A KÚPSZELETEN LEVŐ INVOLUCIÓ

Írta: LERNER KÁROLY

A kúpszeleten levő involúció részletes tárgyalása előtt szóljunk a kúpszeleten levő *projektiv pontsorokról.* Ha a kúpszeleten levő P_1 P_2 P_3 ... pontsort a kúpszelet egy tetszőleges P pontjából proiciáljuk, akkor az így keletkezett P tartójú sugársor projektiv ill. perspektiv a kúpszeleten levő P_1 P_2 P_3 ... pontsorral.

Két ugyanazon a kúpszeleten levő P_1 P_2 P_3 ... és P_1' P_2' P_3' ... pontsort projektivnak mondunk, ha ezen pontsoroknak a kúpszelet bármely két pontjából A-ból és B-ből való projekciója: $A(P_i)$ és $B(P_i')$ projektivek, amit STAUDT szerint így jelölünk: $A(P_i) \overline{\wedge} B(P'_i)$
$i = 123...$

Ezen projekciók A ill. B tartójú sugársorok. Az, hogy a kúpszelet melyik pontja A és melyik B, közömbös, mert akár A akár A'-ből proiciáljuk P_i pontokat a proiciáló sugársorok mindig projektivek $A\ (P_i) \overline{\wedge} B\ (P'_i)$ ugyanúgy $B(P_i) \overline{\wedge} B'(P_i)$ és így $A\ (P_i) \overline{\wedge} B(P_i)$ függetlenül attól, hogy A és B a kúpszeletnek melyik pontja.

A kúpszeleten levő projektivitást három pontpár határozza meg. Ugyanis a kúpszeleten levő projektív pontsorok homolog (megfelelő) pontjait egy-egy sugársor proiciálja. Ezek a sugársorok egymással projektivek. Három homolog sugárpár azonban meghatároz egy projektivitást s a homolog sugarak által a kúpszeletből kimetszett pontok lesznek a kúpszeleten levő projektivitás homológ pontpárjai. T. i. ha három homológ sugárpár ismeretes, akkor egy tetszőleges x sugár homolog társa y megszerkeszthető és az xy homolog sugárpár a kúpszeletből X és Y pontokat metszi ki. Tehát a kúpszeleten három pontpár határozza meg a projektivitást.

A kúpszeleten levő projektivitás tengelye és centruma.

Vegyünk fel a kúpszeleten három pontpárt. Ezek meghatároznak egy projektivitást, amit így jelölünk $A_1\ A_2\ A_3 \overline{\wedge} B_1\ B_2\ B_3$. Ha a kúpszeleten levő $A_1\ A_2\ A_3$ és $B_1\ B_2\ B_3$ projektiv pontsorokat a kúpszelet bármely pontjából proiciáljuk, mindig projektív sugársorokat nyerünk. Az első pontsort a kúpszelet B_1 pontjából, a másik pontsort a kúpszelet A_1 pontjából proiciáljuk, akkor $B_1\ (A_1\ A_2\ A_3) \overline{\wedge} A_1\ (B_1\ B_2\ B_3)$. Milyen ez a projektivitás? Ebben a közös sugár önmagának felel meg, a projektivitás tehát perspektivitás. A megfelelő sugarak metszéspontját jelöljük így: $A_1B_2.B_1A_2 = C_2$; $A_1B_3.B_1A_3 = C_3$. Ezen két pont C_2 és C_3 meghatározta p egyenest nevezzük a kúpszeleten levő projektivitás tengelyének. p egyenes metszi a közös sugarat C_1 pontban. Az $C_1\ C_2\ C_3$ ... pontsor projekciója A_1 és B_1 tartójú sugársorok. Úgyis eljárhattunk volna, hogy A_2 és B_2-ből proiciálunk, akkor is ugyanezt a p egyenest nyerjük. Ez abból látható, hogy $A_2B_3.BA_3$ pont is p egyenesen fekszik, mert a kúpszeletbe írt A_1 B_2 A_3 B_1 A_2 B_3 Pascal hatszög szemközti oldalai, tehát A_2 B_3 és B_2 A_3 a Pascal egyenesen p-én metszik egymást. Legyen az egyik pontsorban levő P; Q; pontoknak a másikban megfelelő pontjai P_1; Q_1; így az előbb mondottak szerint PQ_1; P_1Q egyenesek metszéspontjai is p egyenesen lesznek. Tehát p egyenes független a kúpszelet A_1 és B_1 (amiből a proiciálás történt) választásától.

Ha megvan a projektivitás tengelye, akkor a kúpszeleten levő projektivitás homolog pontjai megszerkeszthetők. Vegyünk fel p-n egy tetszőleges C_x pontot. Ezt proiciáljuk a kúpszelet A_1, majd B_1 pontjából a kúpszeletre, úgy azon A_x és B_x homolog pontokat nyerjük.

Ha a kúpszelet egy tetszőleges A_x pontjának homolog társait kell megszerkeszteni, így járunk el: A_x -et proiciáljuk B_1-ből p-re és így nyerjük a C_x pontot. C_x pontot proiciáljuk A_1-ből a kúpszeletre és nyerjük az A_x -nek homolog társát, B_x -et.

Nézzük most azt. hogy a projektivitás tengelyének, p-nek a kúpszelettel való metszéspontjai milyen pontok? Azt tudjuk, hogy a kúpszeleten levő projektiv pontsorok homolog pontjait a kúpszelet bármely két pontjából proiciáló sugársorok a projektivitás tengelyén mennek át, ill. a projektivitás tengelyén, p-n metszik egymást. Nevezzük A-nak a kúpszelet egyik azon pontját, amelyben p tengely metszi a kúpszeletet. Keressük A-nak homolog társát, B-t. A kúpszeletnek előbb megnevezett A pontját proiciáljuk a kúpszelet B_1 pontjából. B_1A proiciáló sugár metszi a p tengelyt $(p.B_1A)$ pontban, amely éppen A-ban lesz. Az p tengelynek B_1 A proiciáló sugárral való metszéspontját proiciáljuk a kúpszelet A_1 pontjából. $(p.\ B_1\ A)$. A_1 sugár metszi ki a kúpszeletből A-nak társát, B-ét, amely A-ba esik. Egy projektivitásban azon pontokat, amelyek homológ társukkal öszszeesnek, a projektivitás kettőspontjainak nevezzük. Ugyanígy igazolható, hogy p-nak a kúpszelettel való másik metszéspontja is kettőspont. Tehát azt mondhatjuk, hogy a projektivitás tengelye a kúpszeletet a projektivitás kettőspontjaiban metszi. Ebből az is látható, hogy a projektivitás tengelye mindig átmegy a projektivitás kettőspontjain, tehát ez egy fix egyenes, s ez ismét azt mutatja, hogy ez a vetítési centrumok választásától független.

A kúpszeleten levő projektivitás tengelyének pólusát, P-t a projektivitás centrumának nevezzük. Ennek szerkesztése egy egyenes kúpszeletre vonatkoztatott pólusának szerkesztésén alapszik.

A kúpszeleten levő involució értelmezése.

Az involució speciális projektivitás. A kúpszeleten két pontsor involucióban van, ha ezen pontsorokat a kúpszelet bármely pontjából proiciáló sugarak involucióban vannak. Ekkor van a kúpszeleten legalább egy olyan B pont, amit ha az első pontsorokhoz számítunk, megfelel neki a másik pontsorban B' pont és ha B-t a második pontsorhoz számítjuk, megfelel neki az első pontsorban ugyancsak B' pont. Röviden azt mondhatjuk, hogy egy kúpszeleten (tartón) levő projektivitást, amelyben két homolog elem egymásnak kettősen (kétszeresen) felel meg, involuciónak nevezzük.

Az is belátható, ha egy kúpszeleten olyan projektivitás van adva, amelyben két pont egymásnak kettősen felel meg, akkor minden pont társának kettősen felel meg. Legyenek A és A' a projektivitás azon pontjai, amelyek egymásnak kettősen felelnek meg és legyen B;B' egy másik pontpár. A projektivitást A A' ; A' A ; B B' pontpárok meghatározzák, mert (A A' B B') = (A' A B' B) és így A A' B B' $\barwedge$ A' A B' B igaz. Tehát az első pontsorban levő B'-nek a második pontsorban csak B felelhet meg és így B és B' egymásnak kettősen felelnek meg.

Tekintve, hogy az involució különös projektivitás, annak megadásához nem kell három pontpár, mert két pontpárral, A A' és B B'-el az involuciónak négy pontja és azoknak megfelelő pontjai is adva vannak, amennyiben A B A' B' pontoknak az egyik pontsorban A' B' A B pontok felelnek meg a másikban. A projektiv vonatkozás azonban ezen adatokkal nincs túlterhelve, mert (A B A' B') azonosan egyenlő (A' B' A B)-vel. Tehát a kúpszeleten két pontpár meghatározza az involuciót. A projektivitás harmadik pontpárját adja az a körülmény, hogy a projektivitás most involució.

Ha egy kúpszeleten involuciót akarunk létesíteni, akkor ezen két pontpár tetszőlegesen vehető fel. Ez a két pontpár lehet: 1. két tetszőleges pontpár, 2. egy pontpár és az involució egyik kettőspontja, 3. az involució két kettős pontja.

Az involucióban a homológ elemeket involuciós, vagy konjugált társaknak nevezzük. Az involució jelölése: A B B' $\barwedge$ A' B' B, vagy A A'. B B'. B' B, ahol A-nak társa A' és B-nek társa B' és B'-nek társa B.

A kúpszeleten levő involució tengelye.

Már láttuk azt, hogy az A_1 A_2 A_3 $\barwedge$ B_1 B_2 B_3 projektivitás tengelyét úgy nyerjük, hogy pl. A_1-ből proiciáljuk B_i pontokat és B_1-ből prociáljuk A_i pontokat. A homolog sugara: A_1 B_2, B_1, A_2, A_1 B_3, B_2 A_3. metszéspontjait összekötő egyenes a projektivitás tengelye. Most is így járunk el. A projektiv vonatkozás most ez: A B B' $\barwedge$ A' B' B.

Kiválasztunk két pontot A és A'-t és ezekből proiciáljuk a többit. Így két projektiv sugársort nyerünk: A' (ABB') $\barwedge$ A (A'B'B). Az (A'B . AB') = =P' ; (A'B'.AB) =P" pontok meghatározta p egyenest a kúpszeleten levő involució tengelyének nevezzük. Ezek után kimondhatjuk, hogy az ABB' $\barwedge$ A'B'B involució tengelye a kúpszeletbe írt AA'BB' teljes négyszög két átlós pontját összekötő egyenes. Az is igaz, hogy az AA', BB' involuciós társakban vont érintők egymást p egyenesen metszik. Ez a kúpszeletbe írt teljes négyszög és a hozzátartozó négyoldal azon tulajdonságán alapszik, hogy ha AA' BB' és I K L N valamely kúpszeletbe írt, ill. kúpszelet köré írt négyoldal, amely utóbbinak I K ; K L ; L N ; N I oldalai a kúpszeletet a négyszög A_1A' B_1B' szögpontjaiban érintik, akkor a négyszög és négyoldal átellenes szögpontjait összekötő egyenesek AB', A'B, I L, K N ugyanazon P' ponton mennek át.

A kúpszeleten levő involució centruma.

Az involució tengelyének pólusát az involució centrumának nevezzük. Szerkesszük meg a centrumot. A kúpszeleten adva van négy pont A A' B B'. Ez a négy pont meghatároz egy teljes négyszöget. Ennek van három átlóspontja P' P" P'". Ezek a teljes négyszög átlós háromszögét alkotják. Két átlóspont már a tengely szerkesztésénél adódott, a harmadik átlóspont P az AA', BB' szemközti oldalak metszéspontja.

Kérdés most már az, hogy P pólusa-e az involució tengelyének, p-nek. Pólusa, mert P a P' P'' P átlós háromszög harmadik szögpontja. Az pedig ismeretes, hogy a kúpszeletbe írt teljes negyszög átlósháromszöge olyan tulajdonsággal bír, hogy egy-egy szögpontja (ami a teljes négyszögnek egy-egy átlóspontja) a szemközti oldalnak (ami a teljes négyszög egy-egy átlója) pólusa. Tehát P pólusa p-nek. Nézzük, milyen sajátsága van az involució centrumának, P-nek. P egy egyenesen van AA' involuciós párral· P (AA') de P egy egyenesen van BB' involuciós párral is: P (BB'), de akkor P egy egyenesben van az involució bármelyik pontpárjával, mert BB' az involució bármelyik pontja lehet. Tehát ha két projektiv pontsor a kúpszeleten involucióban van, akkor az involuciós társakat összekötő egyenesek mind egy P ponton, az involució centrumán mennek át. Azt is mondhatjuk, hogy az involució centrumán átmenő egyenesek a kúpszeletből involuciós párokat metszenek ki. Most már a kúpszeleten levő involució egy tetszőleges C pontjának társa C' megszerkeszthető, mert CC' és P-nek egy egyenesen kell lennie. Ha a kupszeleten adott involuciót a kúpszelet egy tetszőleges pontjából az involució tengelyére proiciáljuk, akkor ezen a kúpszeletre nézve konjugált párokat nyerünk. Ez a tétel Staudt tételének (Legyen adva egy kúpszelet és egy beírt háromszög ABC, úgy minden egyenes, amelyek BC oldalának konjugált egyenese, másik két oldalt konjugált pontokban metszi.) más alakja. Legyen a kúpszeleten megadott involució centruma P és tengelye p. Legyen A és A' két pontja a kúpszeletnek, melyek P-vel egy egyenesbe esnek és D a kúpszeletnek harmadik pontja. Akkor p egyenes, amely a kúpszeletbe írt AA'D háromszög AA' oldalának konjugáltja (mert AA' átmegy p-nek pólusán) A D és A' D oldalakat konjugált pontokban metszi. Tehát a kúpszeletnek P-vel egy egyenesbe eső pontjainak AA'-nek D-ből való projekciója p egyenesre konjugáltak.

A kúpszeleten levő involució kettőspontjai.

A kúpszeleten levő involució kettőspontja az involució tengelynek a kúpszelettel való metszéspontjai, mert ezeknek a pontoknak a sajátsága az, hogy homológ társakkal összeesnek.

Az involució két kettőspontja valós, ha az involució tengelye valós pontokban metszi a kúpszeletet, két képzetes, ha a tengely képzetes pontokban metszi a kúpszeletet és végül egy kettős pontról beszélünk, ha az involució tengelye érinti a kúpszeletet.

Ha az involució olyan, hogy P centruma a kúpszeleten kívül van, akkor a tengely valós pontokban metszi a kúpszeletet. Ekkor a két kettőspont valós és P-ből a kúpszelethez két valós érintő húzható. Ha az involució olyan, hogy P centruma a kúpszeleten belül van, akkor a tengely képzetes pontokban metszi a kúpszeletet, s valós érintő P-ből a kúpszelethez nem húzható. Lehet, hogy az involució centruma P a kúpszeleten van, akkor az involució tengelye a centrumon átmenő érintő, s a kettőspontja az érintési pont, ami az involució centrumával azonos.

Az involució kettőspontjai az egyes involuciós párokat harmonikusan választják szét. Ha $\overline{A\ A_1}$ egy pontpárja, M N pedig a két kettőspontja az involuciónak, akkor $\overline{A\ A_1}$ átmegy $\overline{M\ N}$ egyenesnek pólusán P-én, akkor N A, M A_1, M N, M P sugarak harmonikusak. Ezért A A_1 N M pontok, melyek a kúpszelet M pontjából proiciálódnak, harmónikusak.

Bebizonyítható az is, hogy $A\ A_1\ M\ N$ pontokat nemcsak az M kettőspontból, hanem a kúpszelet bármely pontjából a harmonikus sugarak proiciálják. Legyen a kúpszeletnek tetszőleges pontja B. Kössük össze B-t P-vel, BP egyenesnek a kúpszelettel való metszéseként nyerjük B_1-et. $B\ B_1$ pontok az $A\ A_1$ pontokkal egy $A\ B\ A_1\ B_1$ teljes négyszöget alkotnak, melynek szemközti oldalai: $\overline{B\ A_1}$; $\overline{B_1\ A}$; $\overline{B\ A}$; $\overline{B_1\ A_1}$ egymást P'; P" a kúpszeletre nézve konjugált pontokban metszik, de akkor M N harmonikusan választják szét P'; P" pontokat. $\overline{B\ A}$, $\overline{B\ M}$, $\overline{B\ A_1}$, $\overline{B\ N}$ négy harmonikus sugár, mert ezek négy harmonikus pontot proiciálnak, de akkor általuk a kúpszeletből kimetszett pontok is harmonikusak, vagyis a kúpszeleten levő involució kettőspontjai harmonikusan választják szét $A\ A_1$ pontpárt.

A kúpszeleten levő involució osztályozása.

A kúpszeleten két involuciós helyzetű pontsor egyenlő értelmű, vagy ellenkező értelmű (egyenlően haladó, vagy (ellentétesen haladó) aszerint, hogy két involuciós társ A és A' két másik B és B' által szét van-e választva vagy sem

Az első esetben A A' pontpár szét van választva B B' által és a két homológ elem egyirányban halad, úgy hogy az egyik A B B' pontsort, a másik A' B' B pontsort írja le. Ekkor a két mozgó elem nem találkozik és az involuciónak két képzetes kettőspontja van. Ez az elliptikus involució. Ennek az involuciónak minden más involuciós párja valós, mert az involució centruma a kúpszeleten belül van és így a centrumon átmenő egyenesek mindig valós pontpárokban metszik a kúpszeletet.

A második esetben A A' nincs szétválasztva B B' által, a mozgás ellenkező irányban történik. Ezért a mozgó A és A' pontoknak kétszer össze kell esnie. Ekkor tehát két valós kettőspont van. Ez a hiperbolikus involució. Ennek a kúpszeleten képzetes pontjai is vannak, mert itt az involució centruma a kúpszeleten kívül van és így az involució centrumán átmenő egyenesek között vannak olyanok is, amelyek képzetes pontokban metszik a kúpszeletet.

Az involució kettőspontjai egymáshoz végtelen közel is kerülhetnek, azt szokták mondani egybeesnek, akkor parabolikus az involució. Tulajdonképpen nem szabadna azt mondani, hogy a két kettőspont egybeesik, mert két pont határoz meg egy egyenest. Ha a két kettőspont egybeesne, akkor végtelen sok helyzetű egyenes menne rajta át és így a két kettőspont nem határozná meg az involució tengelyét. Ekkor az egymáshoz végtelen közel jutott kettőspontokban a kúpszelethez húzott érintő az involució tengelye. A parabolikus involució minden pontjának involuciós társa a kettőspont. Ezt úgy lehetne elképzelni, hogy az egymáshoz végtelen közeleső két kettőspont M és N közrefogják A-nak társát A'-t és ha A mozog is, M és N nem engedik A'-t elmozdulni.

Az egyenesen adott involució kettőspontjainak szerkesztése.

Először azt az általánosabb esetet tárgyaljuk, amikor egy egyenesen egy projektivitás van adva s meg kell határozni annak kettőspontjait. Azután az itt tárgyalt ejárást alkalmazzuk az involucióra.

Legyen adva p egyenesen egy projektivitás $A_1\ A_2\ A_3 \ \overline{\wedge}\ B_1\ B_2\ B_3$: Feladat ezen projektivitás kettőspontjainak meghatározása.

Felveszünk egy a p egyenesen átmenő síkon egy kúpszeletet és ennek egy tetszőleges p-n kívüli P pontjából proiciáljuk a p-n levő $A_1 A_2 A_3 \barwedge B_1 B_2 B_3$ projektivitás homológ pontjait. Így a kúpszeleten két pontsort $A_1' A_2' A_3'$-at és $B_1' B_2' B_3'$-at nyerünk, amely pontsorok projektivek: $A_1' A_2' A_3' B_1' \barwedge B_2' B_3' B_3'$ mert a két sugársor, mely ezen projektivitás homológ pontjait proiciálja, projektiv és P tartójuk a kúpszeleten fekszik.

Szerkesszük meg a kúpszeleten levő $A_1' A_2' A_3' \barwedge B_1' B_2' B_3'$ projektivitás tengelyét. A tengely metszi a kúpszeletet két pontban. Ezek lesznek a kúpszeleten levő projektivitás kettőspontjai. Ezeket a pontokat a kúpszeleten felvett P pontból proiciáljuk a p egyenesre, így nyerjük p egyenesen adott projektivitás kettőspontjait.

A p egyenesen adott projektivitás egy tetszőleges A_x pontjának homológ társát B_x-et is meg tudjuk határozni. A_x-et proiciáljuk a kúpszelet P pontjából s nyerünk a kúpszeleten A_x' pontot. A_x' pontot proiciáljuk B_1' -ből a projektivitás tengelyére, így nyerjük C_x pontot. Ezt a C_x pontot proiciáljuk A_1' -ből a kúpszeletre, nyerjük B_x' pontot. Ezekután B_x'-t visszaproiciáljuk a kúpszelet P pontjából p egyenesre, nyerjük A_x -nek homológ társát B_x -et.

Ha a kúpszeleten levő projektivitás tengelyén felveszünk egy tetszőleges X pontot és azt proiciáljuk a kúpszelet A_1' ill. B_1' pontjaiból a kúpszeletre, akkor azon A_x' és B_x' pontokat nyerjük. Ezeket a kúpszelet P pontjából proiciáljuk a p egyenesre, nyerjük A_1 és B_1 homológ pontokat. Tehát ha adva van egy egyenesen egy projektivitás, akkor egy kúpszelet segítségével annak kettőspontjai és homológ pontpárjai megszerkeszthetők.

Legyen adva p egyenesen egy involució: $A_1 A_2 B_1 \barwedge A_2 A_1 B_2$, melyben az involuciós párok $A_1 A_2 : B_1 B_2$. Megszerkesztendő az involució kettőspontjai.

A kúpszelet tetszőleges P pontjából proiciáljuk a p egyenesen levő $A_1 A_2 B_1 \barwedge A_2 A_1 B_2$, involuciót. Így a kúpszeleten létrejön $A_1' A_2' B_1' \barwedge A_2' A_1' B_2'$ involució, mert p egyenesen levő involuciót proiciáló sugarak P tartója a kúpszeleten van és a két sugársor involuciós.

Majd meghatározzuk a kúpszeleten levő $A_1' A_2' B_1' \barwedge A_2' A_1' B_2'$ involució tengelyét, o-t és centrumát O-t. Az o egyenes a kúpszelet az involució két kettőspontjában K_1' és K_2' -ben metszi. Ha ezt a két kettőspontot a kúpszelet P pontjából proiciáljuk p egyenesre, nyerjük az egyenesen adott involució két kettőspontját, K_1-et és K_2-őt.

Ha a kúpszeleten levő $A_1' A_2' B_1' \barwedge A_2' A_1' B_2'$ involució tengelye o átmegy a kúpszelet azon P pontján, melyből az egyenesen adott involució homológ pontjait proiciáltuk, akkor a p egyenesen levő involució egyik kettőspontját a kúpszeleten levő involució tengelye metszi ki, a másik kettőspontját a kúpszelet P pontjához, mint a kúpszeleten levő involució kettőspontjához húzható érintő metszi ki.

Ezekután szerkesszük meg a p egyenesen adott involucióban az involuciós párokat. A kúpszeleten levő involució tengelyére most nincs is szükség, csak az involució centrumát kell ismerni. A centrum $A_1' A_2'$, $B_1' B_2'$ egyenesek metszéspontja. $(A_1' A_2' \cdot B_1' B_2') = O$. Az O centrumon felveszünk egy egyenest; ez metszi a kúpszeletet B'; A' involuciós párban. Ezt visszaproiciáljuk a kúpszelet P pontjából p egyenesre és nyerjük az A ; B involuciós párt.

Ha egy egyenesen akarunk involuciót létesíteni, így járjunk el: Megadunk egy kúpszeletet és felvesszük azt a p egyenest, melyen involuciót akarunk létesíteni. Ha elliptikus involuciót akarunk, akkor a kúpszeleten belül felveszünk egy O pontot. O pont a kúpszeleten elliptikus involuciót létesít, melynek involuciós párjait O-n átmenő egyenesek metszik ki a kúpszeletből. Fektessünk át O-n egy egyenest. Ez metszi a kúpszeletet A_1' és B_2' pontokban. Ha A_1' és B_1' pontokat a kúpszelet tetszőleges P pontjából proiciáljuk p egyenesre, úgy azon nyerjük A_1; B_1 pontpárt. Ha az o-n felvett egyenest O körül forgatjuk és ezen forgó egyenes metszéspontjait a kúpszelet P pontjából p egyenesre proiciáljuk, akkor az adott p egyenesen elliptikus involució jön létre.

Ha O pontot a kúpszeleten kivül vesszük fel, akkor O a kúpszeleten hiperbolikus involuciót indukál. Ezt az előbbi eljárás szerint proiciálva p egyenesre, azon hiperbolikus involució jön létre.

A másodfokú egyenlet gyökeinek megszerkesztése.

Az egyenesen levő involució egyenlete: $ax_1y_1+b(x_1+y_1)+c=o$. Kettőspontok azok a pontok, amelyek társaikkal összeesnek: $x_1=y_1$ és így: a $x_1^2+2bx_1+c=o$. Ez pedig másodfokú egyenlet, tehát minden másodfokú egyenlet egy involució kettős pontjait meghatározó egyenlet. Pl. $5x^2-3x+5=O$. Ez az egyenlet egy involució kettőspontjait határozza meg. Az involució egyenlete $5x_1\,y_1-\frac{3}{2}(x_1+y_1)+5=O$. Helyettesítsük $x_1=o$, nyerjük y_1-et, majd helyettesítsük 1-et, kapjuk y_1'-öst. Az így kapott két pontpár (O y_1) és (1 Y_1') Egy egyenesre felrajzoljuk ezen involuciós párokat. Majd az egyenes síkjában felveszünk egy kúpszeletet, melynek egy P pontjából proiciáljuk az egyenesen levő involuciót. Ezzel a kúpszeleten involució jön létre, melynek kettőspontjait visszaproiciáljuk az egyenesre és kapjuk az egyenesen levő involució kettőspontjait. Ezek lesznek az adott $5x^2-3x+5=o$ egyenlet gyökei.

A kúpszeleten levő két involució közös elempárjának meghatározása.

Legyen adva a kúpszeleten két involució. Nézzük, van-e a két involuciónak közös elempárja, vagyis olyan elempárja, amely mindkét involucióban involuciós pár.

Az egyik involuciót adjuk meg az A A', B B' pontpárokkal és a másik involuciót $A_1\ A_1'$, $B_1\ B_1'$ pontpárokkal. Az első involució centruma C_1 és a második involució centruma C_2 megszerkeszthető: Az első involucióban bármely involuciós pár egy egyenesben van C_1-el, ugyancsak a másik involució bármelyik involuciós párja egy egyenesben van C_2-vel. Messe $\overline{C_1\,C_2}$ egyenes a kúpszeletet $X_1\,X_2$ pontokban. Ez az $X_1\,X_2$ pontpár lesz mindkét involucióban a közös involuciós pár, mert $X_1\,X_2$ pontpárnak megvan az a tulajdonsága, hogy az egyik involucióban C_1-el, a másikban C_2-vel egy egyenesen van. Ezért mondhatjuk azt, hogy a két involució centrumát összekötő egyenes metszi ki a kúpszeletből a két involució közös elempárját.

A kúpszeleten levő két involuciónak legfeljebb csak egy közös pontpárja lehet, mert $\overline{C_1'\,C_2}$ egyenes legjobb esetben csak két pontban metszheti a kúpszeletet. Ez abból is látható, hogy involuciót két pontpár határoz meg. Ha az involuciónak két közös elempárja lenne, úgy a két involuciónak szükségképpen össze kellene esni. Ezek szerint ugyanazon kúpszeleten levő két különböző involuciónak legfeljebb csak egy közös pontpárja lehet.

Ha az egyik involució centruma C_1 a kúpszeleten belül van, a másik involució centruma C_2 pedig a kúpszeleten kívül van, ill. ha az egyik involució elliptikus, a másik pedig hiperbolikus, akkor a két involuciónak mindig van közös elempárja, mert ekkor a két centrumot összekötő $\overline{C_1 C_2}$ egyenes mindig metszi valós pontokban a kúpszeletet. Ha a két involució elliptikus, akkor mindkettőnek centruma C_1 és C_2 is a kúpszeleten belül van és $\overline{C_1 C_2}$ egyenes ekkor is metszi a kúpszeletet. Tehát a két involuciónak ekkor is van közös elempárja.

Legyen a két involució hiperbolikus és olyan, hogy a centrumukat összekötő $\overline{C_1 C_2}$ egyenes érintse a kúpszeletet. Ekkor a közös pontpár a két involució egyik kettős pontja. Most az egyik kettős pont mindkét involucióban ugyanaz, vagyis a két involució tengelye a kúpszeleten metszi egymást. Ez a pont a két involució közös pontpárja.

Lehet azonban az is, hogy a két hiperbolikus involució centrumát összekötő egyenes metszi a kúpszeletet valós pontokban, lehet az is, hogy nem metszi valós pontokban. Az első esetben van a két involuciónak közös elempárja, a második esetben nincs közös valós elempárja.

Ha egy kúpszeleten két hiperbolikus involució van adva, könnyen eldönthető, hogy a közös elempár valós-e, vagy pedig képzetes. Az egyik involució kettőspontjai: M; N, a másik involució kettőspontjait V és W. A két involució centrumát összekötő egyenes metszi ki a két hiperbolikus involució közös elempárját (P_1 P_2)-et. Ennek olyannak kell lennie, hogy harmonikusan választja szét M N, ill. V W-ét. Tehát P_1 P_2 az M N és V W pontpárok által meghatározott új involució kettős pontjainak tekinthető. P_1 és P_2 csak akkor valós, ha M N és V W nem választják szét egymást. Ha M N és V W szétválasztják egymást, akkor az M N és V W által meghatározott involució elliptikus, akkor P_1 és P_2 nem lehet valós. Tehát azt mondhatjuk, hogy egy kúpszeleten levő két hiperbolikus involuciónak közös pontpárja valós, vagy képzetes, aszerint, hogy a két involució kettőspontjai egymást nem választják szét, vagy szétválasztják.

Legyen adva p egyenesen két involució: $I = (A_1\ B_2,\ A_2\ B_2)$ feladat a két involució közös pontpárját meghatározni.

A szerkesztést arra az esetre mondom el, amikor az adott I involució hiperbolikus és az I' involució elliptikus. Felveszünk egy kúpszeletet. Erre proiciáljuk egy tetszőleges P pontból mindkét involuciót. Először proiciáljuk I involuciót, így a kúpszeleten nyerjük $(A_1^0\ B_1^0,\ A_2^0\ B_2^0) = I^\circ$ involuciót. Az $A_1^0\ B_1^0$ és $A_2^0\ B_2^0$ egyenesek metszéspontja az I° involució centruma: $(A_1^0\ B_1^0 . A_2^0\ B_2^0) = C^0$ Mivel I involució hiperbolikus, azért C° a kúpszeleten kivül van. C°-on átmenő egyenesek metszik ki a kúpszeletből az I° involució involuciós párjait. Ezután I' involuciót proiciáljuk a kúpszeletre ugyancsak a kúpszelet P pontjából. I' involució elliptikus, tehát proiciálás után a kúpszeleten is elliptikus involuciót nyerünk, melynek involuciós párjai $(A_1'^0\ B_1'^0,\ A_2'^0\ B_2'^0) = I'^0$. Ennek centruma C'^0 az $A_1'^0 B_1'^0$ és $A_2'^0$ B' egyenesek metszéspontja a kúpszeleten belül van. $C'^\circ\ C^\circ$ egyenes metszi a kúpszeletet két pontban, mert elliptikus ponton átmenő minden egyenes metszi a kúpszeletet. A két metszéspont az I° involucióban is, az I'° involucióban is involuciós pár. A közös elempárt proiciáljuk p egyenesre, így nyerjük p egyenesen adott két involució közös elempárját. Ha p egyenesen adott két involució elliptikus, akkor a közös pontpár valós. Ha az egyik hiperbolikus, a másik elliptikus, a közös pontpár akkor is valós. Ha mindkét involució hiperbolikus, akkor több eset van: 1. Lehet, hogy van, 2. lehet, hogy nincs, 3. lehet, hogy a közös pontpár összeesik.

Egyenesek és pontok osztályozása.

A kúpszelet a sík minden egyenesén indukál involuciót. Ha egy egyenes valós pontokban metszi a kúpszeletet, ekkor ez rajta hiperbolikus involuciót indukál. Ezek a hiperbolikus egyenesek. A kúpszelet azokon az egyeneseken, melyek azt képzetes pontokban metszik, elliptikus involuciót indukál. Ezek az elliptikus egyenesek. A kúpszelet az érintőin parabolikus involuciót indukál. Ezek a parabolikus egyenesek.

Vegyünk fel egy kúpszeletet és egy tetszőleges, mondjuk a kúpszeletet metsző egyenest. Ezt az egyenest tekinthetjük egy a kúpszeleten levő involució tengelyének, amely involuciónak kettőspontjai a kúpszeletnek egyenessel való metszéspontjai. Ezzel a kúpszeleten hiperbolikus involució van adva, melynek involuciós párjai megszerkeszthetők. Hasonlóképpen szólhatunk az elliptikus és parabolikus egyenesekről.

A kúpszelet a sík pontjain is indukál involuciót. Ha egy H pont a kúpszeleten kívül van, akkor a kúpszelet rajta hiperbolikus involuciót indukál. Ha H pontot egy sugársor tartójának gondoljük, akkor könnyen belátható, hogy ezen sugársor két sugara érinti a kúpszeletet. Az ilyen H pontot, melynek az a sajátsága, hogy belőle a kúpszelethez valós érintő húzható, hiperbolikus pontnak nevezzük.

Ha egy E pont a kúpszeleten belül van, akkor a kúpszelet rajta elliptikus involuciót indukál. Ezen pontból a kúpszelethez valós érintő nem húzható. Ezek az elliptikus pontok.

A kúpszeleten levő P pontban az involució parabolikus. Itt P ponton átmenő sugársornak van egy kettős sugara. Ezek a P pontok a parabolikus pontok.

Ha a kúpszelet H ponton hiperbolikus involuciót indukál, akkor a pont a kúpszeleten egy ugyanolyan involuciót indukál. H ponton egy sugársort képzelünk, melynek sugarai fogják kimetszeni H által a kúpszeleten indukált involució involuciós párjait. Ez az involució hiperbolikus, mert centruma H a kúpszeleten kívül van és tengelye metszi a kúpszeletet.

Tehát a sík pontjai a kúpszeleten levő involuciók centrumaiként foghatók fel.

Most már az is látható, hogy egy hiperbolikus pont polárisa hiperbolikus, elliptikus pont polárisa elliptikus és parabolikus pont polárisa parabolikus.

Legyen a síkban egy P_1 elliptikus pont. Vegyünk fel rajta egy tetszőleges x egyenest. Kérdés: van-e ezen az egyenesen hiperbolikus pont? Van, mégpedig végtelenül sok. Húzzunk a kúpszelethez egy érintőt. Ez metszi x egyenest P_2 pontban. Ez a pont hiperbolikus, mert belőle a kúpszelethez két valós érintő húzható. P_1 a kúpszeleten elliptikus, P_2 hiperbolikus involuciót indukál. A kúpszeleten két involució keletkezett, ezeknek kettőspontjait a kúpszeletből $\overline{P_1 P_2}$ egyenes metszi ki. Ez azt is kimondja, hogy az elliptikus pont minden egyenesén van a kúpszeletnek két valós pontja. Tehát az elliptikus ponton átmenő egyenesek hiperbolikusak. Az elliptikus ponton átmenő egyenesnek van olyan darabja, melyen csak elliptikus pontok vannak és van olyan darabja, melyen csak hiperbolikus pontok vannak. A kúpszelet tehát két részre osztja az elliptikus ponton átmenő egyenest. Az elliptikus részt a hiperbolikus résztől egy-egy parabolikus pont választja el.

Ezek szerint a sík összes pontjait kúpszeleten belül levő, vagy elliptikus pontok, kúpszeleten kívül levő, vagy hiperbolikus pontok, és végül kúpszeleten levő vagy parabolikus pontok csoportjába oszthatjuk.

Most még azt vizsgáljuk meg, milyen sajátsága van az elliptikus egyenesnek. Elliptikus ponton nincs a kúpszeletnek egyenese. Elliptikus egyenesen nincs a kúpszeletnek pontja. Elliptikus pont polárisa elliptikus, elliptikus egyenes pólusa elliptikus.

Az E elliptikus ponton vegyünk fel egy tetszőleges p egyenest. Ezt az egyenest a kúpszelet két részre osztja. p egyenesnek a kúpszelettel való metszéspontjai P_1 P_2 parabolikus pontok. $\overline{P_1 P_2}$ szegmentumon az elliptikus, $\overline{P_2 P_1}$ szegmentumon a hiperbolikus pontok vannak (P_1-től P_2 felé haladtunk az egyenesen), és így p egyenes az e elliptikus egyenest hiperbolikus pontban metszi. Ezzel azt mutattuk ki, hogy az elliptikus egyenes minden pontja hiperbolikus. Elliptikus egyenesen nem lehet elliptikus pont, mert az elliptikus pontnak az a sajátsága, hogy annak minden egyenese metszi a kúpszeletet és az a kúpszeletbe van bezárva. Elliptikus pont minden egyenese hiperbolikus, elliptikus egyenes minden pontja hiperbolikus. Elliptikus pont minden egyenesén van a kúpszeletnek két pontja, elliptikus egyenes minden pontján van a kúpszeletnek két egyenese.

A kúpszelet tengelyeinek szerkesztése.

A konjugált irányok mentén haladó diamétereket konjugált diamétereknek nevezzük. Ezek között van két egymásra merőleges diaméter. Ezeket a kúpszelet tengelyeinek nevezzük. Ezek megszerkesztése szükségessé teszi a következő feladat tárgyalását: Adva van S pontban egy involució az a_1 b_1 ; a_2 b_2 sugárpárokkal. Feladat az egymásra merőleges sugárpárt meghatározni. Felveszünk S ponton egy kört, melynek centruma C. Ezen kúpszeletet az S pontban adott involuciós párok rendre A_1 B_1 A_2 B_2 pontokban metszik. Az A_1 B_1 ; A_2 B_2 pontpárok a kúpszeleten egy involuciót alkotnak, melynek centruma C' megszerkeszthető. A körön van még egy involució, melyet a kör centruma C indukál. C-ben az involució körös, azaz olyan, melyben az involuciós társak egymásra merőlegesek. C indukálta involució mindig elliptikus, lehet, hogy a másik involució is elliptikus, de ez nem szükséges feltétel. A két involuciónak, mivel az egyik mindik elliptikus, van közös pontpárja: D_1 D_2. Ha D_1 és D_2-őt S-ből poriciáljuk, d_1 és d_2 sugarakat nyerjünk, melyek egymásra merőlegesek.

Most már a kúpszelet tengelyei megszerkeszthetők. A kúpszelet centrumában, O-ban felveszünk két pár konjugált átmérőt: a a' ; b b'. Ezzel O-ban a a' ; b b' konjugált párokkal egy involuciót definiáltunk, melyben a merőleges sugárpárt keressük. Felveszünk C középpontú kört, mely átmegy a kúpszelet középpontján, O-n. Ezzel a körön létrejön két involució. Az egyiket saját centruma C indukálja rajta, a másikat pedig O tartójú sugársor metszi ki belőle: A A' ; B B' involuciós párokban. E két involuciónak van közös pontja X Y. Proiciáljuk ezen közös elempárt O-ból, így nyerjük k kúpszelet x és y tengelyeit.

A kúpszeleten létesített involuciókkal kapcsolatban felvetett kérdéseket olyan módon és összeállításban igyekeztem tárgyalni, hogy azok a főiskolai oktatásban speciális kollégiumként is tárgyalhatók legyenek.

Irodalom

Bierbach, L.: Projektive Geometrie. Leipzig 1931.

Cremona, L.: Elemente der projektivischen Geometrie. Stuttgart 1882.

Dochlemann, K.: Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung II. Berlin 1922—24.

Dochlemann—Timerding: Projektive Geometrie. Berlin 1937.

Euriques, F.: Vorlesungen über projektive Geometrie. Leipzig 1915.

Juel, C.: Vorlesungen über projektive Geometrie. Berlin 1934.

Klug L.: Projektiv geometria. Budapest 1903.

Michel, Ch.: Compléments de Geometrie Moderne. Páris 1926.

Prüfer, H.: Projektive Geometrie. Leipzig 1935.