EGY HÁROMSZÖGSZERKESZTÉSI PROBLÉMA

Írta: BERKES JENŐ

EUKLIDES óta közismert, hogy a háromszög három független alkotórészből körző vonalzóval a legtöbb esetben szerkeszthető. Aránylag kevés eset ismeretes, mikor a három adatból, amely meghatározza a háromszöget, nem végezhető el a szerkesztés. Például a három szögfelezőből nem szerkeszthető háromszög.

SZŐKEFALVI NAGY GYULA két nevezetes tétellel gyarapította a nem szerkeszthető esetek számát, amennyiben bebizonyította [2]:

A háromszög körző vonalzóval nem szerkeszthető, ha adva vannak a körülírható kör középpontjának az oldalaktól való távolságai vagy a beírható kör középpontjának a csúcsoktól való távolságai. (Beírható kör helyett bármely külső érintő kör is szerepelhet.)

Jelen dolgozatban annak kimutatása szerepel, hogy SZŐKEFALVI NAGY GYULA módszerével még egy eset elintézhető, amennyiben bebizonyítjuk a következőt:

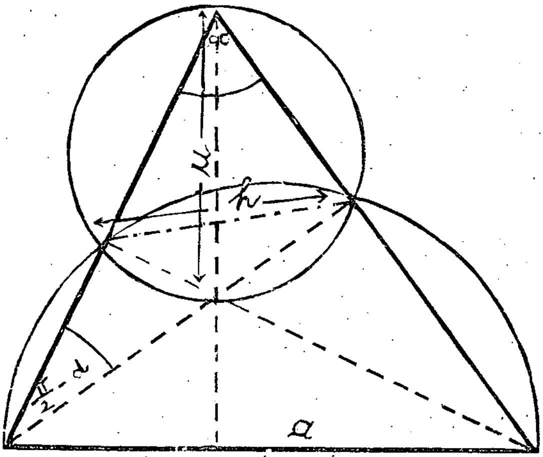
A háromszög körző vonalzóval nem szerkeszthető a magasságvonalaknak a magassági ponttól a csúcsig mért távolságaiből.

Bizonyítás: Alapul vesszük a háromszög szögei között fennálló

$$A)\qquad 1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$$
$$(\alpha+\beta+\gamma=\pi)$$

összefüggést.

Másrészt, egyelőre csak hegyesszögű háromszögre az ábra szerint:



$$\frac{h}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{h}{\cos\alpha}=a$$

$$\frac{h}{\sin\alpha}=u$$

$$\frac{u}{a} = cotg\, \alpha$$

Tehát $$u = a.cotg\, \alpha = a. \frac{cos\, \alpha}{sin\, \alpha} = 2R.cos\, \alpha$$

$$cos\, \alpha = \frac{u}{2R}$$

Amennyiben u, v, w jelöli a tételben szereplő magasságdarabokat, a cosinusok értékét *A)*-ba beírva, kapjuk:

B) $$4R^3 - R(u^2 + v^2 + w^2) - uvw = 0$$

Ez R-ben harmadfokú egyenlet. Mindenesetre, ha a háromszög szerkeszthető, akkor R is. Fordítva pedig, ha R szerkeszthető, akkor $u = 2R.\ cos\, \alpha$ alapján $cos\, \alpha$ is szerkeszthető és nyilván a probléma megoldódott. Továbbiakban tehát a *B)* egyenlet vizsgálandó, mert R szerkeszthetőségének kérdése ekvivalens a háromszög szerkeszthetőségével.

Az egyenlet diszkriminánsa:

$$\frac{u^2v^2w^2}{64} - \frac{(u^2 + v^2 + w^2)^3}{64.27} \leqq 0$$

mert $$\sqrt[3]{u^2v^2w^2} \leqq \frac{u^2 + v^2 + w^2}{3}$$

triválisan teljesül minden u, v, w értékre. Casus irreducibilisről lévén szó három valós gyök van, Descartes jelváltás szabálya szerint azonban, mivel a jelváltások száma egy, egy pozitív gyök van mindig, tehát a háromszög egyértelműen van meghatározva.

Egyenletünk általában irreducibilis, azaz nincsen gyöke együtthatóinak négyzetgyökökkel bővített számtestében [3]. Ha pl.

$$u = 2, \quad v = 4, \quad w = 6 \text{ akkor:}$$

$$R^3 - 14R - 12 = 0 \text{ irreducibilis.}$$

Nyilvánvaló a reducibilitás és ezzel együtt a szerkeszthetőség a következő esetekben: $w = 0$ (derékszögű háromszög) és $u = v = w$ (egyenlőoldalú háromszög).

Az egész kérdés tompaszögű háromszögre lényegében változatlanul tárgyalható, de a tompaszöggel szembefekvő magasságdarabra:

$$u = -.a, cotg\, \alpha$$

$$cos\, \alpha = -\frac{u}{2R}$$

és az előbbi pozitív gyökök számára vonatkozó megállapítás nem lesz ugyan igaz, de az egyenlet irreducibilitása változatlan.

Felírható olyan egyenlet is, amelyben az egyik oldal az ismeretlen. A cosinustétel és az $u = a,\ cotg\, \alpha$ felhasználásával kapjuk:

$$x^6 - x^4 (2v^2 + 2w^2 - u^2) + x^2[(v^2 + w^2)^2 - 2u^2(v^2 + w^2)] + u^2 (v^2 - w^2) = 0$$

ahol x jelenti az u-val szembenfekvő oldalt.

$$x^2 = y; \quad u = 1; \quad v^2 + u^2 = r; \; v^2 - u^2 = s \quad \text{az}$$

$$y^3 - y^2(2r - 1) + y\,r\,(r - 2) + s^2 = 0$$

egyenletet kapjuk, melynek irreducibilitása szintén világos, de ebből még az is kiderül, hogy $v = w$-re (egyenlőszárú háromszög) is reducibilis, tehát a szerkesztés elvégezhető.

Korollárium: *A háromszög nem szerkeszthető körző vonalzóval akkor sem, ha a magassági pontnak az oldalaktól való távolságai adottak.*

Ezek a darabok ugyanis éppen a talpponti háromszögbe írható kör középpontjának a csúcsoktól való távolságai, amely darabokból SZŐKEFALVI NAGY GYULA előrebocsátott tétele szerint nem szerkeszthető háromszög. Az eredeti háromszög és a talpponti háromszög szerkeszthetőségének kérdése nyílván ekvivalens [1]. Sőt a talpponti háromszög külső érintőkörére gondolva világos az újabb

korollárium: *A háromszög nem szerkeszthető körző vonalzóval, ha adva van két oldalnak a csúcstól a magasságvonal talppontjáig terjedő része és az ugyanazon csúcshoz tartozó magasságvonal.*

Irodalom

[1] Berkes Jenő: A talpponti háromszögről, Középisk. Mat. Lapok (1956), 3. p. 65.

[2] Gyula v. Sz. Nagy: Zwei nichtkonstruirbare Aufgaben des Dreiecks, Elemente der Math. Bd. VI, (1952), p. 80.

[3] Szőkefalvi Nagy Gyula: A geometriai szerkesztések elmélete, (Kolozsvár), (1943), pp. 87.

NICHTKONSTRUIERBARE AUFGABEN DES DREIECKS

Von J. BERKES

Es werden die folgende Sätze bewiesen: Die Konstruktion des Dreiecks mit Lineal und Zirkel aus den Abständen des Hőhenpunktes von den Ecken des Dreiecks oder aus den Abständen des Höhenpunktes von den Seiten des Dreiecks ist im allgemeinen nicht möglich.