *F-algèbres de Banach réticulées*, Thèse (Tunis, 1982).

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Erg. Math. Grenzgeb., No. 80, Springer (Berlin, 1973).

[3] P. Civin and B. Yood, The second conjugate space of a Banach algebra as an algebra, *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 847—870.

[4] J. DUNCAN and S. A. R. HOSSEINIUN, The second dual of a Banach algebra, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **84** (1979), 309—325.
[5] C. B. HUIJSMANS and B. DE PAGTER, The order bidual of lattice ordered algebras, *J. Funct. Anal.*, **59** (1984), 41—64.
[6] L. F. MARTIGNON, Banach f-algebras and Banach lattice algebras with unit, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **11** (1980), 11—17.
[7] M. ORHON, *The ideal center of the dual of a Banach lattice*, THD, Preprint, Nr. 1182 (Darmstadt, 1988).
[8] C. QUINT, *Zur Darstellung von Banachverbandsalgebren*, Dissertation (Darmstadt, 1984).
[9] C. E. RICKART, *General theory of Banach algebras*, Krieger (New York, 1974).
[10] H. H. SCHAEFER, *Banach lattices and positive operators*, Springer (Berlin—Heidelberg—New York, 1974).
[11] E. SCHEFFOLD, *FF*-Banachverbandsalgebren, *Math. Z.*, **177** (1981), 193—205.

TECHNISCHE HOCHSCHULE DARMSTADT
FACHBEREICH MATHEMATIK
D—6100 DARMSTADT
SCHLOSSGARTENSTR. 7
DEUTSCHLAND