NEM TÍZES ALAPÚ SZÁMRENDSZEREK AZ ÁLTALÁNOS ISKOLÁBAN

Írta: MOSONYI KÁLMÁN

Tízes alapú számrendszerünk a gyakorlatban kitűnően bevált, s elemei közismertek. Ebből természetesen következik, hogy az emberek túlnyomó többsége el sem tudja képzelni a számolást más számrendszerben. Pedig amilyen jól bevált a tízes alapú számrendszer, ugyanúgy bevált volna a nyolcas vagy a tizenkettes is. Csak a megszokás az, ami a tízes számrendszert természetessé teszi a számunkra. E megszokás miatt van az, hogy minden más számrendszerben való számolásnál érzünk egy kis komikus mellékízt.

Az azonban, hogy a tízes számrendszert megszoktuk, igen sokat jelent. A megszokás nagyon nagy hatalom. Ha valamit megszoktunk, ha valamiben készségeink fejlődtek, az hozzánő az életünkhöz. A helyes megszokás komoly könnyebbséget jelent a munkánkban, a helytelen pedig nagy nehézségeket támaszt. Éppen a megszokás miatt a tízes számrendszer mellett a többinek csekély a gyakorlati jelentősége. A tízes számrendszer annyira hozzánk nőtt, hogy más számrendszerekkel egyenjogúsítani igen nehéz és igen felesleges munka volna.

Mégis felvetődik a kérdés: mi a szerepe a nem tízes alapú számrendszereknek az általános iskolában? Felvetődik, mert a tízes számrendszer tudatosítása igen fontos feladat. Enélkül ugyanis verbalizmusba esünk, használjuk a »tízes számrendszer« kifejezést anélkül, hogy tartalom lenne a tudatunkban e szavak mögött.

Nézzük, mit mond e kérdésről a módszertani szakirodalom?

Csicsigin: »A tanár ... elmondhatja azt is, hogy nem mindenütt használnak tízes számrendszert és nem is mindig volt használatban. Elmondhatja, hogy a tízes számrendszer mintájára más számrendszereket is készíthetünk ...« »Ez a néhány rövid megjegyzés igen nagy érdeklődést kelt a tanulókban. Ezt az érdeklődést felhasználhatjuk a matematikai szakkör munkájánál« (38. oldal).

Bragyisz: »A felsőbb osztályokban a számtani anyag ismétlése folyamán a helyiértékrendszer alapgondolatának megértése végett célszerű más, nem tizedes alapú számrendszerekkel is foglalkozni ...« (Természetesen Bragyisz a középiskola felsőbb osztályaira gondol.) Ajánlja továbbá a szakkörök és a felsőbb osztályok számára a nehezebb feladatokat is, és ismertet két matematikai játékot, amelyek a kettes, illetve hármas számrendszereken alapulnak (146. oldal).

Pósa Vilmosné központi jegyzete: »A V-es szovjet számtankönyv apróbetűs részben hozza a nem tízes számrendszer ismertetését és felírási módját.« Ismerteti Péter Rózsa dr. kísérletét más számrendszerek játékos tanítására. Hivatkozik arra, hogy kettes számrendszer már a tízes előtt is megvolt, s hangsúlyozza, hogy a számjegy nem azonos fogalom a számmal (36—37. oldal).

Kétségtelen, hogy hasznos volna, ha a tízes számrendszer tudatosítása végett bemutathatnánk az V. osztályban a nem tízes alapú számrendszereket is. Mind az elméleti megfontolások, mind a pedagógiai gyakorlat azt mutatja azonban, hogy ezt nem tehetjük meg. Nem tehetjük meg a gyermek életkora miatt sem, nem tehetjük meg azonban azért sem, mert a hatvány fogalmával a gyermek ekkor még nincs tisztában. Ezért jelzi a szovjet könyv apróbetűsen a nem tízes alapú számrendszerek létezését, ezért tartják a szovjet szakírók szakkörökön ill. középiskola felsőbb osztályaiban tárgyalhatónak ezt a kérdést. V. osztályban a tízes számrendszer ilyen módon való tudatosítása helyett tökéletesen elég, ha a tízes számrendszer célszerűségére mutatunk rá úgy, hogy elvégzünk egy műveletet a mi szokásos arab számjegyeinkkel, s azután elvégezzük ugyanazt római számokkal is. Például:

48,24	XLVIII. XXIV.
96	—C+D+L+X+X+X—C+D+L+X+X+X+
192	+X—L—V—I—I—I—L+CCL+XXV+V+V+V=
1152	=D+D+L+X+X+X+X+X+X+X+X+X+
	+V+V+V—I—I—I=MCLII

Leírva még nem is látszik olyan nagynak a különbség, mint ha megpróbáljuk tényleg elvégezni a szorzást! Egyetlen ilyen példa élesen mutat rá a tízes számrendszer célszerű voltára, s tanításnál ennyi tökéletesen elég.

Szakkörön azonban kitűnően felhasználhatjuk a nem tízes alapú számrendszereket. Itt a legjobb tanulóink vannak, így többet tehetünk: tudatosíthatunk, mélyíthetünk, ízelítőt nyújthatunk tanítványainknak a matematika szépségeiből.

Mielőtt megnézzük, mi az az anyag, ami általános iskolai szakkörön felhasználható, szeretnék valamit hangsúlyozni. Mindennapi életünkhöz nemcsak a tízes számrendszer nőtt hozzá, hanem a tízes számrendszer ki-

5

fejezései is. Ha pl. a 48-at átírom ötös számrendszerbe 143-nak, akkor ezt a számhármast nincs jogom »száznegyvenhárómnak« kimondani. A »száznegyvenhárom« a tízes számrendszer kifejezése. Ha más számrendszerben akarunk számolni, a nagyobb számok kimondására új szavakat kell konstruálnunk. Sőt célszerű volna más számjegyeket is használnunk a megszokottak helyett. Ha ugyanis önkényesen átvesszük a tízes számrendszer kifejezéseit, alapvető fogalmi zavarokat okozunk vele. Pl.

5

az ötös számrendszerben felírt 143 páros szám, hiszen maradék nélkül osztható 2-vel, s ez már zavart okoz. Lehetetlen azt tanítanunk, hogy a 23 a hetes, nyolcas és tízes számrendszerben prímszám, a hatosban és a kilencesben összetett szám, a tizenegyes számrendszerben pedig egyenesen négyzetszám.

Ha a hatot az ötös számrendszerben $\overset{5}{11}$-nek írjük, nevezhetjük pl. ötönegynek. Teljes joggal merülhet azonban fel az aggodalmunk, hogy didaktikailag helytelen lenne a sok új elnevezés bevezetése. Éppen ezért a legcélszerűbb az, ha a fenti számhármast egyszerűen egy—négy—háromnak ejtjük ki. A tízes számrendszer kifejezéseit meg kell hagynunk a tízes számrendszer számára, mert a megszokás miatt a tízes számrendszernek mégis csak kitüntetett szerepe van.

Most pedig nézzük meg, mi az az anyag, amit általánosan iskolai szakkörön tárgyalni lehet?

Írjuk át életünk számadatait más számrendszerbe. A 12 éves gyermek életkora hatos számrendszerben $\overset{6}{20}$ év, a 40 éves tanár életkora $\overset{6}{104}$ év. Szeged város 136 752 lakosa kilences számrendszerre átírva $\overset{9}{227\,526}$ számhatossal, ötös számrendszerre átírva $\overset{5}{13\,334\,002}$ számnyolcassal fejezhető ki. A Tisza 963 km hossza kilences számrendszerben $\overset{9}{1280}$ km, ötösben $\overset{5}{12\,323}$ km alakban írható fel. A Kékes 1015 méter magassága kilencesben $\overset{9}{1347}$ méter, ötösben $\overset{5}{13\,030}$ méter lesz. Ezek a számadatírások mutatják, hogy a jelölés mennyire külsőleges, hiszen sem a Tisza nem lett hosszabb, sem a Kékes nem lett magasabb, sem Szeged nem lett népesebb azáltal, hogy megváltoztattuk a számrendszert.

Érdekes átírni néhány történelmi évszámot. Itt nem kell túlságosan eltérni a tízes alapszámtól, akkor kapunk érdekes eredményt,

	Tízes	Kilences	Tizenegyes
Honfoglalás	896	1205	745
Királyság	1001	1332	830
Dózsa György	1514	2062	1157
Mohács	1526	2075	1168
Martinovics	1795	2414	1392
Szabadságharc	1848	2473	1430
Tanácsköztársaság	1919	2562	1495
Felszabadulás	1945	2601	1509

Természetesen a 11-es számrendszerben már be kell vezetni egy új jelet a tíz jelölésére, s minden 10-nél nagyobb alapszámú számrendszerben annyi új jelre van szükségünk, ahánnyal nagyobb a rendszer alapszáma 10-nél. Például $1444 = \overset{11}{10\alpha 3}$ ahol az α jelenti a tízet.

Mértékrendszerünk a tízes számrendszeren alapul. Hiszen éppen a tízes számrendszerrel való egybehangolás volt az egyik oka az elavult mértékrendszerek elvetésének. A gyermek természetesnek tartja a tizedes számrendszer egységei között az egyszerű összefüggéseket:

1 méter = 10 deciméter = 100 centiméter = 1000 milliméter

Írjuk át a métereket hetes számrendszerre. Ekkor 1 méter = $\overset{7}{13}$ deciméter = $\overset{7}{202}$ centiméter = $\overset{7}{2626}$ milliméter

Természetes törekvés volna, hogy az előző kerekszámú összefüggést tartsuk meg. Ekkor azonban nincs más a számunkra, minthogy a mértékek hosszát hozzáidomítsuk az új számrendszerhez. Ha tehát hetes számrendszerre térünk át, s megtartjuk a régi métert, a deciméter ennek nem tizedrésze, hanem hetedrésze lesz, s i. t. Ilyenformán a deciméter, centiméter, milliméter megnyúlik, a kilométer viszont kisebb lesz. Ugyanez áll természetesen a terület-, térfogat-, űr- és súlymértékekre is.

Az elavult mértékrendszerek és a használatban levő nem tízes alapszámú mértékek összefüggései semmivel sem egyszerűbbek a tízes számrendszerben, mint a többiben. Vegyük pl. az időmértékeket:

1 év = 12 hónap $\approx$ 52 hét $\approx$ 365 nap

1 nap = 24 óra = 1440 perc = 86 400 másodperc.

Ugyanez hatos számrendszerben.

1 év = $\overset{6}{20}$ hónap $\approx$ $\overset{6}{124}$ hét $\approx$ $\overset{6}{1405}$ nap

1 nap = $\overset{6}{40}$ óra = $\overset{6}{10\,400}$ perc = $\overset{6}{1\,504\,000}$ másodperc

Vannak elavult mértékrendszerek, ahol a nem tízes alapú számrendszer egyenesen célszerűbb volna a tízes alapúnál.

Pl. kényelmesebb volna a hatos számrendszer a következőnél:

1 öl = 6 láb = 72 hüvelyk = 864 vonal

Ugyanez hatosban:

1 öl = $\overset{6}{10}$ láb = $\overset{6}{200}$ hüvelyk = $\overset{6}{4000}$ vonal

Másutt viszont a nyolcas számrendszer volna célszerűbb:

1 akó = 64 icce Nyolcasban 1 akó = $\overset{8}{100}$ icce

1 quarter = 8 bushel = 64 gallon = 512 pint

1 quarter = $\overset{8}{10}$ bushel = $\overset{8}{100}$ gallon = $\overset{8}{1000}$ pint

Pénzrendszerünk s általában a különböző nevű számok tárgyalásánál a következő érdekességek merülnek fel:

Egy gyermeknek van 8 Ft 60 fillérje. Írjuk át ezt a pénzt ötös számrendszerre! A 8 Ft nyilván átírható minden értékváltozás nélkül $\overset{5}{13}$ Ft-ra. A 60 fillér jelölésére azonban két útunk van.

1. Egyszerűen átírjuk a 60 fillért $\overset{\underset{\smile}{5}}{220}$ fillérre, s ekkor tudomásul vesszük, hogy az ötös számrendszerben

$$1\ \text{Ft} = \overset{\underset{\smile}{5}}{400}\ \text{fillér}$$

2. A 60 fillért úgy tekintjük, mint a forint háromötödrészét, s ekkor a fillérek nagyságát úgy változtathatjuk meg, hogy az új fillér az eredeti fillérnek négyszerese lesz. Ekkor a 60 fillér jelölése $\overset{\underset{\smile}{5}}{30}$ új fillér.

Végezhetünk műveleteket más számrendszerekben természetes számokkal. Az összeadás és kivonás csak annyival lesz nehezebb, hogy nagyon kell vigyázni a tízes kör átlépése helyett a hetes, ötös, stb. kör átlépésére. A szorzáshoz és osztáshoz azonban új szorzótáblát kell készítenünk. Nézzük pl. a kilences számrendszer szorzótábláját:

1	2	3	4	5	6	7	8	10
2	4	6	8	11	13	15	17	20
3	6	10	13	16	20	23	26	30
4	8	13	17	22	26	31	35	40
5	11	16	22	27	33	38	44	50
6	13	20	26	33	40	46	53	60
7	15	23	31	38	46	54	62	70
8	17	26	35	44	53	62	71	80
10	20	30	40	50	60	70	80	100

Érdekes itt — és más területeken később is — megfigyelni, hogy vannak törvényszerűségek, amelyek függetlenek a számrendszertől. Így pl. a kommutatív, asszociatív és disztributív szabály. Vagy nézzük pl. azt a szabályt, hogy páratlan szám szorozva páratlannal ismét páratlant ad, viszont egyetlen páros szorzótényező párossá teszi a szorzatot. Felületes ránézéssel úgy látjuk, hogy a kilences szorzótáblánál ez a két szabály nem marad érvényben, ha azonban tekintetbe vesszük, hogy a páros szám az a szám, amelyik 2-vel maradék nélkül osztható, akkor azt látjuk, hogy a szabály itt is érvényben maradt. Ugyanis a kilences számrendszerben $6 \cdot 8 = \overset{\underset{\smile}{9}}{53}$, de a kilences számrendszer $\overset{\underset{\smile}{9}}{53}$-ja negyvennyolc, azaz olyan szám, amely osztható 2-vel.

Lényegesen nehezebb feladat, tehát csak igen jó tanulókör bírja el, ha előre elvégzünk egy műveletet, s a tanulónak azt kell megállapítani, hogy hányas számrendszerben végeztük el. Itt ugyanis igen erős önállóságra és ötletességre van szükség. Pl.

$$\begin{array}{r} 43 \cdot 32 \\ \hline 141 \\ 234 \\ \hline 3031 \end{array}$$

A tanulók több jelből is megállapíthatják, hogy a szorzás ötös számrendszerben van. Így pl. arról, hogy $2 \cdot 3$ szorzás után 1-et írtunk le. Vagy abból, hogy az összeadásnál $4 + 4$ összeadásakor 3-at írtunk le. Ezek azonban — mint említettem — fejlettebb gondolkodást kívánnak.

A természetes számok tulajdonságai közül ugyancsak igen sok független a számrendszertől. Érvényben marad pl. az aritmetika alaptétele: minden összetett szám a sorrendtől eltekintve egy és csak egyféleképpen bontható fel primszámok szorzatára.

A természetes számok tulajdonságai közül azok tárgyalhatók szakkörön, amelyeket általános iskolában tanultunk. Így pl. jól tárgyalható az oszthatóság. Közismert a tízes számrendszerben a 2 és a 3 oszthatósági szabálya: 2-vel azok a számok oszthatók, amelyeknek az utolsó jegye osztható 2-vel. Hárommal azok a számok oszthatók, amelyek jegyeinek összege osztható 3-mal. Azt is tudjuk, hogy 6-tal az a szám osztható, amely 2-vel is, 3-mal is osztható. — Ha a számokat kilences számrendszerbe írjuk át, ez a két oszthatósági szabály felcserélődik: 2-vel az a szám lesz osztható, amelyiknél a jegyek összege osztható 2-vel, hárommal viszont az a szám lesz osztható, amelynek az utolsó jegye osztható 3-mal. A 6-tal való oszthatóság fenti szabálya viszont változatlan marad. — Tizenkettes számrendszerben mind a 2-vel, mind a 3-mal való oszthatóságnál a legkisebb helyiértékű jegyet kell figyelembe venni, hetes számrendszernél viszont a számjegyek összegét. Mindezek a törvények természetesen könnyen bizonyíthatók is, általános iskolai szakkörön azonban a bizonyítás mellőzése látszik célszerűbbnek a gyermek életkori sajátosságai miatt. Meg kell elégednünk a megfigyeléssel. Könnyű belátnunk — a tanárnak — hogy egy (k) alapú számrendszerben (k—l)-gyel mindig az a szám osztható, amelynek a jegyei összege osztható (k—l)-gyel.

Érdekes eredményeket kapunk, ha legnagyobb közös osztót, ill. legkisebb közös többszöröst keresünk más számrendszerben. Vegyünk egy példát! 24 és 60 legnagyobb közös osztója 12, legkisebb közös többszöröse 120. Írjuk át ezt hatos és hetes számrendszerre.

A hatos nem lesz nagyon furcsa:

$\overbrace{40}^{6}$ és $\overbrace{140}^{6}$ legnagyobb közös osztója $\overbrace{20}^{6}$, legkisebb közös többszöröse $\overbrace{320}^{6}$

Annál meglepőbb a hetes számrendszerben az eredmény:

$\overbrace{33}^{7}$ és $\overbrace{114}^{7}$ legnagyobb közös osztója $\overbrace{15}^{7}$, legkisebb közös többszöröse $\overbrace{231}^{7}$.

Írjuk fel az első 25 primszámot: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Átírva ezeket a primszámokat pl. ötös számrendszerbe szokatlan képet kapunk: 2, 3, 10, 12, 21, 23, 32, 34, 43, 104, 111, 122, 131, 133, 142, 203, 214, 221, 232, 241, 243, 304, 313, 324, 342.

Mivel a párosság definíciója most is az marad, hogy az a páros szám, amelyik maradék nélkül osztható 2-vel, itt is csak egyetlen páros primszám marad: 2. A tízes számrendszerben arról ismertük meg a páros számokat, hogy a legkisebb helyiértékű jegye páros volt. Itt ezt nem használhatjuk, mert pl. 32 primszám (értéke tizenhét); pedig az egyesek helyén 2 áll.

Megfigyelhetjük a tízes számrendszerben, hogy az 5-től eltekintve egyetlen egy ötre végződő primszám sincs. Ugyanúgy megfigyelhető, hogy pl. a hatos számrendszerben eltekintve magától a 3-tól egyetlen 3-ra végződő primszám sincs. Bizonyítása nem nehéz, de azért általános iskolai szakkörre sok. Mindazokban a számrendszerekben, amelyekben 2, 3, 5, 7 számjegyek egyáltalán léteznek, ezek a számjegyek primszámot jelentenek. Viszont nincs olyan számpár, számhármas s. i. t., amely minden számrendszerben primszám volna (ka + b nem lehet primszám mindig, mert pl. k = 2b választás esetén nem az).

Írjuk fel az első 20 négyzetszámot! 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400. Írjuk át ezeket a számokat ötös számrendszerbe: 1, 4, 14, 31, 100, 121, 144, 224, 311, 400, 441, 1034, 1134, 1241, 1400, 2011, 2124, 2244, 2421, 3100.

A tanulókkal megfigyeltetjük — tanárok részére természetesen bizonyítani is lehet, hogy 1, 4, 9 számok és a 100, 121, 144, 169, 400, 441, 484, 900, 961 számhármasok minden olyan számrendszerben, amelyben egyáltalán léteznek, négyzetszámot jelentenek. Megfigyelhetjük azonkívül, hogy pl. a 32 egyetlen számrendszerben sem jelenthet négyzetszámot. (Nincs 3k + 2 alakú négyzetszám.) Ismeretes, hogy a tízes számrendszer felírási módját használva nincs olyan négyzetszám, amely 2, 3, 7 vagy 8 számjegyekkel végződne. Ha ötös számrendszerre írjuk át a számokat, ott sincs 2 vagy 3 jegyre végződő négyzetszám.

A törtekkel való foglalkozás is sok érdekes problémát vet fel. Megfigyelhetjük, hogy pl. a valódi tört—áltört osztályozás független a számrendszertől. Független a számrendszertől az az eljárás is, ahogy a vegyes számot áltörtté alakítjuk át, illetve fordítva, ahogy az áltörtet vegyes számmá. Még a közönséges törtek átalakítása tizedes — illetve nyolcados, ötödös, stb. — törtekké is változatlan marad.

A törtek egyszerűsítésénél minden számrendszerben igaz pl. hogy 3/6 = 1/2. (Természetesen csak azokban, amelyekben e számjegyek szerepelnek.) Néhány megszokásunkkal ellenkező egyszerűsítés azonban meglephet bennünket. Ilyent pl. ötös számrendszerben a következő egyszerűsítés: $\overset{5}{\frac{13}{31}} = \frac{1}{2}$. Ezzel szemben ugyancsak ötös számrendszerben a 12/32 tört nem egyszerűsíthető, mert mind a számlálója, mind a nevezője primszám. A törtekkel való műveletek, közös nevezőre hozás gyakran mutat ilyen furcsaságot.

A tizedestört kifejezetten a tízes számrendszerre épülő könnyebb leírási mód, így a számrendszer megváltoztatásával kapcsolatban sok érdekes probléma vetődik fel. Elsősorban maga a tizedestört elnevezés válik helytelenné, helyette ötödös, nyolcados törtről kell beszélnünk. A felírásnál azt tapasztaljuk, hogy pl. a »legszelídebb« törtünk az $^1/_2$ ötös számrendszerre átírva végtelen szakos tizedes törtet ad: $0{,}\dot{2}$. Ugyancsak szakaszos lesz az $^1/_3$, $^1/_4$. Általában primszám alapszámú rendszerben minden olyan tört, amelynek nevezője nem 10^n alakú a leegyszerűsített formájában, szakaszos »tizedestört« lesz.

Összetett alapszámú számrendszereknél felnőttek részére nem nehéz egyszerű szabályok megállapítása, általános iskolás gyermek számára azonban már sok. Ugyancsak megállapíthatjuk, hogy az a szabály, hogy p/q tört tizedessé átírva mindig véges, vagy szakaszos tizedes törtet ad, minden számrendszerre átvihető. Megállapítható az is, hogy nincs olyan alapszámú számrendszer, amelyre átírva minden p/q alakú tört véges tört lenne, mert ekkor ennek az alapszámnak valamennyi primfaktort tartalmaznia kellene. Ezek a megállapítások természetesen csak a mi részünkre szólnak, általános iskolai gyermek számára nehezek.

Mi lesz a százalékszámítással más alapszámú számrendszerekben? A százalékszámítás ugyanis ugyancsak a tízes számrendszer terméke. A százalék más számrendszerben nem a századrészt fogja jelenteni, hanem anynyiadrészt, amennyit az illető számrendszerben a 100 számhármas jelent. Ötös számrendszerben tehát a % jelölés huszonötödrészt, hatosban harminchatodrészt jelent.

Nézzünk egy konkrét feladatot: Egy ember 1600 Ft fizetését a következőképpen osztja be:

80	Ft	lakbér	5%
640	„	élelem	40%
120	„	fűtés	7 és $^{1}/_{2}$%
520	„	ruházkodás	32 és $^{1}/_{2}$%
240	„	egyéb kiadás	15%

Ötös számrendszerre átírva ugyanez a feladat: Egy ember 22 400 Ft fizetését a következőképpen osztja be:

310	Ft	lakbér	1 és $^{1}/_{4}$%
10 030	„	élelem	20%
440	„	fűtés	1 és $^{12}/_{13}$%
4 040	„	ruházkodás	13 és $^{1}/_{13}$%
1 430	„	egyéb kiadás	3 és $^{3}/_{4}$%

Az átírás annyira groteszk eredményt ad, hogy kénytelen vagyok hangsúlyozni: ugyanazt az összeget ugyanolyan arányban osztottuk fel. csak a számok leírása lett más.

Vegyünk egy másik példát. A gyárban a norma (100%) negyven munkadarab elkészítése. Ekkor,

30	munkadarab elkészítése	75%
40	munkadarab elkészítése	100%
48	munkadarab elkészítése	120%
60	munkadarab elkészítése	150%
80	munkadarab elkészítése	200%
160	munkadarab elkészítése	400%

Készítsük el ugyanezt a táblázatot ötös számrendszerben:

110	munkadarab elkészítése	33 és $^{3}/_{4}$%
130	munkadarab elkészítése	100%
143	munkadarab elkészítése	110%
220	munkadarab elkészítése	122 és $^{1}/_{2}$%
310	munkadarab elkészítése	200%
1120	munkadarab elkészítése	400%

Befejezésül megemlítem azt a két játékot, amelyre a Bragyisz tankönyv céloz, amelyek néhány matematikai szakkörünkben már használatosak. A »varázskártyák« használata természetesen nem »varázslaton«, hanem a kettes számrendszeren alapul.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63	2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 39, 42, 43, 46, 47, 50, 51, 54, 55, 58, 59, 62, 63,	4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31, 36, 37, 38, 39, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 54, 55, 60, 61, 62, 63,
8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63,	16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 31, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63,	32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63,

A gyermek gondol egy számot, s megmondja, hogy pl. az első, harmadik, ötödik és hatodik lapon van rajta. Összeadom e lapok első számait $1 + 4 + 16 + 32 = 53$. A gyermek az 53 számot gondolta.

A játék azon alapul, hogy a kettes számrendszerben két jel: 0 és 1 segítségével minden természetes szám felírható, azaz 2 hatványaiból pusztán összeadással bármelyik természetes szám előállítható úgy, hogy minden 2^n hatványt legfeljebb egyszer vettük igénybe. Hét lappal 127-ig, 8 lappal 255-ig s. i. t. általában n lappal 2^n—1-ig kiterjeszthető a játék. A lapok összeállítása a fenti 6 lap összeállításával analóg.

A hármas számrendszeren alapul a következő játék: a mesebeli kereskedőnek 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 dkg-os súlyai voltak, mindegyikből csak egy darab. Azt állítjuk, hogy ezekkel a súlyokkal közönséges bolti mérlegen a súlyok összegéig bármilyen súlyú árut ki tud mérni. Például 1 és fél kilogramm kimérése: a mérleg egyik serpenyőjébe tesszük a 243 dkg-ost, a másikba $81 + 9 + 3$ dkg-ot. A különbség pontosan 150 dkg.

Az, hogy bármely súly egy és csak egyféleképpen mérhető a mérlegen, annak a következménye, hogy a hármas számrendszerben bármely természetes szám felírható három jellel: 0,1 és 2-vel, azaz 3 hatványaiból csak összeadással és kivonással minden természetes szám előállítható úgy, hogy minden 3^n hatványt csak egyszer vettünk igénybe.

Egy ilyen rövid cikk nem léphet fel a teljesség igényével, nem is ez volt a célom. Csak ötleteket kívántam nyújtani a nem tízes alapú számrendszerek szakköri felhasználására. Amellett szerettem volna rámutatni arra, hogy a nem tízes alapú számrendszerekkel való szakköri foglalkozásnak hozzá kell simulnia az általános iskolai anyaghoz. Nem terjedelmében, hanem mélységében kell növelni a tanulók tudását. Végül célszerűnek látom, ha nem egyszerre tárjuk a gyermek elé az egész anyagot, hiszen az általános iskolai szakkörnek rendszerint több éven át tagjai a gyermekek. Hangsúlyozom azonban azt a véleményt, hogy az anyag kifejezetten szakkörre való, nem pedig tanítási órára.

Irodalom.

Bragyisz: A középiskolai matematikatanítás módszertana. Pp. 952. Budapest, 1954.
Csicsigin: A számtantanítás módszertana. Pp. 386. Budapest, 1951.
Pósáné: A matematikatanítás módszertana. Pp. 215. Budapest, 1954.