AZ N-ED RENDŰ ALGEBRAI GÖRBÉK PONTJAINAK VIZSGÁLATA

Írta: LERNER KÁROLY

Azon X pontok halmazát, amelyeknek koordinátái egy n-ed fokú egyenletet elégítenek ki n-ed rendű algebrai görbéknek nevezzük, az egyenletet pedig az n-ed rendű görbe egyenletének mondjuk, mely homogén koordinátákban ilyen alakú:

$$f(x)=\sum_{i_1+i_2+i_3=n} a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}=a_{n00}x_1^n+a_{n-110}x_1^{n-1}x_2+a_{n-101}x_1^{n-1}x_3+\cdots=0.$$

Polározás művelete

$f(x)$-nek x szerinti differenciálhányadosait $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$-et komponáljuk rendre egy tetszőleges Y pont $y_1y_2y_3$ koordinátáival: $\frac{\partial f}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}y_2+$ $+\frac{\partial f}{\partial x_3}y_3=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial}{\partial x_3}y_3\right)f(x)=\triangle_y f(x)$. (Ez csak jelölési mód.) Ezt a műveletet polározás műveletének nevezzük, $\triangle_y f(x)$ pedig Y pontnak az $f(x)$-re vonatkoztatott első polárisa.

$\triangle_y f(x)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}y_i$ az x-ben $n-1$-ed fokú, tehát ennek is képezhetjük első polárisát Y pontra vonatkozólag: $\triangle_y\ (\triangle_y f(x))=\triangle_y^2 f(x)=\frac{\partial(\triangle_y f(x))}{\partial x_1}y_1+$ $+\frac{\partial(\triangle_y f(x))}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial(\triangle_y f(x))}{\partial x_3}y_3$. Ez így is írható: $\triangle_y^2 f(x)=\sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_i}y_k y_i$. Végezzük el $\triangle_y f(x)$-en a polározás műveletét:

$$\triangle_y^2 f(x)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}y_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}y_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}y_3\right)y_1+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}y_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}y_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}y_3\right)y_2+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_1}y_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\partial x_2}y_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}y_3\right)y_3.$$

Ez teljes négyzet, amit akkor látunk, ha elvégezzük a szorzást és azt megfelelően

rendezzük: $\triangle_y^2 f(x)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}y_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}y_1y_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}y_2^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}y_1y_3+\cdots\right)$.
Ebből azt látjuk, hogy minden poláris első polárisa teljes négyzet. Így is jelölhetnénk: $\triangle_y^2 f(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial}{\partial x_3}y_3\right)^2 f(x)$, ahol $\triangle_y^2$ azt jelenti, hogy $f(x)$-re kétszer kell alkalmazni a polározás műveletét.

Vezessük be a következő jelölést: $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2}=f_{11}$, $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i\partial x_k}=f_{ik}$, $f_{ik}=f_{ki}$, akkor $\triangle_y^2 f(x)=f_{11}y_1^2+2f_{12}y_1y_2+f_{22}y_2^2+2f_{13}y_1y_3+2f_{23}y_2y_3+f_{33}y_3^2$. Ez egy kúpszelet egyenlete, mely az Y pontnak $f(x)$-re vonatkoztatott második polárisa. Tehát $f(x)$ görbének második polárisa kúpszelet, vagy a görbe első polárisának első polárisa kúpszelet.

Az $f(x)$ görbe harmadik polárisát úgy nyerjük, hogy a második polárisát $\triangle_y^2 f(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial}{\partial x_3}y_3\right)^2 f(x)$ mégegyszer polározzuk: $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial}{\partial x_3}y_3\right)\triangle_y^2 f(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial}{\partial x_3}y_3\right)^3 f(x)=\triangle_y^3 f(x)$.

Ezek után felírhatjuk $f(x)$-nek k-adik polárgörbéjét: $\triangle_y^k f(x)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}y_1+\frac{\partial}{\partial x_2}y_2+\frac{\partial}{\partial x_3}y_3\right)^k f(x)=\sum\frac{k!}{i_1!\,i_2!\,i_3!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}y_1\right)^{i_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}y_2\right)^{i_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}y_3\right)^{i_3}\right\}f(x)=$
$=\sum\frac{k'}{i_1!\,i_2!\,i_3!}\frac{\partial^{i_1+i_2+i_3}f(x)}{\partial x_1^{i_1}\partial x_2^{i_2}\partial x_3^{i_3}}y_1^{i_1}y_2^{i_2}y_3^{i_3}$, ahol $i_1+i_2+i_3=n$. Ez x-ben $n-k$-ad, y-ban pedig k-ad fokú, vagyis ez $n-k$-ad rendű görbe.

Tehát összegezve a következőt mondhatjuk: $f(x)=f(x_1, x_2, x_3)=0$ görbének

első polárisa $\triangle_y\ f(x)=0$ x-ben $n-1$-ed fokú, y-ban első fokú. Ez az $f(x)=0$ görbe első polárgörbéje.
második polárisa $\triangle_y^2\ f(x)=0$ x-ben $n-2$-ed, y-ban másod fokú. Ez $f(x)=0$ görbe második polárgörbéje.
⋮
k-adik polárisa $\triangle_y^k\ f(x)=0$ x-ben $n-k$-ad, y-ban k-ad fokú. Ez $f(x)=0$ görbe k-adik polárgörbéje.
⋮
$n-2$-dik polárisa $\triangle_y^{n-2}f(x)=0$ x-ben másod, y-ban $n-2$-ed fokú. Ez $f(x)=0$ görbe $n-2$-dik polárgörbéje, a polárkúpszelet.
$n-1$-dik polárisa $\triangle_y^{n-1}f(x)=0$ x-ben első, y-ban $n-1$-ed fokú. Ez $f(x)=0$ görbe $n-1$-dik polárgörbéje, a poláregyenes.

Tehát egy n-ed rendű görbének $n-1$ polárgörbéje van.

Polárgörbék egyenletének x szerint való rendezése

Az $f(x_1, x_2, x_3)$ függvénynek $x_i + \lambda y_i$ helyen Taylor sorba fejtett alakja

$$\text{I. } f(x+\lambda y) = f(x) + \frac{\triangle_y f(x)}{1!}\lambda + \frac{\triangle_y^2 f(x)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{\triangle_y^k f(x)}{k!}\lambda^k + \cdots + \frac{\triangle_y^n f(x)}{n!}\lambda^n$$

$$\text{II. } f(y+\lambda x) = f(y) + \frac{\triangle_x f(y)}{1!}\lambda + \frac{\triangle_x^2 f(y)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{\triangle_x^k f(y)}{k!}\lambda^k + \cdots + \frac{\triangle_x^n f(y)}{n!}\lambda^n$$

I-ben y-nak $f(x)$-re vonatkoztatott polárisai szerepelnek, II-ben x-nek $f(y)$-ra vonatkoztatott polárisai vannak. Ha $\lambda = 1$, akkor I $\equiv$ II. Ebből következik, hogy az x-ben n-ed fokú tagok egymással megegyeznek, ugyanis az $n-1$-ed fokú tagok is megegyeznek s. i. t.

I-ben x-ben n-ed fokú tag $f(x)$, II-ben az n-ed fokú tag $\frac{1}{n!}\triangle_x^n f(y)$

I-ben x-ben $n-1$-ed fokú tag $\triangle_y f(x)$, II-ben $n-1$-ed fokú tag $\frac{1}{(n-1)!}\triangle_x^{n-1} f(y)$

I-ben x-ben $n-k$-ad fokú tag $\frac{1}{k!}\triangle_y^k f(x)$, II-ben $n-k$-ad „ „ $\frac{1}{(n-k)!}\triangle_x^{n-k} f(y)$.

Tehát általában ezt nyertük: $\frac{1}{k!}\triangle_y^k f(x) = \frac{1}{(n-k)!}\triangle_x^{n-k} f(y)$. Ha ezt nullává tesszük: $\frac{1}{k!}\triangle_y^k f(x) = \frac{1}{(n-k)!}\triangle_x^{n-k} f(y) = 0$ azaz $\triangle_y^k f(x) = 0$, $\triangle_x^{n-k} f(x) = 0$. Ez a két egyenlet ugyanazon görbének az egyenlete. Ha X pont kielégíti az elsőt, akkor kielégíti a második egyenletet is. Így a polárgörbék egy más, x-ek szerint rendezett alakját kaptuk.

Pl. $\triangle_y^{n-1} f(x) = 0$. Itt $f(x)$-et $n-1$-szer kellene polározni, ehelyett $\triangle_x f(y) = 0$ is írható, mely x-ben elsőfokú, úgy mint $\triangle_y^{n-1} f(x) = 0$, de az előnye az, hogy $\triangle_x f(y) = 0$-nál $f(y)$-t csak egyszer kell polározni. Vagyis jelen esetünkben ahelyett, hogy $f(x)$-et $n-1$-szer polároznánk y-ra, elég $f(y)$-t egyszer polározni x-re. Ez most x-ben elsőfokú, tehát a poláregyenes egyenlete, melynek x_1, x_2, x_3 szerint rendezett alakja: $\frac{\partial f}{\partial y_1}x_1 + \frac{\partial f}{\partial y_2}x_2 + \frac{\partial f}{\partial y_3}x_3 = 0$.

Ezek után a polárgörbék x illetve y szerint rendezett alakja:

első polárgörbe $\triangle_y f(x) = 0$ vagy $\triangle_x^{n-1} f(y) = 0$
második polárgörbe $\triangle_y^2 f(x) = 0$ vagy $\triangle_x^{n-2} f(y) = 0$
⋮
k-ik polárgörbe $\triangle_y^k f(x) = 0$ vagy $\triangle_x^{n-k} f(y) = 0$
⋮
$n-2$-ik polárgörbe $\triangle_y^{n-2} f(x) = 0$ vagy $\triangle_x^2 f(y) =$

$$= 0\left(\frac{\partial}{\partial y_1}x_1 + \frac{\partial}{\partial y_2}x_2 + \frac{\partial}{\partial y_3}x_3\right)^2 f(x) =$$

$= 0$ polárkúpszelet.

$n-1$-ik polárgörbe $\triangle_y^{n-1} f(x)=0$ vagy $\triangle_x\, f(y)=$

$$=0\left(\frac{\partial}{\partial y_1}x_1+\frac{\partial}{\partial y_2}x_2+\frac{\partial}{\partial x_3}x_3\right)f(x)=$$

$=0$ poláregyenes.

Az n-ed rendű görbék egy tetszőleges egyenessel való metszéspontjai

Az egyenes egy tetszőleges pontja $y+\lambda x$. Ez a pont rajta van a görbén, ha a pont koordinátái kielégítik a görbe $f(x)=0$ egyenletét, azaz $f(y+\lambda x)=0$. Ezt λ hatványai szerint rendezzük: $f(y+\lambda x)=f(y)+\triangle_x f(y)\frac{\lambda}{1!}+\triangle_x^2 f(y)\frac{\lambda^2}{2!}+$ $+\cdots+\triangle_x^n f(y)\frac{\lambda^n}{n!}=0$. Az egyenletnek annyi pontja van a görbén, ahány λ-ra ez az egyenlet teljesül. Egyenletünk λ-ban n-ed fokú, gyökei $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$, így egy n-ed rendű görbének n közös pontja van egy egyenessel. Az egyenesnek a görbével való metszéspontjai: $y+\lambda_i x_i=1,2,\ldots,n$. Ezért azt a görbét, mely a koordinátákban n-ed fokú, n-ed rendű görbének nevezzük.

Az n-ed rendű görbe pontjainak vizsgálata

Az n-ed rendű görbe egyszeres pontjai:

Ha egy YX egyenes Y pontja a görbén van, akkor $f(y)=0$. Az egyenesnek a görbével való metszéspontjait meghatározó egyenlet

$$f(y+\lambda x)=\triangle_x f(y)\frac{\lambda}{1!}+\triangle_x^2 f(y)\frac{\lambda^2}{2!}+\triangle_x^3 f(y)\frac{\lambda^3}{3!}+\cdots+\triangle_x^n f(y)\frac{\lambda^n}{n!}=0.$$

Ebből λ kiemelhető:

$$f(y+\lambda x)=\lambda\left(\triangle_x f(y)+\triangle_x^2 f(y)\frac{\lambda}{2!}+\triangle_x^3 f(y)\frac{\lambda^2}{3!}+\cdots+\triangle_x^n f(y)\frac{\lambda^{n-1}}{n!}\right)=0. \quad \text{I.}$$

Ha Y olyan pontja a görbének, hogy $\frac{\partial f}{\partial y_1},\frac{\partial f}{\partial y_2},\frac{\partial f}{\partial y_3}$ nem mind nulla, akkor $\triangle_x f(y)=\frac{\partial f}{\partial y_1}x_1+\frac{\partial f}{\partial y_2}x_2+\frac{\partial f}{\partial y_3}x_3\neq 0$. Ha $\triangle_x f(y)\neq 0$ ez azt jelenti, hogy nem minden X pont koordinátája elégíti ki. Az $Y\,X$ egyenes az X helyzetétől függ. Ha Y-t más és más X-el kötjük össze, akkor Y ponton sugársor jön létre, melynek van egy nevezetes pontja. Ha Y pont a görbének tagja, akkor az Y pontnak minden polárisa átmegy az Y ponton, mint póluson. Tehát az Y pontnak a poláregyenese is átmegy az Y ponton, vagyis a görbe egyik Y pontjához tartozó sugársornak van egy egyenese, mely az Y pontnak poláregyenese. Azt mondhatjuk, hogy a görbe egy Y pontjához tartozó sugársorban benne van az Y pont poláregyenese is.

Vegyünk fel egy X pontot. Ez vagy rajta van a poláregyenesen, vagy nincs rajta.

α) eset: X nincs rajta a poláregyenesen, akkor a koordinátái a polár-egyenes egyenletét nem teszik nullává, vagyis ekkor $\triangle_x f(y) \neq 0$. Határozzuk meg egy ilyen nem a polláregyenesen levő X ponton és a kúpszeleten levő Y ponton átmenő egyenesnek a görbével való metszéspontjait. Ekkor $f(y)=0$ $\triangle_x f(y) \neq 0$ és a metszéspontokat meghatározó egyenlet I. lesz. Ennek egyik gyöke $\lambda_1=0$, mely csak egyszeres gyök, mert $\triangle_x f(y) \neq 0$ és így λ csak az első hatványon emelhető ki, a többi $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ gyökök egyike sem egyenlő nullával. Az első metszéspont $y+\underbrace{\lambda_1 x}_{0}=y$, a második metszéspont $y+\lambda_2 x, \ldots$ ... az n-edik metszéspont $y+\lambda_n x$. Ez pedig azt mondja ki, hogy a sugársorban azon sugaraknak, melyek nem esnek össze a poláregyenessel, csak egy metszéspontja esik Y-ba.

β) eset: X rajta van a poláregyenesen. Nézzük milyen sajátsága van ezen egyenesnek. Határozzuk meg ezen egyenesnek, azaz a poláregyenesnek a görbével való metszéspontjait. Ekkor $f(y)=0$, mert Y pont a görbén van, és $\triangle_x f(y)=0$, mert X rajta van a poláregyenesen. Ekkor I. egyenletünkből λ^2 kiemelhető.

$$\lambda^2\left(\triangle_x^2 f(y)\frac{1}{2!}+\triangle_x^3 f(y)\frac{\lambda}{3!}+\cdots+\triangle_x^n f(y)\frac{\lambda^{n-2}}{n!}\right)=0.$$ Itt az egyik tényező a másodfokú $\lambda^2=0$, melynek két gyöke $\lambda_1=0$ és $\lambda_2=0$. A másik tényezőnek $(n-2)$ gyöke van: $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_n$. Ezekről nem mondhatjuk, hogy mind különbözik nullától, mert lehet, hogy a polárkúpszelet két egyenessé degenerál és ekkor λ_3 is kiemelhető és így lehet $\lambda_3 \ldots \lambda_n$ között is nulla.

Lehet azonban, hogy ezek mind különböznek nullától; a poláregyenesnek a görbével való metszéspontjai: $y+\underbrace{\lambda_1 x}_{0}=y$; $y+\underbrace{\lambda_2 x}_{0}=y$; $y+\lambda_3 x; \cdots$ $\cdots y+\lambda_n x$. A poláregyenesnek mint látható a görbével való metszéspontjai közül legalább kettő egybeesik Y-nal. A görbe olyan Y pontját, melyen levő sugársorban egy egyenest — a poláregyenest — leszámítva minden sugárnak n metszéspontja közül egy esik össze az Y ponttal és ezen egyetlen egy egyenesnek (poláregyenes) még legalább két metszéspontja esik össze Y-nal, a görbe egyszeres pontjának, és ezt a kivételes egyenest ti. a poláregyenest pedig a görbe egyszeres pontjához tartozó érintőnek nevezzük. Egy egyszeres pontra nézve $f(y)=0$, de $\triangle_x f(y) \neq 0$, vagyis egyszeres pont esetén $f(y)=0$, de ennek első differenciálhányadosa nem nulla.

Az n-ed rendű görbe kétszeres pontjai

Ha egy Y pont olyan, hogy ránézve $f(y)=0$, és $\frac{\partial f}{\partial y_1}=\frac{\partial f}{\partial y_2}=\frac{\partial f}{\partial y_3}=0$, ez azt jelenti, hogy $\triangle_x f(y) \equiv 0$. Legyen Y a görbének olyan pontja, hogy $\triangle_x f(y) \equiv 0$, de $\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, \frac{\partial f}{\partial y_3}$: mind nullák, de $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_k}$ nem mind nullák, akkor $\triangle_x^2 f(y)=f_{11}x_1^2+2f_{12}x_1x_2+f_{22}x_2^2+\cdots+f_{33}x_3 \not\equiv 0$. Ebben az esetben polár-egyenes nincs, de polárkúpszelet van. Most a polárkúpszelet játszik nagy szerepet. Most $f(y)=0$, $\triangle_x f(y)\equiv 0$, de λ^2 együtthatója $\triangle_x^2 f(y)\neq 0$. Tehát:

$$f(y+\lambda x)=\lambda^2\left(\triangle_x^2 f(y)\cdot\frac{1}{2!}+\triangle_x^3 f(y)\frac{\lambda}{3!}+\cdots+\triangle_x^n f(y)\frac{\lambda^{n-2}}{n!}\right)=0.$$

Oldjuk meg ezt az egyenletet. X-et kétféleképpen választhatjuk meg; vagy rajta van X a polárkúpszeleten, vagy nincs a polárkúpszeleten.

1. X nincs rajta a polárkúpszeleten. Milyen tulajdonsága van akkor az YX egyenesnek? Mivel X nincs a polárkúpszeleten $\triangle_x^2 f(y)\neq 0$, tehát egyenletünkben az első tag nem nulla és így csak λ^2 emelhető ki. A gyökök $\lambda_1=0, \lambda_2=0$, de $\lambda_3 \ldots \lambda_n$ egyike sem nulla. Az Y ponton van egy sugársor, melynek van olyan X pontja, mely nincs a polárkúpszeleten, akkor az ilyen egyenes metszéspontjai közül kettő esik össze Y ponttal.

2. Az X pont a polárkúpszelet pontja, akkor $\triangle_x^2 f(y)=0$. Ekkor λ^3 emelhető ki és az egyenlet ilyen lesz:

$$\lambda^3\left(\triangle_x^3 f(y)\frac{1}{3!}+\triangle_x^4 f(y)\frac{\lambda}{4!}+\cdots+\triangle_x^n f(y)\frac{\lambda^{n-3}}{n!}\right)=0.$$

Oldjuk meg az egyenletet: $\lambda_1=0, \lambda_2=0, \lambda_3=0$, a többi gyök $\lambda_4, \lambda_5, \ldots, \lambda_n$.

Az ilyen egyenesnek, melynek Y pontja a görbén, X pontja pedig a polárkúpszeleten van, a görbével való metszéspontjai közül legalább három esik Y pontba. Ha YX egyenesen felveszünk valahol egy X' pontot, ezzel az YX egyenes ugyanaz marad, és ugyancsak érvényes lesz, hogy YX egyenesnek a görbével három metszéspontja esik össze Y-ban. Ebből az következik, hogy ennek az egyenesnek minden pontja kielégíti a polárkúpszelet $\triangle_x^2 f(y)=0$ egyenletét. Tehát az YX egyenes része a polárkúpszeletnek. Belátható, hogy van még egy egyenes, mely ugyancsak része a polárkúpszeletnek. Tehát a polárkúpszelet az Y ponton átmenő két egyenessé degenerál (ha a poláregyenes megszűnik). Azt is mondhatjuk, ha Y a görbének olyan pontja, hogy $f(y)=0$ és $\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}=0$, hol $i=1, 2, 3\ldots$, akkor a polárkúpszelet két egyenessé degenerál. Az Y ponton van tehát egy sugársor, benne két nevezetes egyenes, mellyé degenerált a kúpszelet. A sugársor mindazon egyenesei, melynek pontjai különböznek a degenerált kúpszelet két egyenesétől, a görbét n pontban metszik, mely metszéspontok közül kettő Y-ba esik, de a polárkúpszelet egyenesei metszéspontjai közül három esik össze Y-nal. Az ilyen Y pontot kettős pontnak nevezzük. Van két olyan sugár, melynek három metszéspontja esik össze Y-nal. Ezt a két egyenest a kettős pontokhoz tartozó érintőnek nevezzük. Lehet, hogy a polár kúpszelet két képzetes egyenessé esik szét, de a metszéspontjai mindig valósak. Tehát kettős pontról akkor beszélünk, ha $f(y)=0$, $\triangle_x f(y)\equiv 0$, $\triangle_x^2 f(y)\not\equiv 0$.

Az n-ed rendű görbék k-szoros pontjai

Ha Y olyan pontja a görbének, hogy nemcsak $f(y)=0$, hanem ennek első, második... $(k-1)$-edik differenciálhányadosai mind eltűnnek, ami azt jelenti, hogy $\triangle_x f(y)=0$, $\triangle_x^2 f(y)\equiv 0 \ldots \triangle_x^{k-1} f(y)\equiv 0$, de $\triangle_x^k f(y)\not\equiv 0$, akkor az YX egyenesnek a görbével való metszéspontjait meghatározó egyenlet λ^k kiemelése után

$$f(y+\lambda_x)=\lambda^k\left(\triangle_x^k f(y)\frac{1}{k!}+\triangle_x^{k-1}f(y)\frac{\lambda}{(k+1)!}+\cdots+\triangle_x^n f(y)\frac{\lambda^{n-k}}{n!}\right)=0.$$

Ennek az Y pontnak az a sajátossága van, hogy nincs poláregyenese, nincs polárkúpszelete, de k-ad rendű polárgörbéje azonban már van.

1. eset: X ne legyen rajta a k-ad rendű polárgörbén, ezt azt jelenti, hogy $\triangle_x^k f(y)\neq 0$. Ebben az esetben λ^k kiemelhető az egyenletből. Így egyenletünk két tényezőre bomlott, ha az első tényezőt λ^k-t nullá tesszük, gyökei $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$, a második tényező $n-k$-ad fokú. Ennek $n-k$-ad nullától különböző gyöke van: $\lambda_{k+1},\lambda_{k+2}\ldots,\lambda_n$. A metszéspontok: $y_i+\lambda_i x$, hol $i=1,2,\ldots,n$. Ekkor az egyenesnek a görbével való n metszéspontján k esik össze az Y ponttal.

2. eset: Ha X rajta van a polárgörbén, akkor $\triangle_x^k f(y)=0$, (mert $\triangle_x^k f(y)=0$ a k-ad rendű polárgörbe egyenlete.) Ekkor λ-ák meghatározására szolgáló egyenlet:

$$\lambda^{k+1}\left(\frac{\triangle_x^{k+1}f(y)}{(k+1)!}+\frac{\triangle_x^{k+2}f(y)}{(k+2)!}\lambda+\cdots+\frac{\triangle_x^n f(y)}{n!}\lambda^{n-k-1}\right)=0.$$

Ezen egyenlet gyökei: $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=\lambda_{k+1}=0, \lambda_{k+2}\ldots\lambda_n$. Lehet, hogy ezek egyike sem nulla. Ez azt jelenti, hogy k kivételes egyenes mindegyikének a görbével való metszéspontjai közül $k+1$ esik össze Y-nal. Ezeket az egyeneseket a k-szoros pontbeli érintőknek nevezzük. Nézzük mik lesznek ezek az érintők, azaz, hogy mi az a k kivételes egyenes és mivé lesz a k-ad rendű polárgörbe. Egy tetszőleges egyenes a k-ad rendű polárgörbét k pontban metszi. Ezen X metszéspontok mindegyikét kössük össze Y-nal. Így egy sugársort nyerünk, melynek k sugara van, és mindegyiknek az a sajátsága, hogy minden egyes sugár része a k-ad rendű polárgörbének és ezen sugarak mindegyikének $k+1$ metszéspontja esik Y-ba. Ezt könnyen beláthatjuk, mert ha X pont az érintő egyenesen mozog, akkor azért az érintő egyenes (YX) nem változott meg, a metszéspontjai közül azért csak $k+1$ esik Y-ba. Ha YX egyenes $k+1$ pontja esik Y-ba, ez azt jelenti, hogy az egyenletünknek $k+1$ zérus gyöke van, akárhol is van X az érintő egyenesen. Hogy egyenletünknek $k+1$ null gyöke legyen, szükséges, hogy X akárhol is van YX érintő egyenesen $\triangle_x^k f(y)=0$ legyen, mert ha volna YX egyenesnek egy olyan X pontja, melyre nézve $\triangle_x^k f(y)\neq 0$, akkor az YX egyenes nem lehetne érintő a k-szoros pontban, mert csak k nulla gyöke van. Ez azt mondja ki, hogy az YX egyenesnek minden pontja rajta van a k-ad rendű polárgörbén, és így az egész YX egyenes része a k-ad rendű polárgörbének. Ezzel igazolva van, hogy ha a k-ad rendű polárgörbét egy tetszőleges egyenessel metszük, és ezen metszéspontok mindegyikét összekötjük Y-al, minden így nyert egyenes része a polárgörbének. Tehát a k-ad rendű polárgörbe egy az Y ponton átmenő k sugárból álló sugársorrá degenerál. Ennek a k-ad rendű polárgörbének csak k pontja van, mert tegyük fel, hogy volna még egy pontja, akkor ezen ponton egy egyenest fektethetnénk, és így az egyenesnek a görbével $k+1$ metszéspontja lenne, ami abszurdum, mert egy k-ad rendü görbének egy egyenessel csak k közös pontja lehet. Így mondhatjuk, hogy ha Y a görbének olyan pontja, hogy reánézve:

$$\triangle_x f(y) \equiv 0 \quad \triangle_x^2 f(y) \equiv 0, \ldots \quad \triangle_x^{k-1} f(y) \equiv 0, \text{ de } \triangle_x^k f(y) \not\equiv 0,$$

akkor a görbe ilyen Y pontját k-szoros pontnak nevezzük és akkor a k-ad rendű polárgörbe a k-szoros ponthoz tartozó k érintővé degenerál. Legyen $k = n$, akkor n-szeres pontja van a görbének. Milyen ez a görbe?

Ha ezen görbének n-szeres pontja van, ez azt jelenti, hogy

$$\triangle_x f(y) = 0 \quad \triangle_x^2 f(y) = 0 \ldots \triangle_x^{n-1} f(y) = 0, \text{ de } \triangle_x^n f(y) \neq 0.$$

Ekkor a görbének csak n-edik polárgörbéje létezik, ami maga a görbe.

IRODALOM

E. Beutel: Algebraische Kurven I—II, Berlin, 1919.
E. Hunyady: Algebraische Kurven, Göttingen 1864.
H. Wieleitner: Algebraische Kurven I—II, Berlin 1919.
P. Scherbeck: Hőhere algebraische Kurven, Leipzig 1902.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧЕК АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ „Н"-ОВОГО ПОРЯДКА

К. Лернер

Эта работа занимается с действием поляризования и уравнениями полярных кривых. Потом сделаются выводы при параллельном с полярными кривыми исследовании точек алгебраических кривых „н"-ового порядка.

UNTERSUCHUNG DER PUNKTE DER ALGEBRAISCHEN KURVEN DER POTENZORDNUNGEN

Von

K. Lerner

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Konstruierung der Polaren, mit den Gleichungen der Polarkurven. Dann werden die Punkte der algebraischen Kurven der Potenzordnung n parallel mit den Polarkurven untersucht und die Schlüsse gezogen.