Acta Sci. Math., 55 (1991), 361—370

Замыкание в операторной области

Э. Л. ПЕКАРЕВ

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\mathscr{B}=\mathscr{B}(\mathfrak{H})$ — совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, $\mathscr{B}_+=\mathscr{B}_+(\mathfrak{H})$ — подмножество $\mathscr{B}(\mathfrak{H})$, состоящее из неотрицательных операторов. По аналогии со скалярным случаем операторным сегментом $[O, R]$, где $R\in\mathscr{B}_+$ назовем множество, определяемое равенством

$$[O, R] = \{X\in\mathscr{B} | O \leqq X \leqq R\},$$

а совокупность его крайних точек обозначим через $\operatorname{ex}[O, R]$.

В настоящей заметке рассматривается топология множества $\mathfrak{R}=\operatorname{ran} R^{1/2}$, в которой система замкнутых подпространств есть $\{\operatorname{ran} X^{1/2} | X\in\operatorname{ex}[O, R]\}$. Охарактеризован класс $\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$ областей значений операторов, принадлежащих счетно-нормированному идеалу Шэттена γ_p $(1\leqq p<\infty)$. Описана структура замкнутых операторов, определенных на областях из $\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$ $(1\leqq p<\infty)$.

Напомним, что если $\mathscr{L}(\subset\mathfrak{H})$ — операторная область (то есть область значений оператора из $\mathscr{B}$), то свертка $R_{\mathscr{L}}$ оператора $R\in\mathscr{B}_+(\mathfrak{H})$ на $\mathscr{L}$ — это оператор

(1) $$R_{\mathscr{L}} = R^{1/2}P_M R^{1/2},$$

где P_M — ортопроектор на подпространство $M=(R^{-1/2}\mathscr{L})^-$. Описание множества $\operatorname{ex}[O, R]$ и свойств свертки можно найти в статьях [3, 8] и цитированной в них литературе. В частности, отметим используемое в дальнейшем равенство

(2) $$\operatorname{ex}[O, R] = \{R_{\mathscr{L}} | \mathscr{L}\text{ — операторная область из } \operatorname{ran} R^{1/2}\}.$$

Через $\mathscr{C}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ обозначается совокупность всех линейных замкнутых операторов, действующих из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, и при $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}_2=\mathfrak{H}$ полагается $\mathscr{C}(\mathfrak{H})=\mathscr{C}(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$.

Поступило 5-ого ноября 1989.

1. Пусть $R\in\mathscr{B}_+$ и $\mathfrak{R}=\operatorname{ran} R^{1/2}$. Согласно [9] на $\mathfrak{R}$ можно определить новую норму $\|\cdot\|'$ так, чтобы $\mathfrak{R}'=(\mathfrak{R}, \|\cdot\|')$ являлось гильбертовым пространством и для исходной нормы $\|\cdot\|$ выполнялось соотношение

$$(3)\qquad \|f\| \leqq \|f\|' \quad (\forall f\in\mathfrak{R}).$$

Обратно, если на некотором линеале $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{H}$ определена такая норма $\|\cdot\|'$, что $\mathfrak{R}'=(\mathfrak{R}, \|\cdot\|')$ — гильбертово пространство и справедливо (3), то, следуя [1], рассмотрим инъекцию $S\colon \mathfrak{R}'\to\mathfrak{H}$

$$Sf=f \quad (\forall f\in\mathfrak{R})$$

и ее сопряженный оператор $S^+\colon \mathfrak{H}\to\mathfrak{R}'$. Положив $R=SS^+$, так что $0\leqq R\leqq I$, получим:

$$\operatorname{ran} R^{1/2} = \operatorname{ran}(SS^+)^{1/2} = \operatorname{ran} S = \mathfrak{R}.$$

При этом из равенства $(Ru, v)=(S^+u, S^+v)$ $(u, v\in\mathfrak{H})$ легко вытекает представление

$$(4)\qquad (f,g)' = (R^{-1/2}f, R^{-1/2}g) \quad (\forall f, g\in\mathfrak{R}),$$

где (однозначный) оператор $R^{-1/2}$ действует из $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{R}^-$.

Ясно, что оператор $R\in[O, I]$, $\operatorname{ran} R^{1/2}=\mathfrak{R}$, условием (4) определяется единственным образом. Этот оператор назовем метрическим для гильбертова пространства $\mathfrak{R}'=(\mathfrak{R}, \|\cdot\|')$. Очевидно, множество $\mathscr{M}(\mathfrak{R})=\{R\in\mathscr{B}_+ | \operatorname{ran} R^{1/2}=\mathfrak{R}\}$ выпукло, $\operatorname{ex}\mathscr{M}(\mathfrak{R})=\emptyset$.

Из теоремы о замкнутом графике следует, что если на $\mathfrak{R}$ заданы две нормы $\|\cdot\|'(\geqq\|\cdot\|)$ и $\|\cdot\|''(\geqq\|\cdot\|)$, относительно которых $\mathfrak{R}$ становится гильбертовым пространством, то эти нормы эквивалентны. Значит, для любого множества $\mathscr{L}\subset\mathfrak{R}$ его замыкания в пространствах $\mathfrak{R}'=(\mathfrak{R}, \|\cdot\|')$ и $\mathfrak{R}''=(\mathfrak{R}, \|\cdot\|'')$ совпадают; это замыкание обозначается через $[\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}$.

Определение. $\mathfrak{R}$-замыканием множества $\mathscr{L}(\subset\mathfrak{R})$ в $\mathfrak{R}$ называется множество $[\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}$.

Отметим простейшие свойства $\mathfrak{R}$-замыкания линеалов $\mathscr{L}\subset\mathfrak{R}$ [7]:

1) $\mathscr{L}\subset[\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}\subset\mathscr{L}^-$; 2) $[\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}=\mathscr{L}^-\Leftrightarrow\mathscr{L}^-\subset\mathfrak{R}$;

3) $\mathfrak{R}^-=\mathfrak{R}\Rightarrow[\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}=\mathscr{L}^-$.

Легко видеть, что если $R\in\mathscr{B}_+$, $\operatorname{ran} R^{1/2}=\mathfrak{R}$, то оператор $R^{1/2}$ взаимно однозначно и непрерывно отображает $\mathfrak{R}^-$ на $\mathfrak{R}'$, и, следовательно,

$$(5)\qquad [\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}} = R^{1/2}(R^{-1/2}\mathscr{L})^-.$$

Кроме того, ясно, что линеал $\mathscr{L}\subset\mathfrak{R}$ является операторной областью в $\mathfrak{H}$ точно тогда, когда $\mathscr{L}$ — операторная область в $\mathfrak{R}'$.

Лемма 1 ([7]). *Если* $R \in \mathscr{B}_+$ *и* $\operatorname{ran} R^{1/2} = \mathfrak{R}$, *то для любой операторной области* $\mathscr{L} \subset \mathfrak{R}$ *справедливо равенство* $\operatorname{ran} R_{\mathscr{L}}^{1/2} = [\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}$.

Доказательство вытекает непосредственно из (1) и (5):

$$\operatorname{ran} R_{\mathscr{L}}^{1/2} = \operatorname{ran} (R^{1/2} P_M R^{1/2})^{1/2} = \operatorname{ran} R^{1/2} P_M = R^{1/2} (R^{-1/2} \mathscr{L})^{-} = [\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}.$$

Замечание. Из (1) и (5) вытекает, очевидно, что $R_{\mathscr{L}} = R_{[\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}}$, хотя как было отмечено в [6, 8], вообще говоря $R_{\mathscr{L}} \neq R_{\mathscr{L}^-}$.

Следствие. *Если* R — *метрический оператор для* $\mathfrak{R}'$, *то для любой операторной области* $\mathscr{L} \subset \mathfrak{R}$ *ее ортогональное дополнение в* $\mathfrak{R}'$ *совпадает с* $\operatorname{ran} (R - R_{\mathscr{L}})^{1/2}$.

Действительно, считая без ограничения общности $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}$, рассмотрим вытекающие из (1) представления

$$R_{\mathscr{L}} = R^{1/2} P R^{1/2}, \quad R - R_{\mathscr{L}} = R^{1/2} Q R^{1/2},$$

где P и Q — ортопроекторы на $(R^{-1/2} \mathscr{L})^{-}$ и $\mathfrak{R}^{-} \ominus (R^{-1/2} \mathscr{L})^{-}$ соответственно. Обозначив $\mathfrak{M} = \operatorname{ran} (R - R_{\mathscr{L}})^{1/2}$, получим, очевидно, что

$$\mathscr{L} + \mathfrak{M} = \mathfrak{R},$$

и если $f \in \mathscr{L}$, $g \in \mathfrak{M}$, то $f = R^{1/2} P u$, $g = R^{1/2} Q v$ при некоторых $u, v \in \mathfrak{R}^{-}$, так что

$$(f, g)' = (R^{-1/2} f, R^{-1/2} g) = (Pu, Qv) = 0.$$

Пусть R — метрический оператор для гильбертова пространства $\mathfrak{R}' = (\mathfrak{R}, \| \cdot \|')$, удовлетворяющего условию (3), и $\mathscr{L}$ — операторная область из $\mathfrak{R}$. Если $\mathscr{L}' = (\mathscr{L}, \| \cdot \|')$ является гильбертовым пространством, то есть $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}$, то его метрический оператор обозначим через $X(\mathscr{L}')$; совокупность всех таких метрических операторов обозначим через $\mathscr{X}(\mathfrak{R}') (= \{X(\mathscr{L}') | \mathscr{L} = [\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}\})$.

Теорема 1. $\mathscr{X}(\mathfrak{R}') = \operatorname{ex} [O, R]$.

Доказательство. Согласно (2), $\operatorname{ex} [O, R]$ состоит из сверток оператора R на всевозможные операторные области $\mathscr{L} \subset \mathfrak{R}$, так что ввиду замечания к лемме 1 имеем:

$$\operatorname{ex} [O, R] = \{R_{\mathscr{L}} | \mathscr{L} = [\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}}\}.$$

С другой стороны, если $X = X(\mathscr{L}')$ — метрический оператор для $\mathscr{L}'$ $(\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_{\mathfrak{R}})$, то

$$(X^{-1/2} f, X^{-1/2} g) = (R^{-1/2} f, R^{-1/2} g) \quad (\forall f, g \in \mathscr{L}).$$

Значит, для любых $u, v \in \mathscr{L}^{-}$,

$$(u, v) = (R^{-1/2} X^{1/2} u, R^{-1/2} X^{1/2} v),$$

и оператор $\omega=R^{-1/2}X^{1/2}(\in\mathscr{B})$ изометрически отображает $\mathscr{L}^{-}\to R^{-1/2}\mathscr{L}$, а $\omega(\mathfrak{H}\ominus\mathscr{L})=\{0\}$. Поэтому $P=\omega\omega^*$ — ортопроектор на подпространство $R^{-1/2}\mathscr{L}$ и, следовательно,

$$X = R^{-1/2}\omega\omega^* R^{1/2} = R^{1/2}PR^{1/2} = R_{\mathscr{L}}.$$

Доказательство законечно.

Следствие 1. *Если R_1 и R_2 — метрические операторы для гильбертовых пространств $\mathfrak{R}_1'$ и $\mathfrak{R}_2''$ соответственно, причем $R_1\leqq R_2$, то $\mathscr{X}(\mathfrak{R}_1')\subset\mathscr{X}(\mathfrak{R}_2'')$ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{ran}(R_2-R_1)^{1/2}\cap\operatorname{ran}R_1^{1/2} = \{0\}. \tag{6}$$

В самом деле, в силу доказанной теоремы нужно убедиться, что $\operatorname{ex}[O, R_1]\subset\subset\operatorname{ex}[O, R_2]$ точно тогда, когда имеет место равенство (6). Но согласно [3, 8] выполнение (6) равносильно тому, что $R_1\in\operatorname{ex}[O, R_2]$, а это в свою очередь эквивалентно включению $\operatorname{ex}[O, R_1]\subset\operatorname{ex}[O, R_2]$ (см. [8], замечание к теореме 3.2).

Следствие 2. *В условиях следствия* 1, $\mathfrak{R}_1'$ *является подпространством* $\mathfrak{R}_2''$ *точно тогда, когда выполняется равенство* (6).

Замечание. Если $R\in\mathscr{B}_+$, $\mathfrak{R}=\operatorname{ran}R^{1/2}$, то

$$\operatorname{ex}([O, R]\cap\mathscr{M}(\mathfrak{R})) = \{R\}.$$

Действительно, считая без ограничения общности, что $\mathfrak{R}^-=\mathfrak{H}$, получим представление

$$[O, R]\cap\mathscr{M}(\mathfrak{R}) = \bigcup_{0<\delta<1} R^{1/2}[\delta I, I]R^{1/2},$$

в силу которого для каждого оператора $R^{1/2}K_0R^{1/2}\in\operatorname{ex}([O, R]\cap\mathscr{M}(\mathfrak{R}))$ $(\delta_0 I\leqq K_0\leqq I)$ имеет место включение $K_0\in\operatorname{ex}[\delta I, I]$ $(0<\delta\leqq\delta_0)$. Но согласно [8] (формула (3.8))

$$\operatorname{ex}[\delta I, I] = \{K\in\mathscr{B}_+ | K = (1-\delta)P+\delta I,\ P^* = P^2 = P\},$$

откуда легко вытекает, что $\bigcap_{0<\delta\leqq 0}\operatorname{ex}[\delta I, I]=\{I\}$. Таким образом, $\operatorname{ex}([O, R]\cap\cap\mathscr{M}(\mathfrak{R}))\subset\{R\}$; противоположное включение очевидно.

Воспользуемся еще одной характеристикой операторной области, приведенной в [9]: Линеал $\mathfrak{R}$ является операторной областью тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{\mathfrak{Q}_n\}_{n\geqq 0}$ взаимно ортогональных подпространства $\mathfrak{H}$ и убывающая числовая последовательность $\{\mu_n\}_{n\geqq 0}$ $(\mu_n\downarrow 0)$ такие, что

$$\mathfrak{R} = \Big\{\sum_{n\geqq 0} x_n | x_n\in\mathfrak{Q}_n,\ \sum_{n\geqq 0}(\mu_n^{-1}\|x_n\|)^2<\infty\Big\}. \tag{7}$$

В этом случае, если $R=\sum_{n\geqq 0}\mu_n Q_n$, где Q_n — ортопроектор на $\mathfrak{Q}_n$ $(n\geqq 0)$, то $\operatorname{ran} R^{1/2}=\mathfrak{R}$.

Рассмотрим две последовательности ортопроекторов $\{P_n\}_{n\geqq 0}$ и $\{Q_n\}_{n\geqq 0}$ такие, что $P_iP_j=O$, $Q_iQ_j=O$ $(i\neq j)$ и положим

(8)
$$L=\sum_{n\geqq 0}\lambda_n^2 P_n,\quad R=\sum_{n\geqq 0}\mu_n^2 Q_n,$$

где числовые последовательности $\{\lambda_n\}_{n\geqq 0}$ и $\{\mu_n\}_{n\geqq 0}$ монотонно убывая стремятся к нулю. Обозначив $\mathscr{L}=\operatorname{ran} L^{1/2}$, $\mathfrak{R}=\operatorname{ran} R^{1/2}$ заметим [2], что если $L\leqq R$, то $\mathscr{L}\subset\mathfrak{R}$.

Теорема 2. *Пусть операторы L и R из (8) — метрические для гильбертовых пространств $\mathscr{L}'$ и $\mathfrak{R}''$ соответственно, причем $L\leqq R$. Тогда $\mathscr{L}'$ — подпространство $\mathfrak{R}''$ точно в том случае, если существует последовательность ортопроекторов $\{\pi_j\}_{j\geqq 0}$ удовлетворяющая условиям*

(9)
$$\begin{gathered}\operatorname{ran}\pi_j\subset\mathfrak{R}^-\quad(j\geqq 0),\ \pi_j\pi_k=O\quad(j\neq k),\\ \mu_i\mu_k Q_i\pi_j Q_k=\lambda_j^2 Q_iP_jQ_k\quad(i,j,k\geqq 0),\end{gathered}$$

Доказательство. Допустим сперва, что $\mathscr{L}'$ — подпространство $\mathfrak{R}''$. Тогда, ввиду теоремы 1 и ее следствий, если $\mathfrak{M}\subset\mathscr{L}$ и $[\mathfrak{M}]_{\mathscr{L}}=\mathfrak{M}$, то $L_{\mathfrak{M}}=R_{\mathfrak{M}}$. В частности, при $\mathfrak{M}_j=P_j\mathfrak{H}$ $(j\geqq 0)$ получаем:

(10)
$$L_{\mathfrak{M}_j}=R_{\mathfrak{M}_j}=R^{1/2}\pi_jR^{1/2},$$

где в соответствии с (1) π_j — ортопроектор на подпространство $R^{-1/2}\mathfrak{M}_j\subset\mathfrak{R}^-$. Покажем, что последовательность $\{\pi_j\}_{j\geqq 0}$ удовлетворяет условиям (9). Действительно, из (8) и (1) вытекает, что

$$L_{\mathfrak{M}_j}=\lambda_j^2P_j,\ L_{\mathfrak{M}_j+\mathfrak{M}_k}=\lambda_j^2P_j+\lambda_k^2P_k\quad(k\neq j)$$

так что согласно (10)

(11)
$$\lambda_j^2P_j=R^{1/2}\pi_jR^{1/2},\ \lambda_j^2P_j+\lambda_k^2P_k=R^{1/2}(\pi_j+\pi_k)R^{1/2}\quad(k\neq j).$$

Но поскольку $[\mathfrak{M}_j+\mathfrak{M}_k]_{\mathscr{L}}=\mathfrak{M}_j+\mathfrak{M}_k$ и $\operatorname{ran}(\pi_j+\pi_k)\subset\mathfrak{R}^-$, то $\pi_j+\pi_k$ — ортопроектор, а это возможно только если $\pi_j\pi_k=O$ $(j\neq k)$. Наконец, домножив обе части первого из равенств (11) слева на Q_i и справа на Q_k, получим с учетом (8), что

$$\lambda_j^2Q_iP_jQ_k=\mu_i\mu_kQ_i\pi_jQ_k\quad(i,j,k\geqq 0).$$

Таким образом, выполнены все условия (9).

Обратно, из (9) вытекают равенства

$$Q_iLQ_k=\mu_i\mu_kQ_iPQ_k\quad(i,k\geqq 0),$$

где $P=\sum_{j\geq 0}\pi_j$ — ортопроектор, $P\mathfrak{H}\subset\mathfrak{R}^-$. Отсюда, учитывая включения $\operatorname{ran} L\subset\subset\mathscr{L}\subset\mathfrak{R}^-=\operatorname{ran}\sum_{i\geq 0}Q_i$, легко получить равенство $L=R_{\mathscr{L}}$, означающее, что $\mathscr{L}'$ — подпространство $\mathfrak{R}''$.

Замечание. Вообще говоря, не всякий оператор $R\in\mathscr{M}(\mathfrak{R})$ представим в виде (8). Однако, если $\mathfrak{R}$ — область значений некоророго вполне непрерывного оператора, то R также вполне непрерывен и, следовательно, допускает представление (8), причем $\dim Q_n\mathfrak{H}<\infty$ $(n\geq 0)$. Ясно, что тогда для любого оператора $L\in[O, R]$ справедливо разложение (8), где $\dim P_n\mathfrak{H}<\infty$ $(n\geq 0)$.

2. Напомним [9], что линеал $\mathfrak{R}\subset\mathfrak{H}$ является операторной областью тогда и только тогда, когда существует оператор $T\in\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ с областью определения $\vartheta(T)=\mathfrak{R}$. Введем гильбертово пространство $(\mathfrak{R}, \|\cdot\|_T)$, где

$$\|f\|_T^2 = \|f\|^2+\|Tf\|^2 \quad (f\in\mathfrak{R}).$$

и обозначим через $R(T)$ соответствующий метрический оператор.

Если $\vartheta(T)^-\neq\mathfrak{H}$, то рассматривая оператор T как элемент множества $\mathscr{C}(\vartheta(T)^-, \mathfrak{H})$, обозначим его сопряженный через $T^*(\in\mathscr{C}(\mathfrak{H}, \vartheta(T)^-))$, а абсолютную величину — через $|T|=(T^*T)^{1/2}$ [7].

Лемма 2. *Если $T\in\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ и $\vartheta(T)=\mathfrak{R}$, то*

$$|T| = (I-R(T))^{1/2}R(T)^{-1/2}, \quad R(T) = (I+T^*T)^{-1}I_{\mathfrak{R}}. \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку $(f, g\in\mathfrak{R})$

$$(f, g)+(Tf, Tg) = (R(T)^{-1/2}f, R(T)^{-1/2}g),$$

то

$$(Tf, Tg) = ((I-R(T))^{1/2}R(T)^{-1/2}f, (I-R(T))^{1/2}R(T)^{-1/2}g),$$

и первое из равенств (12) справедливо, так как $(I-R(T))^{1/2}R(T)^{-1/2}$ — самосопряженный неотрицательный оператор в $\mathfrak{R}^-$. Справедливость второго равенства столь же очевидна.

Следствие 1. $\mathscr{M}(\mathfrak{R})=\{R(T)|T\in\mathscr{C}(\mathfrak{H}), \vartheta(T)=\mathfrak{R}\}$.

Следствие 2. *Если T — самосопряженный неотрицательный оператор в $\mathfrak{H}$, то*

$$T=(I-R(T))^{1/2}R(T)^{-1/2}, \quad R(T) = (I+T^2)^{-1}.$$

Следствие 3. *Если $T\in\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ и $\operatorname{ran} T^*\subset\vartheta(T)$, то $\vartheta(T)=\vartheta(T)^-$ и T ограничен.*

Действительно, в этом случае согласно (12) $(R=R(T))$

$$(I-R)^{1/2}\mathfrak{R}^- = \operatorname{ran} T^* \subset \mathfrak{R} = R^{1/2}\mathfrak{R}^-,$$

так что $(I-R)\mathfrak{N}^{-}\subset R\mathfrak{N}^{-}$ и, следовательно, $\mathfrak{N}^{-}=\mathfrak{N}$, что и требовалось доказать.

Замечание. По существу, предыдущее утверждение, вполне элементарное, было отмечено ранее в [5].

Рассмотрим оператор $T\in\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ с областью определения $\vartheta(T)=\mathfrak{N}$ и произвольный линеал $\mathscr{L}\subset\mathfrak{N}$. Ясно, что сужение $T\restriction\mathscr{L}$ — замыкаемый оператор, $T\restriction[\mathscr{L}]_{\mathfrak{N}}$ — его замыкание и, значит, $T\restriction\mathscr{L}\in\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ точно тогда, когда $\mathscr{L}=[\mathscr{L}]_{\mathfrak{N}}$. Отметим, что согласно теореме 1 для любой $\mathfrak{N}$-замкнутой операторной области $\mathscr{L}$ соответствующий метрический оператор $R(T\restriction\mathscr{L})$ содержится во множестве ex $[O, R]$. Значит, в силу (2) и (1) справедливо равенство

$$R(T\restriction\mathscr{L}) = R(T)_{\mathscr{L}}. \tag{13}$$

Из (12) и (13) вытекает, что

$$|T_1| = (I-R_{\mathscr{L}})^{1/2}R_{\mathscr{L}}^{-1/2}, \quad R_{\mathscr{L}} = (I+T_1^*T_1)^{-1}I_{\mathscr{L}}, \tag{14}$$

где положено $R=R(T)$, $T_1=T\restriction\mathscr{L}$, $|T_1|$ — абсолютная величина оператора T_1 как элемента $\mathscr{C}(\mathscr{L}^{-}, \mathfrak{H})$.

Очевидно, если $T\in\mathscr{B}_{+}(\mathfrak{H})$, то из (12) вытекает, что T и R имеют общие инвариантные подпространства. В случае самосопряженного $T\in\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть T — самосопряженный неотрицательный оператор в $\mathfrak{H}$, $\vartheta(T)=\mathfrak{N}$, а $\mathscr{L}(\subset\mathfrak{N})$ — $\mathfrak{N}$-замкнутая операторная область. Тогда подпространство $\mathscr{L}^{-}$ инвариантно относительно T и оператор $T_1=T\restriction\mathscr{L}$ самосопряжен в $\mathscr{L}^{-}$ точно в том случае, если $\mathscr{L}$ инвариантно относительно $R=R(T)$ $(R\mathscr{L}\subset\mathscr{L})$.*

Доказательство. Очевидно, $R\mathscr{L}\subset\mathscr{L}$ точно тогда, когда подпространство $\mathfrak{P}=R^{-1/2}\mathscr{L}(\subset\mathfrak{N}^{-})$ инвариантно относительно R, и так как $R_{\mathscr{L}}=R^{1/2}PR^{1/2}$, где P — ортопроектор на $\mathfrak{P}$, то

$$R_{\mathscr{L}}f = R^{1/2}PR^{1/2}f = Rf \quad (\forall f\in\mathscr{L}).$$

Отсюда на основании первых равенств в (12′) и (14) заключаем, что если $\mathscr{L}$ инвариантно относительно R, то

$$Tf = |T_1|f \quad (\forall f\in\mathscr{L}).$$

Остается заметить, что $|T_1|$ самосопряжен в $\mathscr{L}^{-}$ и $\mathscr{L}=\vartheta(T)\cap\mathscr{L}^{-}$.

Обратно, пусть $\mathscr{L}^{-}$ инвариантно относительно T и T_1 самосопряжен в $\mathscr{L}^{-}$. Обозначив $\mathscr{L}_0=\operatorname{ran} R_{\mathscr{L}}$, получим ввиду второго равенства в (14), что

$$(I+T^2)\mathscr{L}_0 = (I+T_1^2)\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}^{-}.$$

Следовательно, в силу второго равенства в (12), $R\mathscr{L}\subset R\mathscr{L}^{-}\subset\mathscr{L}^{-}$, и так как $\mathscr{L}^{-}\cap\mathfrak{R}=\mathscr{L}^{-}\cap\mathfrak{D}(T)=\mathscr{L}$, то $R\mathscr{L}\subset\mathscr{L}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Если в условиях теоремы $\mathfrak{R}\neq\mathfrak{H}$, то легко привести пример плотной в $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{R}$-замкнутой операторной области $\mathscr{L}(\subset\mathfrak{R})$, не инвариантной относительно R; именно $\mathscr{L}=R^{1/2}(\mathfrak{H}\ominus\{e\})$, где $e\notin\mathfrak{R}$.

3. Рассмотрим множество операторных областей гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, определяемое следующим образом:

$$\{\gamma\mathfrak{H}\}=\{\mathfrak{R}|\mathfrak{R}=\operatorname{ran}A,\ A\in\gamma\},$$

где γ — некоторый двусторонний идеал в $\mathscr{B}$. Отметим, что если $\operatorname{ran}A=\operatorname{ran}B$, где $A\in\gamma, B\in\mathscr{B}$, то согласно [2] $B=AC$ при некотором $C\in\mathscr{B}$ и, следовательно, $B\in\gamma$. В частности, если $R\in[O,I]$ и $\mathfrak{R}=\operatorname{ran}R^{1/2}$, то $\mathfrak{R}\in\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$ точно тогда, когда $R^{1/2}\in\gamma_p$ $(1\leqq p<\infty)$, Отсюда вытекает, что если $\mathfrak{R}\in\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$ $(1\leqq p<\infty)$, то и любая операторная область $\mathscr{L}(\subset\mathfrak{R})$ принадлежит $\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$. Очевидно также, что включение $\mathfrak{R}\in\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$ $(1\leqq p<\infty)$ равносильно существованию представления (7), в котором

$$\dim\mathfrak{Q}_n<\infty\quad(n\geqq 0),\quad \sum_{n\geqq 0}\mu_n^p\dim\mathfrak{Q}_n<\infty.$$

Выбрав в $\mathfrak{H}$ ортонормированную систему векторов $\varepsilon=\{e_n\}_{n=0}^{\omega}$ и невозрастающую последовательность положительных чисел $M=\{\mu_n\}_{n=0}^{\omega}$ $(\omega\leqq\infty)$, определим операторную область $\mathfrak{R}(\varepsilon, M)$ равенством

$$\mathfrak{R}(\varepsilon, M)=\left\{\sum_{n=0}^{\omega}\alpha_n e_n\,\Big|\,\sum_{n=0}^{\omega}\left|\frac{\alpha_n}{\mu_n}\right|^2<\infty\right\}. \tag{15}$$

Ясно, что $\mathfrak{R}(\varepsilon, M)\in\{\gamma_\infty\mathfrak{H}\}$, причем $\mathfrak{R}(\varepsilon, M)\in\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$ $(1\leqq p<\infty)$ тогда и только тогда, когда $M=\{\mu_n\}_{n\geqq 0}\in l_p$ (если $\omega<\infty$, то при $n>\omega$ полагаем $\mu_n=0$).

Из предыдущих рассуждений легко вытекает следующая

Лемма 3. *Для того чтобы* $\mathfrak{R}\in\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$ $(1\leqq p<\infty)$, *необходимо чтобы для любой и достаточно, чтобы для какой-либо ортонормированной системы* $\varepsilon\subset\mathfrak{R}$ *существовала невозрастающая последовательность неотрицательных чисел* $M\in\ell_p$ *такая, что* $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}(\varepsilon, M)$.

Замечание. Непосредственно из определения (15) видно, что если $M=\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, то $\mathfrak{R}(\varepsilon,\Lambda)\subset\mathfrak{R}(\varepsilon, M)$ точно тогда, когда $\{\lambda_n\mu_n^{-1}\}_{n=0}^{\infty}\in\ell_\infty$. В часности, равенство $\mathfrak{R}(\varepsilon, M)=\mathfrak{R}(\varepsilon,\Lambda)$ имеет место точно в том случае, если $\lambda_n\asymp\mu_n$ (то есть $\{\lambda_n\mu_n^{-1}\}$ и $\{\lambda_n^{-1}\mu_n\}_{n=0}^{\infty}\in\ell_\infty$).

Теорема 4. *Пусть T — самосопряженный неотрицательный оператор в* $\mathfrak{H}$ *с областью определения* $\mathfrak{D}(T)$ *и* $\operatorname{Ker}T=\{0\}$. *Тогда* $\mathfrak{D}(T)\in\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$ $(1\leqq p<\infty)$

в том и только том случае, если $\vartheta(T)=\mathfrak{R}(\varepsilon, M)$, *где* $\varepsilon=\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— ортонормированный базис пространства* $\mathfrak{H}$, *состоящий из собственных векторов оператора T, причем соответствующие собственные числа* t_n $(n\geqq 0)$ *таковы, что* $\{(1+t_n^2)^{-1/2}\}\in\ell_p$.

Доказательство. Действительно, если $\vartheta(T)\in\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$, $\operatorname{Ker} T=\{0\}$, то оператор $R=R(T)$ представим в виде (8), где

$$\sum_{n\geqq 0} Q_n = I,\ \dim Q_n = 1 \quad (n \geqq 0),\ \{\mu_n\}_{n\geqq 0}\in\ell_p.$$

Если $e_n\in Q_n\mathfrak{H}$, $\|e_n\|=1$ $(n\geqq 0)$, то ввиду теоремы 3 $Te_n=t_ne_n$ $(n\geqq 0)$, причем согласно (12) $\mu_n=(1+t_n^2)^{-1/2}$ $(n\geqq 0)$. Обратное утверждение также очевидно.

Следствие 1. *Если* $T_i=T_i^*\geqq O$, $\operatorname{Ker} T_i=\{0\}$ *и* $T_ie_n=t_{i,n}e_n$ $(i=1,2;\ n\geqq 0)$, *где* $\{e_n\}_{n\geqq 0}$ *— ортонормированный базис в* $\mathfrak{H}$, $\{(1+t_{i,n}^2)^{-1/2}\}\in\ell_p$, *то* $\vartheta(T_1)=\vartheta(T_2)$ *тогда и только тогда, когда* $t_{1,n}\asymp t_{2,n}$.

Следствие 2. *Если* $T\in\mathscr{C}(\mathfrak{H})$ *и* $\vartheta(T)\in\{\gamma_p\mathfrak{H}\}$, *то существуют такие ортонормированные системы* $\{e_n\}_{n=0}^{\omega}$ *и* $\{g_n\}_{n=0}^{\omega}$ $(\omega\leqq\infty)$, *полные в пространствах* $\vartheta(T)^-$ *и* $(\operatorname{ran} T)^-=\operatorname{ran} T$ *соответственно, что* $Te_n=t_ng_n$ $(0\leqq n\leqq\omega)$, *причем* $\{(1+t_n^2)^{-1/2}\}_{n\geqq 0}\in\ell_p$.

В самом деле, поскольку $\vartheta(|T|)=\vartheta(T)$, то применив доказанную теорему к оператору $|T|$ в пространстве $\vartheta(T)^-$, найдем полную в $\vartheta(T)^-$ ортонормированную систему векторов $\varepsilon=\{e_n\}_{n=0}^{\omega}$ $(\omega\leqq\infty)$, для которой $|T|e_n=t_ne_n$ $(0\leqq n\leqq\omega)$, $\{(1+t_n^2)^{-1/2}\}_{n\geqq 0}\in\ell_p$. Если же $T=U|T|$ — полярное представление оператора T, то положив $g_n=Ue_n$ $(0\leqq n\leqq\infty)$, получим:

$$Te_n = t_ng_n \quad (0 \leqq n \leqq \omega).$$

При этом согласно (15)

$$\vartheta(T) = \Big\{\sum_{n=0}^{\omega} \alpha_ne_n \Big| \sum_{n=0}^{\omega}(1+t_n^2)|\alpha_n|^2 < \infty\Big\}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{ran} T = \Big\{\sum_{n=0}^{\omega} \alpha_nt_ng_n \Big| \sum_{n=0}^{\omega}(1+t_n^2)|\alpha_n|^2 < \infty\Big\}.$$

В силу последнего равенства, очевидно, $(\operatorname{ran} T)^-=\operatorname{ran} T$.

Замечание. Поскольку операторная область класса $\{\gamma_\infty\mathfrak{H}\}$ не содержит замкнутых бесконечномерных подпространств [9] (Теорема 2.5), то при $\dim\vartheta(T)^-=\infty$ в условиях предыдущего следствия $\operatorname{ran} T\not\subset\vartheta(T)$. Однако, если $\vartheta(T)=\vartheta_1\oplus\mathfrak{G}$, где $\vartheta_1\in\{\gamma_\infty\mathfrak{H}\}$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{H}\ominus\vartheta_1$, а $T\vartheta_1\subset\mathfrak{G}$ и $T\mathfrak{G}=\{0\}$, то, очевидно, имеет место включение $\operatorname{ran} T\subset\vartheta(T)$ (ср. [5], пример 3.1).

Литература

[1] L. de Branges, Nodal Hilbert spaces of analytic functions, *J. Math. Anal. Appl.*, **108** (1985), 447—465.

[2] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclution of operators in Hilbert spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 413—416.

[3] S.-L. Eriksson and H. Leutwiler, A potential-theoretik approach to parallel addition, *Math. Ann.*, **274** (1986), 301—317.

[4] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир (Москва, 1972).

[5] S. Ota, Closed linear operators with domain containing their range, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **27** (1984), 229—233.

[6] Э. Л. Пекарев, О свертке на операторную область, *Функциональный анализ и его приложения*, **12** (1978), 84—85.

[7] Э. Л. Пекарев, О перенормировке операторных областей, в кн: VIII *Всесоюзная научная конференция по современным проблемам дифференциальной геометрии.* Одесса, 1984, ОГУ (Одесса, 1984), с. 119.

[8] E. L. Pekarev, *Shorts of operators and some extremal problems*, preprint (Odessa, 1989, in Russian). English translation by T. Ando (Sapporo, 1989).

[9] P. A. Fillmore and J. P. Williams, On operator ranges, *Advances Math.*, **7** (1971), 254—281.

СССР, 270039,
Г. ОДЕССА, УЛ. СВЕРДЛОВА, 112,
ОДЕССКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА