HÁROMSZÖGSZERKESZTÉSI PROBLÉMÁK

ÍRTA: BERKES JENŐ

Jelen dolgozatban először is áttekintést nyújtunk az eddig ismert nem szerkeszthető esetekről (amikor a háromszög három független adatból körző vonalzóval nem szerkeszthető), majd rámutatunk az egyes esetek közötti összefüggésekre és új problémákat is tárgyalunk.

A következő táblázat a legkézenfekvőbb esetek összefoglalását adja:

Sorszám	Adat neve	Jele	Szerkeszthető-e a △ vagy nem:	Melyik dolgozatban található:
1.	Magasságvonalak	m_a, m_b, m_c	igen	közismert
2.	Magassági pont csúcsoktól való távolságai	u, v, w	nem	[3]
3.	Magassági pont oldalaktól való távolságai	$m_a - u$ $m_b - v$ $m_c - w$	nem	[3]
4.	Súlyvonalak	s_a, s_b, s_c	igen	közismert
5.	Súlypont csúcsoktól való távolságai	$2/3 \cdot s_a$ $2/3 \cdot s_b$ $2/3 \cdot s_c$	igen	közismert
6.	Súlypont oldalaktól való távolságai	p_a, p_b, p_c	igen	$p_a = \frac{m_a}{3}$ stb.
7.	Belső szögfelezők	w_a, w_b, w_c	nem	[13]; [14]
8.	Beírható kör középpontjának a csúcsoktól való távolságai	e_a, e_b, e_c	nem	[8]
9.	Körülírható kör középpontjának az oldalaktól való távolságai	d_a, d_b, d_c	nem	[8]
10.	Külső érintőkör középpontjának a csúcsoktól való távolságai	$\left.\begin{matrix} I_a A \\ I_a B \\ I_a C \end{matrix}\right\}$ vagy I_b ill. I_c-re	nem	[8]

Jelentse:

I, r a belső érintőkör középpontját és sugarát

$\left.\begin{array}{l} I_a; r_a \\ I_b; r_b \\ I_c; r_c \end{array}\right\}$ a külső érintőkörök középpontjait és sugarait (*a* indexű az *A* csúccsal szemben stb.)

$O; R$ a körülírható kör középpontját és sugarát

M a magassági pontot

S a súlypontot

és természetesen A, B, C a csúcsokat α, β, γ; a, b, c szögeket ill. oldalakat a szokás szerint, $2s = a + b + c$. t pedig a területet.

A 6-os esetre megjegyezzük, hogy a p_a, p_b, p_c-vel jelzett darabok éppen a magasságvonalak harmadrészei. Világos ez ha felrajzoljuk az ún. középháromszöget (melynek csúcsai az oldalak felezőpontjai.) A középháromszög az eredetinek 1 : 2 arányban kicsinyített képe és súlypontja az eredetiével azonos lévén azonnal látható, hogy

$$p_a + \frac{p_a}{2} = \frac{m_a}{2}$$

$$p_a = \frac{m_a}{3}$$

A 2-es és a 9-es eset egymásból következik, csak a középháromszöget kell felrajzolni és világos, hogy a jelzett magasságdarabok épen duplái a körülírható kör középpontja oldalaktól való távolságainak. Tehát:

$$u = 2d_a = 2R\cos\alpha$$

$$v = 2d_b = 2R\cos\beta$$

$$w = 2d_c = 2R\cos\gamma$$

Ugyancsak egymásból következik a 3-as és a 8-as, amint azt a [3] dolgozat egyik korolláriuma mutatja. (Talpponti háromszögre kell gondolni.)

11. A 10-es a [3] dolgozat utolsó korolláriumával azonos tartalmú. Nevezetesen az ABC háromszög és az $I_aI_bI_c$ háromszög viszonyára kell gondolni. ABC háromszög éppen talpponti háromszöge $I_aI_bI_c$-nek, ezért I_aA, I_aB és I_aC darabok az $I_aI_bI_c$-re vonatkozóan *egy magasságvonalat és az ugyanahhoz a csúcshoz tartozó két oldalnak a csúcstól a magasságvonal talppontjáig terjedő részét* jelentik. Ezek az adatok az ABC háromszögre vonatkozóan

$$m_a = c \cdot \sin\beta$$

$$f = c \cdot \cos\alpha$$

$$g = b \cdot \cos\alpha$$

m_a, f és g adottak. Így is tárgyalható a probléma és pl. $c = x$-re ismert összefüggések felhasználásával irreducibilis negyedfokú egyenletre jutunk.

12. A 2-es eset érdekes korolláriumra vezet, ha tompaszögű háromszöget vizsgálunk. Megrajzolva a tompaszöget és annak talpponti háromszögét, kapunk egy nagy hegyesszögű háromszöget, melyre nézve u, v, w a tompaszögű három-

szög *két oldala és a közös csúcshoz tartozó magasságvonaldarab (csúcstól a magassági pontig).* Természetesen direkt úton is tárgyalható ez a probléma is, tehát adottnak tekintve

a, b és $w = 2R\cos\gamma$-t Ez utóbbi azért érdekes, mert két oldal adott. Egyébként olyan eset, melyben 2 oldal szerepel több is ismeretes. Nevezetesen:

13. Nem szerkeszthető a háromszög, ha adva van két oldal és a beírható kör sugara [5].

14. Akkor sem, ha adva van két oldal és valamelyikhez tartozó szögfelező [11].

15. Kimutatjuk most, hogy akkor sem szerkeszthető a háromszög körző vonalzóval, ha adva van *két oldal és a be- és kívülírható körök sugarának viszonya* $\left(\text{persze } \frac{r}{R} \leqq \frac{1}{2}\right)$.

A [4]-es dolgozatban szerepel a

$$2 + \frac{2r}{R} = \left(\frac{a}{b} + \frac{a}{c} - \frac{a^2}{bc}\right) + \left(\frac{b}{a} + \frac{b}{c} - \frac{b^2}{ac}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} - \frac{c^2}{ab}\right)$$

összefüggés. Ha most itt

a, b és $\frac{r}{R} = u$ adottak $c = x$-re nyerjük a következő egyenletet:

$$x^3 - x^2(a+b) + x\cdot[2ab(u+1) - (a^2+b^2)] + a^3 + b^3 - ab\cdot(a+b) = 0.$$

Természetesen $a = b$-re ez reducibilis, de általában nem. Egyébként egyenlőszárú háromszöget r és R-ből szerkeszthetünk, mert ugyancsak [4] szerint egyenlőszárú háromszögre

$$\frac{r}{R} = 2\sin\frac{\gamma}{2} - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

és így γ azaz a szögek kaphatók.

16. a, b és R ismeretében szerkeszthető a háromszög (trivialitás).

17. r_a, r_b, r_c-ből szerkeszthető szintén háromszög. Ez már nem annyira triviális, de az

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

$$t = \sqrt{r\, r_a\, r_b . r_c}$$

$$r_a = \frac{t}{s-a} \text{ stb. mutatják hogyan.}$$

18. Nem szerkeszthető a háromszög, ha adva van a, b és d_c. Ez persze lényegében azonos eset 12-vel hiszen $w = 2d_c$.

19. Ha adva van a, r, R akkor szerkeszthető a háromszög, de felhasználandó Euler összefüggése, mely szerint

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$$

ebből $\overline{OI}$ szerkeszthető és ezután adott sugarú (r) kört kell szerkeszteni, mely az a egyenest érinti és melynek középpontja a R sugarú körrel koncentrikus $\overline{OI}$ sugarú körön van.

20. Érdekes eset, ha m_a, m_b és r van adva. Bár 13. szerint a, b és r esete nem szerkeszthető, a mostani eset igen éspedig elég könnyen, hiszen

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}$$

és innen m_a is kapható.

21. A [8]-as dolgozat tartalmazza még az I_aA, I_bB, I_cC*-ből való szerkeszthetőség* kérdését és elég jelentős számolással ki is derül a szerkeszthetőség. Viszont *triviális,* mert $I_aI_bI_c$ háromszögnek I_aA, I_bB és I_cC éppen magasságvonala és az ABC háromszög $I_aI_bI_c$-nek talpponti háromszöge.

Ezekután természetesen adódik a következő vizsgálat: Tekintsünk az I, I_a, I_b, I_c pontokat. $\binom{4}{2} = 6$ távolság tartozik hozzájuk és ezekből 3-at $\binom{6}{3} = 20$ féleképp választhatunk ki. Persze ebben a *20* esetben vannak, amelyek azonos esetek, csak ciklikus sorrendi különbséget mutatnak. Vizsgáljuk a különböző eseteket:

22. I_aI_b, I_bI_c, I_cI_a eset triviálisan szerkeszthető. (Talpponti háromszög.)

23. II_a, II_b, I_aI_b (vagy ciklikusan) triviálisan szerkeszthető.

24. II_a, II_b, II_c *nem szerkeszthető,* hiszen ez $I_aI_bI_c$-re éppen a 2-es eset.

25. II_a, I_aI_b, I_aI_c (vagy ciklikusan) *ez sem szerkeszthető,* mert ez éppen a 12-es eset.

26. II_a, II_b és I_aI_c vagy II_a, II_b és I_bI_c (vagy ciklikusan). Ez az eset direkt módon fogalmazva az az eset, ha adva van u, v és a. Ez szerkeszthető, mert $u = a \operatorname{cotg} \alpha$-ból [3] α, $u = 2R \cos \alpha$-ból R majd $v = 2R \cos \beta$-ból β stb. kapható.

27. Végül marad

$$I_aI_b,\ I_aI_c \text{ és } II_b \text{ vagy } I_aI_b,\ I_aI_c \text{ és } II_c$$

(esetleg ciklikusan) eset. Ez lényegében az a, b, u eset és nyilván szerkeszthető.

Végül tehát minőségileg *6* különböző esettel álltunk szemben és ezekből 4 volt szerkeszthető, 2 nem.

A szögfelező az a gyanús adat, mely sokszor a szerkeszthetetlenség oka. Már szó volt egy ilyen esetről (14). A [11]-es dolgozat említi még a következőket:

28. a, b és w_γ szerkeszthető.

29. c, m_c és w_α nem szerkeszthető.

30. c, s_a és w_α nem szerkeszthető.

Csatoljuk most ide a

31-es a, α, w_α esetet. Ez jó példa arra, hogy ilyen kérdésekben milyen óvatosság ajánlatos. a és α ismeretében u. i. R kapható és ha most a R körbe az a húrt berajzoljuk és az ív felezőpontjából kiinduló sugarakra rámérjük w_α-t a-tól, akkor a végpontok nyilván az egyenes konhoisán (Nikomedes-féle konhois) vannak és ennek kellene a körrel való metszéspontja. A konhois viszont negyedrendű, tehát a szerkesztés nem végezhető el, mondhatnánk könnyelműen. Viszont elvégezhető, amint az [12]-ben megtalálható.

Egyébként a szerkeszthetőség kérdése, ha a probléma irreducibilis harmadfokú egyenletre vezet, akkor el van döntve. Máskor azonban a helyzet nem mindig olyan egyszerű. Már [1] felhívja a figyelmet, hogy ha geometriai helyekkel okoskodunk, akkor elővigyázat szükséges. Pl. a Pascal-féle csiga metszéspontja a kettőspontján átmenő egyenessel körző vonalzóval szerkeszthető, de persze tetszőleges egyenessel nem. Értékes megállapításokat találunk [9]-ben is, amennyiben kiderül, hogy irreducibilis 5-öd, 6-od, 7-ed, 9-ed és 10-ed fokú egyenletek gyökei sem szerkeszthetők. Az irreducibitás eldöntése különben igen nehéz algebrai vizsgálatokat igényel egyes esetekben. [10], [13].

Befejezésül meg kell említenem, hogy ennek a témakörnek igen nagy jelentősége van a főiskolai oktatás szempontjából. Nevezetesen a szakdolgozat kötelezővé tétele óta állandó probléma, hogy olyan témát adjunk a hallgatóknak, amellyel meg tudnak birkózni és amely mégis önálló munkán alapul, tehát nem puszta másolás. A háromszögszerkesztések témaköre kimeríthetetlen ebből a szempontból és itt mindjárt közlünk ilyen szakdolgozati témákat:

1. Tekintsük az m_a, m_b, m_c, s_a, s_b, s_c és w_α 7 adatot és dolgozzuk fel a belőlük adódó összes lehetséges szerkesztési feladatokat. Ez összesen $\binom{7}{3}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2}=35$ feladat, melyek között közismert feladatok is vannak, de eddig még feldolgozatlanok is akadnak különösen azok, amelyekben w_α szerepel.

2. Más adatcsoport is megadható, például $r, R, r_a, r_b, r_c, a, m_a$ stb. A feladatok rendszerezése és hogy a hallgató meddig tud eljutni egy-egy probléma tárgyalásában az mind igen jó fényt vet szorgalmára és tehetségére.

3. M, S, O, I mennyire határozza meg a háromszöget? Persze csak három adatot jelent ez a négy nevezetes pont. Ez különben már igen nehéz probléma és a belőlük való szerkeszthetőség kérdése különösen. Vegyük például M, O és I-t, akkor ismeretes, hogy

$$\overline{OI}^2=R^2-2Rr$$

$$\overline{MO}^2=R^2(1-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$$

viszont $\overline{MI}$-re nem találtam összefüggést az irodalomban. Először ezt kellene megkeresni és azután vizsgálható lenne a felvetett probléma.

4. Ha a háromszög ún. szimédiánjait is bevesszük az adatok közé, akkor különösen sok új esetünk lesz. (Szimédián a súlyvonalnak a szögfelezőre vonatkozó szimmetrikusa.) A három szimédián is egy pontban metszi egymást és hossza

$$\partial_a=\frac{bc}{b^2+c^2}\cdot\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

a szögfelezőé:

$$w_a=\frac{\sqrt{bc}}{b+c}\cdot\sqrt{(b+c)^2-a^2}$$

míg a súlyvonalé

$$s_a=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

ezek párosításával is sok érdekes eset adódik. Pl. ∂_α, w_α és s_α-ból szerkeszthető háromszög.

Különben megírásra vár egy nagyméretű monográfia a háromszögekre vonatkozóan. Igen sok adat található a [2], [6] és [7] művekben, de egyik sem elégít ki minden igényt. Szerintem ezt a monográfiát a főiskoláknak kellene megírni, mert az anyag természete olyan, hogy a mi oktatásunkban lenne legjobban kihasználható.

IRODALOM

[1] *Adler A.:* Theorie der geometrischen Konstruktionen. (1906). p. 195—199.
[2] *Altshiller—Court:* College Geometry. (1952).
[3] *Berkes J.:* Egy háromszögszerkesztési probléma. Szegedi Ped. Főisk. Évkönyv. (1956). p. 233—235.
[4] *Berkes J.:* A talppbnti háromszögről. K. Mat. Lapok. (1956) 3. p. 66—72.
[5] *Buchner P.:* Nichtkostruirbare Aufgabe des Dreiecks. Elemente der Math. Bd. II. (1947). p. 14—16.
[6] F. g. m.: Exercises de Géometrie. (Paris).
[7] *Lalesco T.:* La géometrie du triangle. (Paris) (1937).
[8] *Sz. Nagy, Gy.:* Zwei nichtkonstruirbaren Aufgaben des Dreiecks. Elemente der Math. Bd. VI. (1952). p. 81—82.
[9] *Sz. Nagy, Gy.:* A geometriai szerkesztések elmélete. (1943) p. 16.
[10] *Neiss, A.:* Über die Unmöglichkeit der Konstruktion eines Dreiecks aus seinem drei Winkelhalbierenden. Journal für die r. u. a. Math. (1937). p. 129—133.
[11] *Roth—Desmeules:* Noch eine Aufgabe die mit Zirkel und Lineal nicht lősbar ist. Elemente der Math. Bd. III. (1948) p. 65—67.
[12] *Schwering, D.:* Hundert Aufgaben.
[13] *Waerden* v. d.: Über die Bestimmung eines Dreiecks aus seinem Winkelhalbierenden. Journal für die r. u. a. Math. (1938). p. 65—68.
[14] *Wolff, H.:* Über die Bestimmung des Dreiecks aus seinem Winkelhalbierenden. Journal für die r. u. a. Math. (1937) p. 134—151.

ПРОБЛЕМЫ ПОСТРОЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

Е. Беркеш

Статья резюмирует до сих пор известные случаи, когда треугольника нельзя построить с циркулем и линейкой, между тем он излагает и новые случаи, эти следующие:

1. Треугольника *нельзя построить, если сданы отношения двух стороны и* радиуса внутреннего и внешнего круга.

2. Треугольника нельзя построить, если сданы a, b и $w = 2R\cos\gamma$ (w = часъ высотной линии от высотного пункта до острия.)

3. Он занимается и теми случаями, которые могут образовать из I, I_a, I_b, I_c. (I, I_a, I_b, I_c = ценсры касательного круга.)

PROBLEME DER DREIECKKONSTRUIERUNG

von

J. BERKES

Der Artikel fasst die bisher bekannten Fälle zusammen, in welchen das Dreieck mit Hilfe von Zirkel und Lineal nicht konstruierbar ist und bringt auch neue Fälle. Und zwar:

1. Das Dreieck kann nicht konstruiert werden, wenn zwei Seiten und das Verhältnis der Radien des eingeschriebenen und des umschriebenen Kreises gegeben ist.

2. Das Dreieck kann nicht konstruiert werden, wenn gegeben ist: a, b und $w = 2R\cos\gamma$. (w ist der Teil der Höhenlinie vom Höhenpunkt bis zur Ecke, der Seite c gegenüber.)

3. Der Verfasser behandelt auch jene Fälle, welche aus I, I_a, I_b, I_c gebildet werden können. (I, I_a, I_b, I_c sind die Mittelpunkte der inneren und äusseren Berührungskreise.)