EGY DIOFANTIKUS EGYENLETRŐL

Írta: SZÉP JENŐ

Ez a dolgozat a főiskolai matematikai tudományos diákköröknek is szolgáltat anyagot. Tartalmában — tudomásom szerint — új és nyitott kérdéseket is tartalmaz. Az alanti problémának azt a speciális esetét, midőn $\alpha = \beta$ az 1955. évi Schweitzer Miklós matematikai versenyre tűztem ki feladatul.

Az alábbiakban a

(1) $$p^\alpha - q^\beta = r^\gamma$$

diofantikus egyenlet megoldásait határozzuk meg, ahol p, q, r prímszámokat jelentenek, α, β, γ pozitív egész számok, és $(\alpha, \beta) > 1$.

A megoldások megkereséséhez fel fogjuk használni B. HUPPERT következő eredményét (Primitive, auflösbare Permutationsgruppen, Archiv der Math., Vol. VI, (1955), 303—310):

A) *A $p^{\bar\alpha} - q^{\bar\beta} = 1$ (p, q prímszámok, $\bar\alpha, \bar\beta$ pozitív egész számok) diofantikus egyenletnek megoldásai a következők:*

1. $q = 2$, $\bar\alpha = 1$, $p = 2^{\bar\beta} + 1$ (*Fermat-féle prímszám*)
2. $q = 2$, $\bar\beta = 3$, $p = 3$, $\bar\alpha = 2$
3. $p = 2$, $\bar\beta = 1$, $q = 2^{\bar\alpha} - 1$ (*Mersenne-féle prímszám*).

MEGJEGYZÉS. Az A)-beli eredmény elemi úton és elég könnyen nyerhető, tudományos diákköröknek jó feladatot jelent.

Igazolni fogjuk a következő tételt:

TÉTEL. *Az* (1) *alatti diofantikus egyenletnek megoldásai a következők:*

1. $p = 3$, $\alpha = 2$, $q = 2$, $\beta = 2$, $r = 5$, $\gamma = 1$
2. $p = 5$, $\alpha = 2$, $q = 2$, $\beta = 4$, $r = 3$, $\gamma = 2$
3. $p = 3$, $\alpha = 4$, $q = 2$, $\beta = 6$, $r = 17$, $\gamma = 1$
4. $p = 2$, $\alpha = 4$, $q = 3$, $\beta = 2$, $r = 7$, $\gamma = 1$
5. $p = 5$, $\alpha = 2$, $q = 3$, $\beta = 2$, $r = 2$, $\gamma = 4$
6. $p = 3$, $\alpha = 4$, $q = 7$, $\beta = 2$, $r = 2$, $\gamma = 5$
7. $(2^{\bar\alpha} + 1)^\eta - 2^{\bar\alpha\eta} = r^\gamma$ *diofantikus egyenlet megoldásai, ahol* $2^{\bar\alpha} + 1 = p$ *és* η *páratlan prímszámot jelent.*
8. $3^{2\eta} - 2^{3\eta} = r^\gamma$ *diofantikus egyenlet megoldásai, ahol* η *páratlan prímszámot jelent.*
9. $2^{\beta\eta} - (2^{\bar\beta} - 1)^\eta = r^\gamma$ *diofantikus egyenlet megoldásai, ahol* $2^{\bar\beta} - 1 = q$ *és* η *páratlan prímszámot jelent.*

BIZONYÍTÁS. Legyen $(\alpha, \beta)=\eta$. Ekkor $p^{\alpha}-q^{\beta}=p^{\alpha'\eta}-q^{\beta'\eta}=r^{\gamma}$ $(\alpha=\alpha'\eta,$ $\beta=\beta'\eta,$ $\eta>1)$. Egyszerűen belátható, hogy p, q, r különböző prímszámok, és A) folytán $\eta>1$ miatt $\gamma>0$.

Két esetet különböztetünk meg.

1. η páros szám $(\eta=2\varepsilon)$.

Ekkor $p^{\alpha''2}-q^{\beta''2}=(p^{\alpha''}-q^{\beta''})(p^{\alpha''}+q^{\beta''})=r^{\gamma}$ $(\alpha''=\alpha'\varepsilon,$ $\beta''=\beta'\varepsilon)\rightarrow$ $p^{\alpha''}-q^{\beta''}=r^{\gamma'}, p^{\alpha''}+q^{\beta''}=r^{\gamma''}$ $(\gamma'+\gamma'=\gamma)\rightarrow 2p^{\alpha''}=r^{\gamma''}+r^{\gamma'}, 2q^{\beta''}=r^{\gamma''}-r^{\gamma'}$. (A „$\rightarrow$“ jel a „következik szót helyettesíti).

Ha $r\neq 2$, akkor az utolsó egyenlőségből $\gamma'=0$ következik, ebből pedig $p^{\alpha''}-q^{\beta''}=1$. Alkalmazzuk A) eredményét a $p^{\alpha''}-q^{\beta''}=1$ egyenletre. Az A (1) esetben $q=2$, $\alpha''=1$, $p=2^{\beta''}+1$, tehát $(2^{\beta''}+1)^2-2^{\beta''2}=r^{\gamma}\rightarrow$ $\rightarrow 2^{\beta''+1}+1=r^{\gamma}$. Ez az egyenlet ugyancsak A) szerint csak úgy állhat fenn, ha vagy $\gamma=1$, mikor is $r=2^{\beta''+1}+1$, tehát $\beta''=1$ (ugyanis p és r prímszámok és így β'' és $\beta''+1$ 2-nek hatványa) és így a tétel 1. megoldását nyerjük, vagy $r=3$, $\beta''=2$, mikor a tétel 2. megoldásához jutunk. Az A (2) esetben $p=3$, $\alpha''=2$, $q=2$, $\beta''=3\rightarrow(3^2)^2-(2^3)^2=r^{\gamma}\rightarrow r=17$, $\gamma=1$. Ez az eredmény a tétel 3. megoldását adja. Az A (3) esetben $p=2$, $\beta''=1$, $q=2^{\alpha''}-1\rightarrow 2^{\alpha''2}-(2^{\alpha''}-1)^2=r^{\gamma}\rightarrow 2^{\alpha''+1}-1=r^{\gamma}$. Az utolsó egyenlet ugyancsak A) folytán csak a $\gamma=1$ esetben állhat fenn. Minthogy $q=2^{\alpha''}-1$ és $r=2^{\alpha''+1}-1$ mindketten prímszámok, ezért α'' és $\alpha''+1$ is prímszámok, tehát $\alpha''=2$. Ez az eredmény a tétel 4. megoldását adja.

Ha $r=2$, akkor $q^{\beta''}=2^{\gamma''-1}-2^{\gamma'-1}\rightarrow\gamma'-1=0\rightarrow 2^{\gamma''-1}-q^{\beta''}=1$. Az utóbbi egyenletben (A) szerint) $\beta''=1$. Minthogy $p^{\alpha''}=2^{\gamma''-1}+1$, ezért (A) szerint) vagy $\alpha''=1$, mikor is $(q=2^{\gamma''-1}-1$, $p=2^{\gamma''-1}+1$ miatt) $\gamma''-1=2$, tehát $p=5$, $q=3$ és így a tétel 5. megoldását kapjuk, vagy $\alpha''=2$, $p=3$, $\gamma''-1=3\rightarrow(3^2)^2-(2^3-1)^2=2^{\gamma}$, amiből a tétel 6. megoldása áll elő.

2. η páratlan szám.

Mindenekelőtt igazoljuk, hogy ezen esetben η prímszám. Tegyük fel ugyanis, hogy η nem prímszám, azaz $\eta=\varrho\eta'$ (ϱ prímszám, $\eta'>1$). Ekkor a $p^{\alpha'\eta}-q^{\beta'\eta}=r^{\gamma}$ egyenletből $(p^{\alpha'})^{\eta'}-(q^{\beta'})^{\eta'}=r^{\gamma'}$ $(\gamma>0)$ következik. Minthogy $\varrho>1\rightarrow\gamma-\gamma'>2$ (ugyanis pl. teljes indukcióval igazolható, hogy $r^{\gamma'\varrho}=$ $=[(p^{\alpha'})^{\eta'}-(q^{\beta'})^{\eta'}]^{\varrho}<(p^{\alpha'})^{\eta'\varrho}-(q^{\beta'})^{\eta'\varrho}=r^{\gamma}$, amiből látható, hogy $\gamma-\gamma'>2$). A $(p^{\alpha'})^{\eta'}=(q^{\beta'})^{\eta'}+r^{\gamma'}$ helyettesítéssel $(q^{\beta'\eta'}+r^{\gamma'})^{\varrho}-q^{\beta'\eta}=\binom{\varrho}{1}q^{\beta'\eta'(\varrho-1)}r^{\gamma'}+\cdots$ $\cdots+\binom{\varrho}{\varrho-1}q^{\beta'\eta'}r^{\gamma'(\varrho-1)}+r^{\gamma'\varrho}=r^{\gamma}$. Az utolsó egyenlőségben, ha $\varrho\neq r$, akkor a $\binom{\varrho}{1}q^{\beta'\eta'(\varrho-1)}r^{\gamma'}$ tag kivételével minden tag osztható $r^{\gamma'+1}$-gyel, ha $\varrho=r$, akkor ugyanezen tag kivételével minden tag osztható $r^{\gamma'+2}$-vel és így mindkét esetben ellentmondáshoz jutottunk. Tehát η páratlan prímszám.

Most két alesetet különböztetünk meg.

a) $p^{\alpha'}-q^{\beta'}=r^{\gamma'}>1$. Ekkor ugyanúgy, mint előbb $\gamma-\gamma'>2$ és a $(q^{\beta'}+r^{\gamma'})^{\eta}-q^{\beta'\eta}=\binom{\eta}{1}q^{\beta'(\eta-1)}r^{\gamma'}+\cdots+\binom{\eta}{\eta-1}q^{\beta'}r^{\gamma'(\eta-1)}+r^{\gamma'\eta}=r^{\gamma}$ egyenlőségből ellentmondásra jutunk, tehát ezen esetben megoldás nincsen.

b) $p^{\alpha'} - q^{\beta'} = 1$. Erre A) eseteit alkalmazva közvetlenül nyerjük a tétel 7., 8., 9. megoldásait.

NYITOTT KÉRDÉSEK:

1. Melyek a tétel 7., 8., 9. alatti diofantikus egyenleteinek megoldásai? Lehet-e ezekben $\gamma > 1$? Végtelen sok megoldás van-e, vagy véges sok?
2. Melyek a $p^\alpha - q^\beta = r^\gamma$ diofantikus egyenlet megoldásai, ha $(\alpha, \beta) = 1$?

ÜBER EINE DIOPHANTISCHE GLEICHUNG

Von J. SZÉP

Mit Hilfe eines Satzes von B. HUPPERT (Primitive, auflösbare Permutationsgruppen, Archiv der Math., Vol. VI, (1955), 303—310) wird gezeigt:

SATZ. *Die diophantische Gleichung* $p^\alpha - q^\beta = r^\gamma$ *p, q, r Primzahlen, α, β, γ nichtnegative ganze Zahlen, $(\alpha, \beta) > 1$ hat nur die folgenden Lösungen (η ist eine ungerade Primzahl):*

1. $p = 3,\ \alpha = 2,\ q = 2,\ \beta = 2,\ r = 5,\ \gamma = 1$
2. $p = 5,\ \alpha = 2,\ q = 2,\ \beta = 4,\ r = 3,\ \gamma = 2$
3. $p = 3,\ \alpha = 4,\ q = 2,\ \beta = 6,\ r = 17,\ \gamma = 1$
4. $p = 2,\ \alpha = 4,\ q = 3,\ \beta = 2,\ r = 7,\ \gamma = 1$
5. $p = 5,\ \alpha = 2,\ q = 3,\ \beta = 2,\ r = 2,\ \gamma = 4$
6. $p = 3,\ \alpha = 4,\ q = 7,\ \beta = 2,\ r = 2,\ \gamma = 5$
7. *die Lösungen der diophantischen Gleichung* $(2^{\bar\alpha} + 1)^\eta - 2^{\bar\alpha\eta} = r^\gamma$, *wo* $2^{\bar\alpha} + 1 = p$ *ist,*
8. *die Lösungen der diophantischen Gleichung* $3^{2\eta} - 2^{3\eta} = r^\gamma$;
9. *die Lösungen der diophantischen Gleichung* $2^{\bar\beta\eta} - (2^{\bar\beta} - 1)^\eta = r^\gamma$ *wo* $2^{\bar\beta} - 1 = q$ *ist.*