NOMOGRAPHISCHE METHODEN MIT VERWENDUNG DER TRANSVERSALEN AZIMUTALEN PROJEKTIONEN DES SPHÄRISCHEN KOORDINATENNETZES ZUR BERECHNUNG DER SONNENHÖHEN ÜBER BELIEBIG GENEIGTEN EBENEN

von Á. Kiss

Summary: *(Nomogramic methods with the application of the transversal azimuthal projections of the grid lines of spherical coordinates for calculating the solar altitudes above the sloping plane surfaces)* As is well known, two drawing of the transversal stereographic or orthographic azimuthal projection of the grid lines of spherical coordinates, drawn over each other with identical contours, will produce a nomogram, from which the equatorial and horizontal coordinates of the sun (or any other celestial body) may be mutually determined from each other.

It is is shown that with the aid of the nomogram, composed from the transversal projections, the sun's altitude above the sloping plane surfaces too, may be determined. The nomogram can be used in two ways of computation. According to one of them the values of the sun's altitude above the horizont and those of its azimuth can be applied, while according to the other one the hour angle and declination of the pole of the slope are to be determined first and by their aid one may compute solar altitude above the slope.

Zusammenfassung: Es ist bekannt, dass, wenn zwei Zeichnungen der transversalen stereographischen oder orthographischen Azimutalprojektion des sphärischen Koordinatennetzes mit gleichen Konturen übereinander gelegt werden, ein Nomogramm entsteht, das es ermöglicht, äquatoriale und horizontale Koordinaten der Sonne (oder eines anderen Himmelskörpers) aus einander gegenseitig zu berechnen.

Es wird nachgewiesen, dass mit Hilfe eines aus transversalen Projektionen zusammengestellten Nomogrammes auch die Sonnenhöhe über einer geneigten Ebene festgestellt werden kann. Das Nomogramm kann auch nach zwei verschiedenen, schon bekannten Berechnungsverfahren verwendet werden. Bei dem einem Verfahren gelangen die Angaben der Sonnenhöhe über dem Horizonte und des Sonnenazimuts zu Verwendung, nach dem anderen Verfahren hingegen muss zuerst der Stundenwinkel und die Deklination des Pols der geneigten Ebene bestimmt werden, und durch die Verwendung dieser Grössen wird die Sonnenhöhe über der geneigten Ebene festgestellt.

Bevor der Behandlung des Problems der Neigung der Sonnenstrahlen zum Hang müssen kurz jene Methoden besprochen werden, womit die horizontalen Koordinaten der Sonne bestimmt werden.

Wie bekannt, wird die Höhe der Sonne über dem Horizont — in Kenntnis der geographischen Breite des Beobachtungsortes (φ), sowie der Deklination und des Stundenwinkels der Sonne (δ, t) — durch die Formel

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

bestimmt.

Wenn die im Laufe eines Tages vor sich gehenden Änderung der Deklination der Sonne ausser Acht gelassen wird, d. h. die Deklination auf die

Dauer eines Tages konstant angenommen wird, so ändert sich die Höhe der Sonne im Laufe des Tages in der Funktion des Stundenwinkels. Wenn nämlich φ und δ konstante Werte sind, dann ist

$$\sin h = a + b \cos t$$

Bei $\sin h = y$ und $\cos t = x$ erhalten wir die Gleichung

$$y = a + bx$$

d. h. die Gleichung einer Gerade.

Die im Laufe eines Tages vor sich gehenden Änderung der Höhe der Sonne über dem Horizont wird also durch eine Gerade ausgedrückt. Da die Gerade bereits durch zwei Punkte bestimmbar ist, genügt im rechtwinkligen Koordinatensystem den die Zeit der oberen Kulmination bezeichnenden, zum Abszissenwert $\cos 0° = 1$ gehörenden Ordinatenwert, $\sin (90° - \varphi + \delta)$, oder $\cos (\varphi - \delta)$, und den die Zeit der unteren Kulmination ausdrückenden zum $\cos 180° = -1$ Abszissenwert gehörenden Ordinatenwert $\sin (90° - \varphi - \delta)$, oder $\cos (\varphi + \delta)$ anzugeben [1]. Die Punkte der durch zwei Punkte ausgezogenen Geraden drücken die Sonnenhöhen in verschiedenen Zeitpunkten des Tages aus, und dies kann vom Koordinatensystem direkt abgelesen werden, wenn wir die Achse X zwischen den Werten von —1 und +1 auch mit Cosinus-Einteilung versehen und die Werte der cos t auch nach der wahren Ortszeit bezeichnen, weiters an der Achse y auch die Sinus-Werte zwischen den Werten —1 und +1 angeben und neben dem einzelnen Sinus-Werten auch die entsprechende Winkelwerte aufschreiben.

Es muss noch erwähnt werden, dass die Gleichung

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

auch auf eine einfachere Form gebracht werden kann, undzwar (mit dem Weglassen der Ableitung)

$$\sin h = \frac{\sin \varphi \sin (\delta + \omega)}{\cos \omega}$$

wo $\operatorname{tg} \omega$ mit der Formel $\operatorname{ctg} \varphi \cos t$ errechnet werden kann.

Mit dieser Formel ist die Rechnung nur dann einfacher, wenn nur eine einzige Sonnenhöhenangabe benötigt wird, oder wenn man mehrere Sonnenhöhenangaben errechnen will, diese Sonnenhöhen sind aber nicht nur Funktionen des variablen Stundenwinkels, sondern zugleich auch Funktionen der variablen Deklination oder der verschiedenen geographischen Breite. An einem gegebenen Orte im Laufe eines Tages zu erwartende Reihe von Sonnenhöhen kann mit der Formel

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

ökonomischer errechnet werden.

Der Azimut der Sonne kann (nach vorheriger Errechnung der Höhe) mit den folgenden Formeln errechnet werden:

$$\sin a = \frac{\cos \delta \sin t}{\cos h}$$

oder

$$\cos a = \frac{\sin \varphi \cos \delta \cos t - \cos \varphi \sin \delta}{\cos h}$$

und weiters, (mit der Weglassung der vorherigen Errechnung der Höhe) mit der Formel

$$\operatorname{ctg} a = \frac{\sin \varphi \cos t - \operatorname{tg} \delta \cos \varphi}{\sin t}.$$

Den Ort des Sonnenaufganges und Sonnenunterganges drückt die Formel

$$\sin A = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

aus, wo A die Weite [Amplitude] des Aufganges und Unterganges bedeutet.

Der Zeitpunkt des Sonnenaufganges und Unterganges gibt uns die Formel

$$\cos (180^\circ - t_0) = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \delta$$

In den auf die Zeitpunkte des Aufganges und Unterganges bezüglichen Formeln (wie auch in den Formeln bezüglich der Höhe und des Azimuts) wird die Sonne durch ihr Zentrum ersetzt, und die Refraktion wird in den Formeln nicht in Betracht gezogen.

Anstatt der obigen Formeln genügt für den Geographen und Klimatologen meistens die Anwendung des GY. ÉRDI-KRAUSZ als „*Navicard*" benannten Nomogrammes (2). Mit Hilfe des Navicard kann die Höhe und der Azimut der Sonne gewöhnlich mit der Genauigkeit von 0,1° bestimmt werden. Mit Hinsicht darauf, dass die tägliche Änderung der Deklination der Sonne im grössten Teil des Jahres 0,1° übersteigt, ja sie in den Wochen um das Äquinoktium sogar den Wert von 0,3° erreicht, können genauere Werte als jene der mit Navicard errechneten auch im Wege der Anwendung der trigonometrischen Funktionen nur dann erhalten werden, wenn uns die Deklination der Sonne mit ihrem Stundenwinkel auf aine bestimmte Zeit zumindest mit der Genauigkeit von 0,1° bekannt ist.

Der wichtigste Bestandteil des Navicard ist die stereographische transversale Projektion des Netzes der sphärischen Koordinaten. Die Bildebene der Projektion liegt vertikal auf die Grundebene des sphärischen Koordinatensystems. Wenn die Projektion des sphärischen Koordinatennetzes als die Projektion des Himmelsgewölbes betrachtet wird, so kann dies sowohl die Projektion eines im Koordinatensystem des Horizont, als auch im Koordinatensystem des Äquators gezeichneten Koordinatennetzes sein (sie kann aber auch eine Projektion z. B. des Netzes des ekliptischen Koordinatensystems sein). Wenn der Entwurf als eine Projektion des horizontalen Koordinatensystems betrachtet wird, dann sind die Kreise des Entwurfes die Projektionen der Höhenkreisen von verschiedenen Azimuts und der Almukantaraten von verschiedener Höhe (mit dem Horizont parallel verlaufende Kugelkreise) — da nämlich mit Ausnahme der Projektion des Anfangsmeridians und der Grundebene auf der stereographischen transversalen Projektion alle Linien Kreisbögen sind —, wenn er aber, als die Projektion des Netzes des Äquatorialen Koordinatensystems erachtet wird, dann sind die Kreise der Zeichnung die Projektionen der Stundenkreise und der mit dem Äquator parallel verlaufenden sphärischen Kreise, d. h. die Projektionen der virtuellen Bahnkreise der Himmelskörper mit verschiedener Deklination.

Zur Bestimmung der Sonnenhöhe über dem Horizont, sowie ihres Azimuts sind zwei Entwürfe der stereographischen transversalen Projektion benötigt und eine derselben muss auf der Oleate liegen. Eine der Zeichnungen wird als ein Netz des Koordinatensystems des Horizonts, die andere aber eine solche des Äquators betrachtet. Wenn wir die erwähnte Aufgabe auf einen Standort bestimmter geographischer Breite auf einen gegebenen Zeitpunkt eines gegebenen Tages des Jahres ausführen wollen, wenn also φ, δ und t bekannt sind und wir h und a suchen, bringen wir die zwei gleich grossen Zeichnungen in einer solchen Weise übereinander an, dass die Achse des äquatorialen Systems,

— die sogenannte Weltachse — den Winkel der fraglichen geographischen Breite mit dem Projektionsbild des Horizonts einschliesst. Demnach suchen wir das Projektionsbild der Sonnenbahn gegebener Deklination, und ermitteln die Projektion des dem gegebenen Zeitpunkt entsprechenden Stundenkreises. Der Durchgangspunkt der gegebenen Sonnenbahn mit dem entsprechenden Stundenkreis ergibt die Lage der Sonne auf dem Himmelsgewölbe, resp. auf der Zeichnung. Nach diesem wird festgestellt auf der Projektion des Koordinatensystems des Horizonts, auf welcher Almukantarate und welchem Höhenkreise die Sonne sich befindet, und so ergibt die Höhe der Almukantarate die Höhe der Sonne, der Azimut des Höhenkreises aber den Azimut der Sonne [Abb. 1.].

Vom Érdi-Krausz'schen Navicard werden nicht zwei Zeichnung der stereographischen Projektion, sondern nur eine solche angewandt. Die andere Zeichnung wird von zwei Metallarmen ersetzt, welche auf einem im Mittelpunkt der Projektion angebrachten Zapfen befestigt im Kreise umdrehbar sind und im Verhältnis zu einander verdrehbar sind. Die Länge eines Armes ist mit dem Radius gleich, während die Länge des anderen Armes abänderbar ist. Mit Hilfe derselben kann die vorige Aufgabe auf der Zeichnung so gelöst werden, dass sie zunächst als die Projektion des Netzes des äquatorialen Koordinatensystems angesehen wird, der ständige Arm mit dem Anfangsmeridian der Projektion — mit der Weltachse — in Zusammenfall gebracht wird, der auf der Spitze des abänderbaren Armes befindliche Index aber auf den gegebenen Stundenwinkelpunkt des Bahnkreises gegebener Deklination gelegt wird. Auf dieser Weise ist der Index des abänderbaren Armes im Verhältnis zum ständigen Arm in einer solcher Lage, wie die Lage der Sonne auf der Projektion der äquatorialen Koordinaten im Verhältnis zu der Weltachse. Demnach werden die Arme im Verhältnis zueinander fixiert. Sodann wird die Zeichnung als die Projektion des horizontalen Koordinatensystemnetzes erachtet und der ständige Arm an ihr so angebracht, dass er den Winkel der geographischen Breite des gegebenen Standortes mit der Projektion des Horizonts einschliesst. Vom Index des veränderbaren Armes wird dann die Lage der Sonne im Koordinatensystem des Horizonts bezeichnet und die Höhe und Azimut der Sonne kann abgelesen werden (Abb. 2.).

Weniger genaue — aber aus vielen Standpunkten genügend ganaue — Angaben, als jene mit den stereographischen Entwürfen, bzw. dem Navicard erhältlichen, können ermittelt werden, wenn nicht die stereographischen, sondern orthographischen Projektionen benützt werden.

Die orthographische transversale Projektion wird von M. Lóskay [3] in 1905 erschienenen Rechenscheibe angewandt. Das Instrument von Lóskay enthält bloss einziges ausführliches Bild der Projektion, und versieht die Rolle des äquatorialen Koordinatensystemnetzes, wogegen aus dem Netz des horizontalen Koordinatensystems nur die Gradeinteilung des Meridiankreises, und die Azimuteinteilung des Horizonts ausgearbeitet ist. Die Ablesung der Höhe geht in der Weise vor sich, dass die Lage der Sonne parallel mit dem Horizont auf den Meridian projiziert wird; die Höhe des projizierten Punktes über dem Horizont ist mit der Höhe der Sonne gleich. Der Azimut wird durch Schätzung festgestellt.

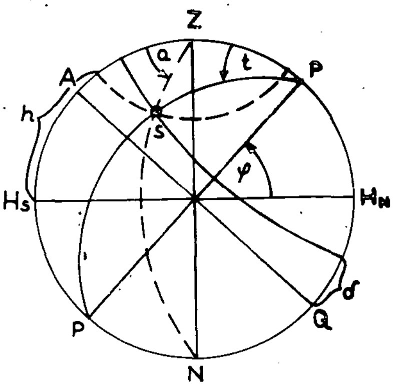

Abb. 1. Auf die Meridianebene stereographisch projiziertes Bild des sphärischen horizontalen und des äquatorialen Koordinatensystems mit den durch die Sonne gehenden, die Koordinaten der Sonne zeigenden Kreisen für einen unter 47° geographischer Breite liegenden Beobachtungsort. — Die äquatorialen Koordinaten der Sonne: 20° Deklination, 30° Stundenwinkel. Der Stundenwinkel kann im Sinne des Uhrzeigers und gegen den Uhrzeiger gemessen werden. Die aus den äquatorialen Koordinaten sich ergebenden horizontalen Koordinaten: 53,6° Höhe über dem Horizont, 52,4° Azimut. Das Azimut kann nach der Richtung von Stundelwinkelsrechnung einen Wert 52,4° oder 360°—52,4° = 307,6° haben. — Z = Zenit, N = = Nadir, H_S = Südpunkt H_N = Nordpunkt von Horizont, P = Pol des Äquatorialsystems, A = der höchste Punkt des Äquators über dem Horizont, Q = der tiefste Punkt des Äquators unter dem Horizont, S = die Sonne, h = Höhe der Sonne über dem Horizont, a = Azimut per Sonne, t = Stundenwinkel der Sonne

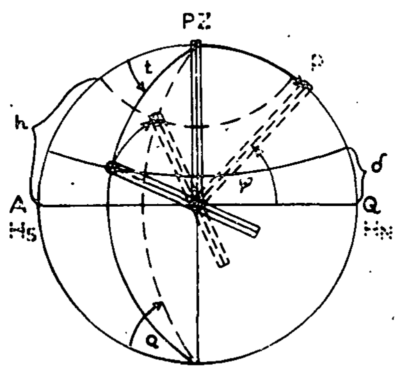

Abb. 2. Prinzip von „Navicard". Die Bestimmung der Höhe der Sonne über dem Horizont und des Azimuts der Sonne mit einer Deklination von 20° und einem Stundenwinkel von 30°. — Bezeichnungen wie im Abb. 1.

Viel bequemer, als mit der Vorrichtung von LÓSKAY, können wir mit der orthographischen transversalen Projektion arbeiten, wenn zwei Exemplare der Projektion benützt werden und eines derselben auf der Oleate verfertigt ist. (Ebenso, wie das im Zusammenhange mit der stereographischen transversalen Projektion besprochen wurde). Wenn die Sonnenbahnen und Stunden — kreise, sowie die Almukantaraten und Höhenkreise mit entsprechender Dichte angebracht sind, so kann nach der geographischen Breite, und die zwei Zeichnungen der Projektion im Verhältnis zueinander entsprechend eingestellt, an den zwei Zeichnungen für jedem Zeitpunkt eines beliebigen Tages des Jahres die Höhe und Azimut der Sonne (sowie an den einzelnen Tagen die Zeit und Lage des Sonnenaufganges und -unterganges, und auch die Dauer der Dämmerung) festgestellt werden (diese können natürlich auch mit stereographischen Projektionen festgestellt werden), ohne die zwei Bilder im Verhältnis zu einander verstellen zu müssen.

Wenn die transversale Projektion nicht in zwei Exemplaren zur Verfüngung steht, kann ein der Navicard' ähnliches Verfahren gewählt werden. In diesem Falle muss nur der Konturkreis und der Anfangsmeridian von der Projektion auf Oleate kopiert werden. Wenn die Oleatenkontur den Konturkreis der Projektion genau deckt und die Oleatenachse die Achse der Projektion deckt, bezeichnen wir auf der Oleate den Punkt gegebener Deklination, welcher über der Projektionsstelle der Sonne eines gegebenen Stundenwinkels liegt, und sodann verdrehen wir die Oleatenachse, der gewünschten geographischen Breite entsprechend. In diesem Falle sind die Koordinaten der neueren Projektionsstelle des Oleatenpunktes mit den horizontalen Koordinaten der Sonne gleich. Mit je einer Oleate kann eine grosse Anzahl von Messungen sowohl auf der stereographischen, als auch an der orthographischen transversalen Projektion ausgeführt werden.

Obwohl die orthographischen Projektion nicht winkeltreu ist, ergeben die obigen Verfahren bezüglich der täglichen virtuellen Bahn der Sonne (und sonstiger Weltkörper) auch auf der orthographischen Projektion genaue Angaben, d. h. die Genauigkeit hängt bloss von der Genauigkeit des Bildes und der Technik der Ablesung ab. Da die orthographische Projektion gegen ihre Kontur das Bild des Koordinatennetzes stark verdichtet und zusammendrängt, ermöglicht sie keine so genaue *Ablesung,* als die stereographische Projektion, welche eben gegen ihre Kontur ein luftigeres Bild ergibt. Mit Hilfe der orthographischen Projektionen kann dagegen der tägliche wirtuelle Gang der Himmelskörper anschaulicher abgebildet werden, als mit den stereographischen Projektionen, da die orthographische Projektion uns den Himmelsglobus so vorstellt, wie wir ihn „von aussen" tatsächlich sehen würden, — aus einer gewissen Entfernung sehen wir nämlich annähernd alles orthographisch.

Die mit Hilfe des Cosinus-Satzes der sphärischen Trigonometrie abgeleitete Satz bezüglich der Höhe der Sonne über dem Horizont

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

kann auch an den orthographischen transversalen Projektionen des Himmelsglobus abgeleitet werden, ja sie ist nicht bloss ableitbar, sondern wird dadurch auch der Zusammenhang evident und anschaulich.

Nehmen wir den Radius der Projektion des Himmelsglobus als die Einheit, so ist die Höhe der Sonne über dem Horizont an der Projektion mit sin h gleich [Abb. 3]. An dem die Höhe der Sonne angebenden Gerade-Abschnitt von der Länge von sin h können zwei Abschnitte, nämlich die Abschnitte x_1 und x_2 unterschieden werden, d.h.

$$\sin h = x_1 + x_2$$

Der Abschnitt x_1 reicht vom Horizont bis zum Durchgangspunkt des Projektionsbildes der Sonnenbahn und der Weltachse (zugleich auch der Stundenkreis von 90°), bis zum Punkte c, und der Abschnitt x_2 reicht durch den Punkt c gehenden Almukantarate bis zur Stelle der Sonne. Auf Grund trigonometrischer Zusammenhänge ist

$\sin\varphi = x_1/\sin\delta$ und so $x_1 = \sin\varphi \sin\delta$, sowie

$\cos\varphi = x_2/\cos t \cos\varphi$ und derart $x_2 = \cos\varphi \cos\delta \cos t$.

D.h. also $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$

Aus der Abbildung 4 ist zugleich auch ersichtlich, dass die Höhe der Sonne über dem Horizont an einer einzigen Zeichnung, ohne den Projektionen des ausführlichen Netzes der Koordinatensysteme, bloss im Wege des Projizierens der *gegebenen* Koordinaten bestimmt werden kann. Dies muss noch auch damit ergänzt werden, dass auf dieser Weise nicht bloss die Sonnenhöhe, sondern auch das Azimut, die Lage des Aufganges und Unterganges, ihre Zeitpunkte, sowie die Dauer der Dämmerung festgestellt werden kann, ja sogar die aus den astronomischen Dreiecken abgeleiteten Formel aus den auf die Meridianebene vertikalen Projektionen aus trigonometrischen Zusammenhängen ebenfalls abgeleitet werden können. (Mit diesem können wir uns im Rahmen dieser Arbeit nicht beschäftigen.)

Die Errechnung des Einfallswinkels der Sonnenstrahlen auf geneigte Ebenen ist bereits eine etwas kompliziertere Aufgabe. Bevor der Behandlung derselben dürfen wir erwähnen, dass im weiteren statt des Ausdrucks „geneigte Ebene" einfach „Hang" oder „Hangebene" gebraucht wird.

Die Höhe der Sonne über der Hangebene kann mit Verwendung der Höhe über dem Horizont und des Azimuts, oder aber auch ohne Anwendung dieser Koordinaten errechnet werden. In folgendem werden wir das Verfahren, wobei die Koordinaten der Höhe und des Azimuts verwendet werden, als das *zenitale*

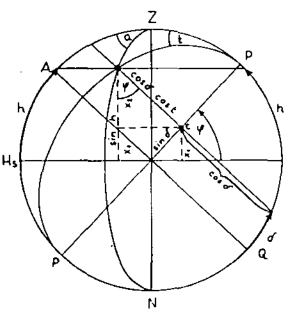

Abb. 3. Veranschaulichung der auf die Höhe der Sonne (oder eines anderen Himmelskörpers) über dem Horizont bezogenen mit Hilfe des Cosinus-Satzes des sphärischen Trigonometrie abgegleiteten Formel

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

auf dem auf die Meridianebene orthographisch projizierten Bild des horizontalen und des äquatorialen Koordinatensystems im Wege der Zusammanhängen von Geometrie in der Ebene. $\varphi = 47°$, $\delta = 20°$, $t = 45°$ *Bezeichnungen wie in Abb. 1.*

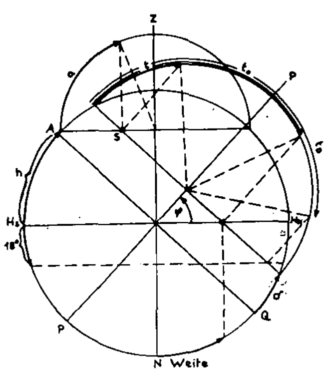

Abb. 4. Entwurf des orthographischen Projizierens auf die Meridianebene zur Festellung von der Höhe und dem Azimut der Sonne, dem Zeitpunkt und dem Ort des Sonnenaufganges und Unterganges, sowie der Dämmerungsdauer ohne der Verwendung von ausführlichen Zeichnungen des Koordinatennetzes. — t_0 *= der Stundenwinkel des Sonnenaufganges, bzw. des Unterganges,* t_D *= der Stundenwinkel des Anfangs bzw. des Endes von astronomischer Dämmerung. Weitere Bezeichnungen wie in vorigen Abbildungen.*

Verfahren bezeichnen [da dort der Zenitpunkt die dritte Ecke (neben dem Hangpol und der Sonne) des als Grundlage des die Höhe der Sonne über dem Hang dienenden astronomischen Dreiecks ist] —, jene Rechnungsmethode aber bei welcher die Angaben der Höhe und des Azimuts nicht verwendet werden, benennen wir aus ähnlicher Erwägung (da dort die Höhe der Sonne über dem Hang ausdr ckende Formel aus einem solchen sphärischen Dreieck abgeleitet wird, dessen dritte Ecke der Pol der Weltachse ist) als das *polare* Verfahren.

Mit der azimutalen Methode, mit Anwendung des sich auf die Seiten des sphärischen Dreiecks ZSP_H beziehenden Cosinus-Satzes [S. Abb. 5] erhalten wir auf einen mit dem Stundenwinkel t bestimmten Zeitpunkt die Gleichung

$$\sin h' = \sin p \sin h + \cos p \cos h \cos a'$$

in welcher ±

h' = die Höhe der Sonne über der Ebene des Hanges,

p = die Höhe des Hangpols über dem Horizont (ergänzender Winkel des Neigungswinkels

a' = die Differenz zwischen dem Azimut des Hangpols und dem Azimut der Sonne.

Die Rechnung mit dieser Formel ist ziemlich unbequem, da die Werte h und a′ als Funktion des Stundenwinkels der Sonne im Laufe des Tages sich in ständiger Änderung befinden. Diese Gleichung kann nicht auf die Formel

$$y = a + bx$$

gebracht werden, und derart im rechtwinkligen Koordinatensystem mit einer Geraden repräsentiert werden. Im Gegensatz zur die Höhe der Sonne über dem Horizont ausdrückenden Gleichung

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

ist es zweckmässig die Gleichung

$$\sin h' = \sin p \sin h + \cos p \cos h \cos a'$$

auch dann auf die zum Rechnen bequemeren Form

$$\sin h' = \frac{\sin p \sin (h + \omega)}{\cos \omega}$$

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{ctg} p \cos a'$$

zu bringen, wenn man auf die Dauer des ganzen Tages die Höhe der Sonne über dem Hang ausrechnen will.

Weitere Nachteile des zenitalen Verfahrens sind die folgenden: weder der höchste Sonnenstand über dem Hang, die Höhe der „*Hang-Kulmination*“, noch der Zeitpunkt dieser Hang-Kulmination kann mit ihm festgestellt werden, aber auch die Zeitpunkte des Aufstieges der Sonne über die Hangebene, des Unterganges unter die Hangebene, also die Zeitpunkte des „*Hang-Sonnenaufganges*“ und des „*Hang-Sonnenunterganges*“ können nicht ermittelt werden.

Wenn man die Höhe der Sonne über der Hangebene ohne die Anwendung der Sonnenhöhe und des Azimuts errechnen will (4, 5), so müssen dazu anstatt der Höhe und des Azimuts zwei andere Koordinaten errechnet werden, undzwar zwei solche Koordinaten, welche an und für sich genommen von keinem solchen Informationswert sind, als die Höhe und Azimut der Sonne. Diese Koordinaten sind aber nicht die Funktionen des Stundenwinkels, die bleiben unverändert nicht nur im Laufe des Tages, sondern auch im Laufe des Jahres, resp. der Jahre, so lange bis sich der Hang selbst ändert. Diese zwei Koordinaten sind die folgenden: die Äquatordistanz des Hangpols, d. h. die Deklination des Hangpols (δ') und der Stundenwinkel des Hangpols (ε).

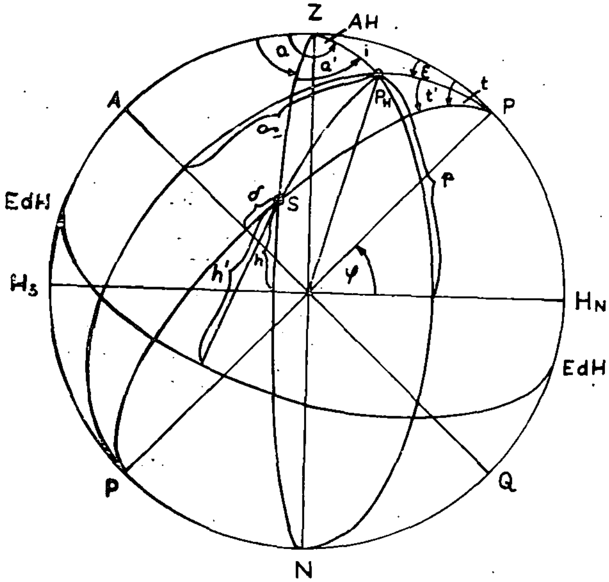

Abb. 5. Auf die Meridianebene orthographisch projiziertes Bild des horizontalen und des äquatorialen Koordinatensystems, sowie des Koordinatensystems der Hangebene und der durch die Sonne läufenden, die Koordinaten der Sonne zeigenden Kreise. Vom Koordinatensystem der Hangebene ist nur sein über dem Horizont liegender Pol dargestellt. — EdH = = die Ebene des Hanges, P_H = der Pol des Hanges, AH = das Azimut des Hangpols, p = die Höhe des Hangpols über dem Horizont, i = der Neigungswinkel des Hanges, a' = = die Differenz zwischen dem Azimut des Hangpols und dem Azimut der Sonne, δ' = die Deklination des Hangpols, ε = der Stundenwinkel des Hangpols, t' = die Differenz zwischen dem Stundenwinkel des Hangpols und dem Stundenwinkel der Sonne, h' = die Höhe der Sonne über der Hangebene.

Aus dem sphärischen Dreieck $ZP_H P$ erhalt man mit Anwendung des auf die Seiten bezüglichen Cosinus-Satzes:

$$\sin \delta' = \sin \varphi \sin p - \cos \varphi \cos p \cos AH$$

in welcher Formel AH = der Azimut des Hangpols.

Den Stundenwinkel des Hangpols ergibt mit Anwendung des Cosinus-Satzes die Formel

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos p - \sin \varphi \sin \delta'}{\cos \varphi \cos \delta'}$$

und mit Anwendung des Sinus-Satzes:

$$\sin \varepsilon = \frac{\cos p \sin AH}{\cos \delta'}$$

In der Kenntnis con δ' und ε und aus dem Dreieck $P_H SP$ mit Anwendung des Cosinus-Satzes erhalten wir:

$$\sin h' = \sin \delta' \sin \delta + \cos \delta' \cos \delta \cos t'$$

in welcher $t' = t - \varepsilon$ oder $= \varepsilon - t$, d. h. also die Differenz des Stundenwinkels der Sonne und des Stundenwinkels des Hangpols.

Aus der obigen Gleichung folgt, dass die Hand-Kulmination zum Zeiptpunkt $t' = 0°$, d.i. $t = \varepsilon$ stattfindet, die Sonne sich zum Zeitpunkt $t = \varepsilon$ in der grössten Höhe über der Hangebene befindet, und ihre Höhe dann $90° - \delta' + \delta$ ist. Der Hang-Sonnenaufgang und Untergang aber wird durch die Gleichung $\cos (180° - t_0') = \mathrm{tg}\, \delta' \, \mathrm{tg}\, \delta$ ausgedrückt. In Abhängigkeit von der Lage des Hanges kann natürlich der Hang-Sonnenaufgang dem realen Sonnenaufgang zuvorkommen und in diesen Fällen ist der reale, wirkliche Sonnenaufgang zugleich auch der Hang-Sonnenaufgang, und der Hang-Sonnenuntergang kann später stattfinden als der wirkliche Sonnenuntergang und in diesem Fall ist der wirkliche Sonnenuntergang zugleich auch der Hang-Sonnenuntergang. Wenn aber die Hangpolsdeklination und die Sonnendeklination die Bedingung $\delta' + \delta \geqq 90°$ erfüllen, so wird der tägliche Sonnenbahn über der Hangebene cirkumpolar, wird aber eine tatsächliche Hang-Cirkumpolarität der Sonne nur unter Umständen einer gleichzeitig über dem Horizont sich ergebenden Cirkumpolarität erscheinen, d.h. wenn sich zugleich auch die Bedingung $\varphi + \delta \geqq 90°$ erüfllt ist. Wenn sich aber die Bedingung $\delta' - \delta \geqq 90°$ erfüllt wird, so wird der Sonnenbahn unter der Hangebene cirkumpolar, d.h. die Sonne erscheint über der Hangebene nicht, bleibt der Hang den ganzen Tag über im Selbstschatten.

Das polare Verfahren weist also im Gegensatz zum zenitalen Verfahren den Vorteil auf, dass mit dem polaren die Höhe und Zeitpunkt der Hangkulmination, sowie die Zeitpunkte des Hang-Sonnenaufganges und Unterganges bestimmt werden können. Der andere Vorteil dieses Verfahrens ist ihre ökonomischere Rechnungstechnik. Obwohl man bei Arbeiten, die auf die Sonnenbestrahlung der Hänge gerichtet sind, im allgemeinen auch die Angaben der Höhe über dem Horizont und des Azimuts der Sonne benötigt und diese mit dem polaren Verfahren nicht erhält, ist es doch zweckmässiger die polare Methode anzuwenden und die horizontalen Koordinate der Sonne separat auszurechnen, als das zenitale Verfahren anzuwenden.

Der rechnungstechnische Vorteil der polaren Methode kommt besonders darin zum Vorschein, dass die Gleichung

$$\sin h' = \sin \delta' \sin \delta + \cos \delta' \cos \delta \cos t'$$

der die Sonnenhöhe über dem Horizont ausdrückenden Gleichung ähnlich ebenfalls als $y = a + bx$ behandelt werden kann und so kann die während der Dauer eines Tages vor sich gehende Höhenänderung der Sonne im rechtwinkligen Koordinatensystem ebenfalls mit einer Geraden abgebildet werden. Hier gehört zur Abszisse $\cos 0° = +1$ der Ordinatenwert $\sin (90° - \delta' + \delta)$ oder $\cos (\delta' - \delta)$, zur Abszisse $\cos 180° = -1$ aber der Ordinatenwert $\sin (90° - \delta' - \delta)$ oder $\cos (\delta' - \delta)$.

Die Angaben der Sonnenhöhen für die Hangebene ohne Errechnungen hat L. TAKÁCS (1951) ein Nomogramm-Verfahren ausgearbeitet (6).

Das Verfahren beruht auf den stereographischen Projektionen des Himmelskugels auf die Horizontebene. Aus den angewandten Projektionen gehört die Projektion des Netzes des horizontalen Koordinatensystems in die Gruppe der normalen (mit anderer Benennung: polaren) Azimutalprojektionen, wogegen die Projektion der im äquatorialen Koordinatensystem abgebildeten Sonnenbahnen und die dritte Projektion, jene der Almukantaraten der Hangebene, in die Gruppe der schiefachsigen Azimutalprojektionen (mit anderen Benennung: der Horizontalprojektionen) gehört. Die Projektionen des horizontalen Koordinatensystems und jene der Sonnenbahnen werden mit gemeinsamer Kontur aufeinander hergestellt. Auf der Projektion der Sonnenbahnen muss die Stelle der Sonne gegebener Deklination und Stundenwinkels ermittelt werden, und auf der Projektion des horizontalen Koordinantensystems kann die Höhe und das Azimut der Sonne abgelesen werden. Bei dem hier behandelten graphischen Verfahren der Bestimmung der Neigung der Sonnenstrahlen zum Hang sind die Werte der Höhe und des Azimuts eigentlich nicht unbedingt nötig, mithin auch die Almukantaraten nicht, dagegen wird aber die Azimuteinteilung des Horizontkreises benötigt. Die zwei Projektionsbilder gemeinsamer Kontur, ergeben auf eine gegebene geographische Breiten, aber *nur auf eine* geographische Breite bezüglich, und auf jeden beliebigen Zeitpunkt und Tag des Jahres die Lage der Sonne am Himmelskugel (sowie auch die Zeit und Lage des Sonnenaufganges und -unterganges). Die zum Verfahren nötige andere Zeichnung, die Projektion der Almukantaraten der Hangebene muss in mit den vorigen gleichem Massstabe auf Oleate verfertigt werden. Dieses ist das auf die Horizontebene stereographisch projizierte Bild der

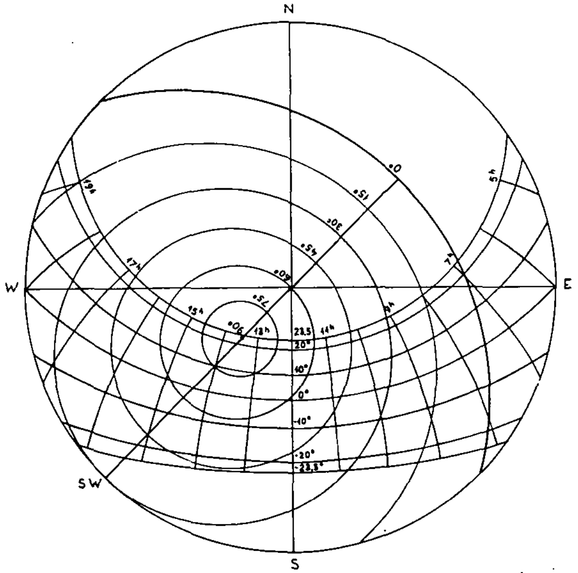

Abb. 6. *Das Verfahren von L. Takács. Die Zeichnung enthält das von dem Nadir liegenden Augenpunkt aus auf die Horizontebene von einem unter der 47,5° geographischer Breite liegenden Ort projiziertes Bild der täglichen Sonnenbahnen verschiedener Deklinationen und der zwischen den Sonnenbahnen liegenden Stücke von Stundenkreisen, sowie das in gleicher Weise projiziertes Bild des Halbkreises von Hangebene mit 30° Neigungswinkel und mit einem nach SW exponierter Neigung, und der über dem Horizont liegenden Kreise, bzw. Teilbogen von den zur Hangebene parallel läufenden Kreisen, den sogenannten „Hang-Almukantaraten". Wenn die durch die Deklination und den Stundenwinkel bestimmte Lage der Sonne zwischen den Sonnenbahnen und Stundenkreisen festgestellt wurde, so können wir ihr Lage auch zwischen den Hang-Almukantaraten feststellen, d. h. ihre Höhe über der Hangebene ablesen. Wenn die Zeichnung auch die Projektionsbilder von Almukantaraten über dem Horizont und auch die Bilder von Höhenkreisen enthält, so können auch die Sonnenhöhen über dem Horizont und die Azimuten abgelesen werden, wie ist es so in originaler Zeichnung von Takács.*

Schnitt der Ebene eines Hanges mit der Himmelskugel — eines sphärischen Hauptkreises — und der mit ihm parallelen Kugelkreise (der Hang-Almukantaraten), sowie des Pols des Hanges und der den Neigungswinkel der Hangebene ergebenden, über den Hangpol durchgehenden Ebene. In Abhängigkeit davon, mit welchem Azimut das Projektionsbild des Hangpols über der Projektion des Horizonts eingestellt wird, kann sich die Projektion der Hang-Almukantaraten sich auf Hänge verschiedener Neigungsrichtung beziehen. Nachdem das Projektionsbild der Hang-Almukantarate nach der Neigungsrichtung des gegebenen Hanges eingestellt wurde [Abb. 6], muss festgestellt werden, wo sich der Punkt zwischen den Hang-Almukantaraten befindet, welcher auf der Grundkarte die Sonne bezeichnet. Die Lage dieses Punktes in Verhältnis zu den Hang-Almukantaraten ergibt die Höhe der Sonne über der Ebene des betreffenden Hanges, d.h., die Neigung der Sonnenstrahlen zum Hang. Die Ablesung kann mit einem 1° nicht erreichenden Fehler ausgeführt werden.

Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass es mit einer einmaligen Einstellung der zwei Projektionszeichnungen die Neigung der Sonnenstrahlen zum Hang auf eine gegebene geographische Breite und auf einen Hang, gegebenen Neigungswinkels und Neigungsrichtung bezogen, auf einen beliebigen Zeitpunkt eines beliebigen Tages ergibt. Weiters: wenn die Projektion der Almukantaraten der Hangebene auf einen Hang, bestimmten Neigungswinkels, einmal verfertigt wurde, dieses Bild alle Hänge von einer beliebigen Neigungsrichtung angewendet werden kann. Ein Nachteil des Verfahrens ist dagegen, dass die Grundkarte nur auf eine bestimmte geographische Breite, die Oleatenzeichnung aber nur auf einen Hang gegebenen Neigungswinkels bezogen verwendet werden kann. Ausserdem ist die Herstellung (im entsprechenden Massstabe der zu diesem Verfahren benützten Art der stereographischen Projektionen von schräger Achse), mit der Anwendung einfacherer Hilfsmittel ziemlich schwierig. Deshalb ist die Anwendung dieser Methode nur dann zweckdienlich, wenn man auf eine gegebene geographische Breite bezogen viele, und auf verschiedene Tage des Jahres, auf verschiedene Zeitpunkte bezogene Angaben benötigt. Wenn man bloss einige Angaben ermitteln will, kommt man auf rechnerischem Wege viel schneller zum Ziel (wobei man auch genauere Resultate erhält).

In der vorliegenden Arbeit möchten wir — ausser der Beschreibung der bisher angewendeten Methoden — bloss darauf hinweisen, dass zur Feststellung des Einfallswinkels den auf den Hang fallenden Sonnenstrahlen als Nomogramme nicht nur die auf die Horizontebene projizierten Koordinatennetze, sondern auch die auf die Meridianebene projizierten Koordinatennetze, die bereits oben behandelten transversalen Projektionen benützt werden können. Zum Beweis dieser Feststellung kann aus der Erwägung ausgegangen werden, wonach wenn die Neigung der auf eine horizontale Ebene fallenden Sonnenstrahlen von der Funktion

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t$$

bestimmt wird, und wir diesen Wert auch mit Hilfe der transversalen Projektionen ermitteln können, dann muss diese Methode auch zu der Bestimmung der Neigung der Sonnenstrahlen zu dem Hang geeignet sein.

Nach dem zenitalen Verfahren erhalten wir die höhe der Sonne über der Hangebene aus der Gleichung:

$$\sin h' = \sin p \sin h + \cos p \cos h \cos a'$$

Wenn wir unsere zwei Zeichnungen der transversalen Projektion — womit wir bereits auch die Neigung der auf die horizontale Ebene fallenden Sonnenstrahlen bestimmten, ihre Konturen miteinander in Abdekkung gebracht, so einstellen, dass ihre Grundebenen und Anfangsmeridiane miteinander den Winkel des in Frage stehenden Hanges einschliessen, so können wir dies so auffassen, dass eine unserer Zeichnungen die Projektion des Koordinatennetzes des Horizonts, die andere aber die Projektion des Koordinatennetzes der Hangebene ist: *ihre gemeinsame Kontur aber jener Hauptkreis des Himmelsglobus ist, in dessen Ebene der Neigungswinkel des Hanges vorzufinden ist, d.h. also der über dem Hangpol durchgehende Höhenkreis. Die gemeinsame Bildebene unserer transversalen Projektionen ist also in diesem Falle nicht die über dem Beobachtungsort durchgehende Ebene des Meridians, wie im Falle der Bestimmung der Koordinaten der Sonne bezüglich einer horizontalen Ebene, sondern eine Ebene die sowohl auf die Ebene des Horizonts, als auch auf die Ebene des Hanges gleicherweise vertikal ist, sie ist also die Ebene des durch den Hangpol gehenden Höhenkreises.*

In den Koordinatensystemen des Horizonts und der Hangebene schliesst der durch die Sonne gehende Höhenkreis mit der Ebene des durch den Hangpol gehenden Höhenkreises den Winkel a' ein, welcher mit dem Winkel der Differenz des Azimuts des Hangpols und des Azimuts der Sonne gleich ist. *Der Winkel a' nimmt in der Gesamtheit der Koordinatensysteme des Horizonts und der Hangebene eine solche Lage ein, wie der Stundenwinkel in dem Ensemble der Koordinatensysteme des Horizonts und des Äquators* (Abb. 7). Wenn p gleich φ, h gleich δ und a' gleich t ist, dann ist $h' = h$. So fallen z.B. auf einen Hang gegebener Neigungsrichtung und mit einem Neigungswinkel von 20° die Strahlen der Sonne von einer Höhe von 40° über dem Horizont und von einem Azimut, welcher vom Azimut des Hangpols mit 60° abweicht, in einem solchen Winkel, welche Höhe über dem Horizont ein Himmelskörper auf dem Beobachtungsorte von 70° geographischer Breite, von einer Deklination von 40° und einem Stundenwinkel von 60° besitzt.

Im Besitze von zwei Entwürfen der orthographischen oder stereographischen Projektionen transversalen Types kann also die Neigung der Sonnenstrahlen zum Hang auf einen jeden beliebigen geographischen Breite liegenden

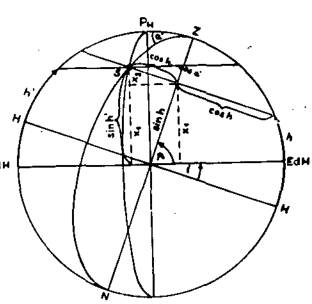

Abb. 7. *Veranschaulichung der auf die Höhe der Sonne über der Hangebene bezogenen mit Hilfe des Cosinus-Satzes der sphärischen Trigonometrie abgegleiteten Formel*

$$\sin h' = \sin p \sin h + \cos p \cos h \cos a'$$

auf dem auf die Ebene der Neigungsrichtung von Hang (die Ebene der durch den Hangpol gehenden Höhenkreises) orthographisch projiziertes Bild von sphärischen Koordinatensystemen des Horizonts und der Hangebene im Wege der Zusammenhängen von Geometrie in der Ebene. — Bezeichnungen wie in Abb. 5 und in vorigen Abbildungen. — $p = 70°$, $i = 20°$, $h = 40°$, $a' = 60°$.

Hang beliebigen Neigungswinkels und Neigungsrichtung, für einen beliebigen Zeitpunkt schnell bestimmt werden. Zu dieser Bestimmung müssen zuerst die Höhe der Sonne über dem Horizont, sowie der Azimut bestimmt werden. Wenn also die geographische Breite, die Sonnendeklination und der Stundenwinkel, sowie die Neigungsrichtung und der Neigungswinkel des Hanges gegeben sind, kann die Neigung der Sonnenstrahlen zum Hang mit der zweimaligen Einstellung der zwei Zeichnungen ermittelt werden. Die Genauigkeit der Ablesung ist zumindest eine solche, wie sie mit Hilfe der auf die Ebene des Horizonts projizierten Zeichnungen erreichbar ist.

Die mit dem Navicard erreichbare Genauigkeit ist auch bereits grösser als die in den auf dem Hang bezüglichen Angaben erreichbare Genauigkeit.

An Mangel der nötigen Projektionen kann fallweise die Neigung der Sonnenstrahlen zu dem Hang auch im Wege von Konstruktion festgestellt werden. An der Abbildung 8 ist ersichtlich, welche Neigung die Strahlen der Sonne (in der auf Abb. 4 ersichtlichen Lage) zu einem Hang vom Neigungswinkel 20° und Neigungsrichtung 315° (die Azimutgrade von der südlichen Richtung gerechnet), also nord-östlicher Exposition einnehmen. Die Abbildung 8 schliesst auch die entsprechenden Teile der Abbildung 4 in sich ein, und zeigt also, wie man zunächst die Höhe der Sonne über dem Horizont und sein Azimut, sodann aber mit weiterer Konstruktion seine Höhe über dem Hang feststellen kann.

Wenn bezüglich einer geographischen Breite und eines Hanges aus den verschiedenen Zeitpunkten des Jahres eine grössere Anzahl von Angaben benötigt ist, dann ist es zweckmässig das polare Verfahren anzuwenden, aber — wie Abb. 8 zeigt — auch mit der zenitalen Methode kann gearbeitet werden, wenn wir ausser den zwei transversalen Entwürfen auch ein drittes Projektionsbild (womöglich mit farbigen Linien) verfertigen. Bei diesem müssen aber nur ausser seine Kontur bloss das Bild seines Anfangshöhenkreises, sowie seine Almukantaraten konstruiert werden. Der Konturkreis dieser dritten Zeichnung muss mit der gemeinsamen Kontur des aus den Projektionsbildern des horizontalen und äquatorialen Koordinatennetzes zusammengestellten Nomogrammes in Abdeckung gebracht werden, und muss das Bild der Hangebene zum Bild des Horizonts nach dem Neigungswinkel des in Rede stehenden Hanges eingestellt werden. Nachdem die Höhe und der Azimut der Sonne festgestellt wurden, können wir die Lage des Schnittpunkts des Almu-

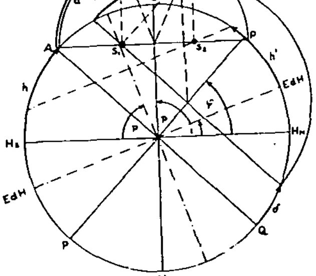

Abb. 8. *Graphische Berechnung der horizontalen Koordinaten der Sonne aus ihren äquatorialen Koordinaten, und weitere Berechnung in Kenntnis der horizontalen Koordinaten der Sonnenhöhe über einer Hangebene gegebener Neigungsrichtung und Neigungswinkel im Wege des orthographischen Projizierens auf die Meridianebene bzw. auf die Ebene des durch den Hangpol läufenden Höhenkreises. Die Bildebene wird bei der Berechnung der horizontalen Koordinaten als die Meridianebene, und dann bei der Bestimmung der Sonnenhöhe über der Hangebene als die Ebene des Höhenkreises von Neigungsrichtung des Hanges betrachtet.* S_1 *= die Sonne im Horizontalkoordinatensystem,* S_2 *= die Sonne im Koordinatensystem der Hangebene. Weitere Bezeichnungen wie in vorigen Abbildungen.*

kantarats der Sonne und des Höhenkreises vom errechneten Azimut a' zwischen den Hang-Almukantaraten bewerten.

Nach der Ausführung des polaren Verfahrens müssen zuerst die Deklination und der Studenwinkel des Poles bestimmt werden. Bei der Bestimmung dieser Werte soll eine der Zeichnungen die Projektion des äquatorialen Koordinatennetzes, die andere aber dieselbe des horizontalen Netzes darstellen. Die Zeichnungen müssen mit gleichen Konturen in solcher Weise übereinander gelegt werden, dass das Projektionsbild der Achse des horizontalen Koordinatennetzes den Winkel der fraglichen geographischen Breite mit dem Bild der Projektion des Aquators einschliesst, wie geschieht es bei der Bestimmung der horizontalen Koordinaten der Sonne. Da wird die Lage des Hangpols nach seiner Höhe über dem Horizont und seinem Azimut im Projektionsbild des horizontalen Koordinatennetzes festgestellt [Abb. 9], und dann können wir die Deklination und den Studenwinkel des Hangpols (δ' und ε) auf dem Entwurf des äquatorialen Koordinatennetzes ablesen. In Kenntnis des Werts ε wird t' nach dem Zusammenhang $t' = t - \varepsilon$ (bzw. $t' = \varepsilon - t$) bestimmt.

Nachdem t' und δ' gekannt sind, wird eine der Zeichnungen auch weiter als ein Projektionsbild des äquatorialen Koordinatennetzes betrachtet, die andere aber ein solches der Hangebene dargestellt. Die zwei Zeichnungen müssen mit gleichen Konturen zueinander so eingestellt werden, dass das Bild der Weltachse und das der Hangebene miteinander den Winkel δ' einschliessen. Die gemeinsame Kontur der zwei Projektionsbilder ist als der über den Hangpol durchgehende Stundenkreis erachtet (von dem der Winkel t' gemessen wird). Die Lage der Sonne auf dem Bild des äquatorialen Koordinatennetzes wird nach den Koordinaten t' und δ (Sonnendeklination!) festgestellt und die Höhe der Sonne über der Hangebene (h') auf dem Projektionsbild des Koordinatennetzes der Hangebene abgelesen [Abb. 10].

Da δ' eine konstante Grösse ist, und die Werte von t' und t von-

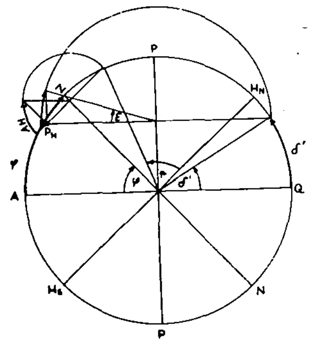

Abb. 9. *Erste Stufe des nomographischen Verfahrens zur Berechnung der Sonnenhöhe über der Hangebene ohne der Verwendung der Angaben von Sonnenhöhe überm Horizont und Azimut. Diese Stufe enthält die Bestimmung der Deklination und des Stundenwinkels des Hangpols (δ' und ε). — In der Zeichnung des Horizontalkoordinatensystems wird die Lage des Hangpols nach seiner Höhe über dem Horizont und seinem Azimut festgestellt, und dann werden δ' und ε auf dem Bild des äquatorialen Koordinatensystems abgelesen können. Auf der Abbildung sind auch die Lage des Hasdngpols ausdrückenden Konstruktionslinien dargestellt, es fehlen dagegen die Projektionsbilder der Koordinatennetzen, wie auch in den anderen Abbildungen. Da die Böschungswinkel in der Natur im allgemeinen klein, und dementsprechend die Hangpolhöhen überm Horizont gross sind, liegt der Hangpol in einer orthographischen transversalen Azimutalprojektion in einer solchen Nähe der Kontur, das die genaue Bestimmung erschwert. Deshalb zweckmässiger ist zum Nomogramm die stereographische Projektionen anzuwenden. In vorliegenden Abbildungen ist die orthographische Projizierung nur der besseren Veranschaulichung halber angewandt. — Die Bezeichnungen wie in den vorigen Abbildungen.*

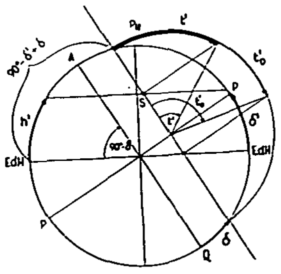

Abb. 10. *Die zweite Stufe des nomographischen Verfahrens zur Berechnung der Sonnenhöhe über der Hangebene ohne Verwendung der Angaben von Sonnenhöhe überm Horizont und Azimut. Die Bildebene ist die Ebene des durch den Hangpol läufenden Stundenkreises. Die Weltachse bildet den Winkel der Deklination von Hangpol (δ') mit der Hangebene. Die Lage der Sonne wird in der Zeichnung des Äquatorsystems nach seiner Deklination und seinem von dem Stundenkreis des Hangpols gezählten Stundenwinkel (t') festgestellt, dann wird die Höhe der Sonne über der Hangebene in der Zeichnung des Systems der Hangebene bestimmt. Mit Hilfe des Verfahrens können wir auch den höchsten Sonnenstand über der Hangebene, die „Hang-Kulminationshöhe", sowie von dem Zeitpunkt der Hang-Kulmination ($t = \varepsilon$) gezählten Zeitpunkt von „Hang-Sonnenaufgang" bzw. „Hang-Sonnenuntergang" (t_0') feststellen. — Da δ' und ε konstante Grösse sind, demzufolge wenn die zwei, vollständiges Koordinatennetz enthaltenden Zeichnungen zueinander nach δ' eingestellt wurden, so können wir die Grösse von h' für alle Zeitpunkte, die Grösse von t' für jede Tage des Jahres ablesen.*

einander nur mit der konstante Grösse ε unterschieden sind, demzufolge wenn die zwei Zeichnungen zueinander nach δ' eingestellt wurden, so können wir die Grössen von h' für beliebigen Zeitpunkt des Jahres ablesen.

Es ist nicht nötig die Höhe der Hang-Kulmination auf dem Nomogramm ablesen, da dieser Wert durch die einfache Formel $h' = 90° - \delta' + \delta$ dargeboten ist. Die Hang-Kulmination trifft — wie früher gehandelt — zum Zeipunkt ausgedrückt mit dem Studenwinkel t $= \varepsilon$ ein. Zu jener Zeit befindet sich die Sonne über den Hangpol durchgehende Stundenkreis ($t' = 0°$). Der Zeipunkt des Hang-Sonnenaufgangs und Untergangs — wie ebenfalls gehandelt — ist durch die Gleichung $\cos(180° - t'_0) = \operatorname{tg}\delta' \operatorname{tg}\delta$ ausgedrückt, können wir aber diese Grösse auch mit Hilfe des Nomogrammes bekommen, stellt diese nämlich der Winkel t' des Schnittpunkts der Projektionsbilder des täglichen Sonnenbahns und des Horizonts dar.

Falls transversale Projektionen angewandt werden, ist es nicht nötig zu jeder geographischen Breite und zu jedem Neigungswinkel separate Projektionen zu konstruieren, sondern kann die Bahn der Sonne in Beziehung zur Hangebene im Laufe des ganzen Jahres mit denselben Projektionen auf eine jede geographische Breite und Hänge beliebigen Neigungswinkels und Neigungsrichtung verfolgt werden.

LITERATUR

1. Schütte, K.: Ein einfaches graphisches Verfahren zur Bestimmung von Höhe und der Azimut der Sonne. — Meteorol. Z. (Braunschweig) *48*, 314—319, 1931.
2. Érdi-Krausz, Gy.: „Navicard" Csillagászati és navigációs számítótábla. (Eine Rechentafel für Astronomie und Navigation.) — TIT Uránia Ismeretterjesztő Eszközöket Előállító és Terjesztő Intézet, Budapest.
3. Lóskay, M.; A Nap és a csillagok járása a Föld tetszőleges helyén. (Gang der Sonne und der Gestirne für beliebigen Ort der Erde.) — Magyar Földrajzi Intézet, Budapest 1905.
4. Schütte, K.: Die Berechnung der Sonnenhöhen für beliebig geneigte Ebenen. — Ann. d. Hydr. *71*, 325—328, 1943.
5. Gloyne, R. W.: A method for calculating the angle of incidence of the direct beam of the sun on a plane surface of any slope and aspect. — Agr. Meteorol. *2*, 401—410, 1965.
6. Takács, L.: A napsugár hajlásának grafikus meghatározása bármely időpontban. (Eine graphische Bestimmung der Neigung der Sonnenstrahlen für beliebigen Zeitpunkt.) — Az Országos Meteorológiai Intézet hivatalos kiadványai, XIV. kötet, 198—220, Budapest 1951.