AZ ELEKTROMOSSÁGTAN ÉS MÁGNESSÉGTAN RÖVID ELMÉLETI ÖSSZEFOGLALÁSA A FŐISKOLAI FIZIKAOKTATÁSBAN

Írta: KÖVESDI PÁL

A pedagógiai főiskolákon elméleti fizikaoktatás nincs. Ennek legfőbb oka a képzési idő szűkre szabott keretein és a hallgatóság kellő matematikai felkészültségének hiányán kívül az a minden vitán felül álló tény, hogy az általános iskola felső tagozatán fizikát tanító nevelőnek elsősorban alapos kisérleti fizika tudással kell rendelkeznie. Ez az alapvető kívánalom eleve megszabja, hogy a főiskola fizikaoktatásának a kor színvonalán álló, modern kísérleti fizikaoktatásnak kell lennie. Ugyanakkor azonban, amikor a kísérleti fizika oktatása mellett pálcát törünk, nem hallgathatjuk el, hogy a főiskolán a kísérleti fizika oktatásának — éppen mivel elméleti fizikaoktatás nem kapcsolódik hozzá — kissé túl kell haladnia a szoros értelemben vett kísérleti fizika keretein, s át kell nyúlnia az elméleti fizika körébe is. Ez azt jelenti, hogy fizikaoktatásunkban nem elégedhetünk meg azzal, hogy fogalmakat és kísérletekből induktíve levezetett törvényszerűségeket bizonyos egyszerű, speciális esetekre matematikai alakban is megfogalmazunk, hanem ezeket a legáltalánosabb, vagyis az elméleti fizikában szokásos matematikai alakjukban is be kell mutatnunk. Úgyszintén meg kell ismertetnünk hallgatóinkkal a kísérleti fizika egyes jelenségcsoportjait összefoglaló általános elveket, melyek egy fizikai elmélet alapjait képezik, valamint ezeket az elveket kifejező alapegyenleteket is. Az ilyen kísérleti fizikaoktatás kapcsolatot teremt az elméleti fizikával és áttekintést nyújt annak legalapvetőbb fejezeteiről. Ennek nagy jelentőségét pedig az általános iskolai tanárképzésben — azt hiszem — szükségtelen bizonyítanom.

Megvalósítható-e ez a feladat hallgatóink matematikai felkészültsége mellett? — kérdezhetné valaki. Véleményem szerint — néhány fizikában használatos matematikai fogalom egyszerű bevezetése után — minden különösebb nehézség nélkül megvalósítható. Más dolog ugyanis egy fizikai elvet vagy törvényszerűséget kifejező matematikai formula megértése, mint egy adott problémának ezzel a formulával való megoldása. Az előbbi fokig az infinitezimális számítás és a vektorszámítás elemeivel tisztában levő hallgatókkal a kísérleti fizika keretén belül is el lehet jutni, míg az utóbbi magasabb matematikai felkészültséget és gyakorlatot kívánó elméleti fizikai feladat.

Ebben a cikkben arra vonatkozó elgondolásomat vázolom, hogyan lehet az elméleti fizika alapjait az elektromosságtan (mágnességtan) kísérleti oktatása keretében lerakni. A cél az elektrosztatika (magnetotatisztika) alapegyenleteinek, valamint a Maxwell-féle egyenleteknek a felírása. A cél eléréséhez szükségünk van néhány alapfogalom, nevezetesen a vektor- és skalártér, a gradiens, a rotáció és divergencia fogalmának a bevezetésére. Ezeket — ha ez többször a matematikai precizítás rovására megy is — igyekszem szemléletesen, példákkal illusztrálva megértetni, s főként arra törekszem, hogy az új fogalmak a kísérleti fizikában tanultakra épüljenek, kapcsolatuk a tanultakkal mindig kitűnjön, s így fizikai tartalmuk legyen. Ezeknek az alapfogalmaknak a megismerése után már semmiféle nehézséget nem okoz a Maxwell-féle gondolatok matematikai formába öntése akár integrális, akár differenciális formában.

Felmerülhet még az a kérdés, hogy az alább közölt anyagot az elektromosságtan végén egy egységben, mintegy a kísérletileg tanultak összefoglalásaként adjuk-e avagy részekre tagoltan úgy, hogy a megfelelő kísérleti anyaggal kapcsolatosan vezetjük be a szükséges elméleti alapfogalmakat. Így pl. gondolni lehetne arra, hogy az elektromos tér kísérleti módon való megismertetése után bizonyos időt szentelnénk a vektorterek matematikai leírására. A potenciál-fogalom megismertetése kapcsán a skalárterekről, valamint a vektor- és skalárterek kapcsolatáról, a gradiens és a rotáció fogalmáról lehetne beszélni stb. Én magam inkább az első feldolgozásmód felé hajlok, mivel ily módon az elméleti jellegű meggondolások egy egységben talán jobban összekapcsolódnak, de legfőként azért, mert ez az elméleti áttekintés a tanult kísérleti fizikai anyagnak egy magasabb szinten való összefoglalását adja.

Az alábbiakban vázolom azt a gondolati utat, amelyen a kísérleti tényekből kiindulva a Maxwell-féle egyenletek felírásához vezethetjük a hallgatókat.

Skalár- és vektortér. Vektor- és erővonalak

Skalártérnek nevezzük azt a teret (vagy zárt térrészt), melynek minden x, y, z koordinátájú pontjához egy skalárt (számot) rendelünk. Skalártér pl. a hőmérséklettér, amelynél a tér minden egyes pontjához a kérdéses pontbeli hőmérsékletet kapcsoljuk. A hozzárendelés történhetik táblázatban, vagy pedig — mint a fizikában igen sokszor — történhetik egyenlet segítségével is. A 3-dimenziós skalártér leírását matematikailag egy $u=f(x, y, z)$ 3-változós függvény adja, mert egy ilyen függvény az x, y, z koordinátájú ponthoz egy u számértéket rendel. Ez alapján egy kétváltozós függvény a 2-, egy egyváltozós függvény az 1-, vagy általában egy n-változós függvény az n-dimenziós skalártér matematikai kifejezésének tekinthető.

Vektortérnek azt a teret (vagy zárt térrészt) nevezzük, amelynek minden x, y, z koordinátájú pontjához egy vektor tartozik. Ilyen vektortér pl. az elektromos, a mágneses vagy a gravitációs erőtér. A vektortér minden egyes pontjához tehát egy számérték (a vektor nagysága) és egy irány tartozik. Kérdés: hogyan írható le matematikailag egy vektortér? Ismeretes, hogy egy vektort 3 (derékszögű) komponense egyértelműen meghatároz:

$$\bar{A}=\begin{cases} P \\ Q \\ R \end{cases}.$$

Ha $\bar{A}$ a hely függvénye, vagyis $\bar{A}=\bar{A}(x,y,z)$, akkor nyilván $P=P(x,y,z)$, $Q=Q(x,y,z)$ és $R=R(x,y,z)$. Tehát

$$\bar{A}=\begin{cases} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z)\,, \\ R(x,y,z) \end{cases}$$

vagyis egy 3-dimenziós vektorteret 3 háromváltozós függvény együttesen ír le.

A vektorterek legegyszerűbb példájaként tekintsük egy pontszerű e elektromos töltés elektromos terét. Egyszerűség okából legyen az e töltés a koordinátarendszer origójában. Ekkor

$$\bar{E}=\frac{e}{r^3}\bar{r}=\frac{e}{r^3}\begin{cases} x \\ y, \\ z \end{cases} \tag{1}$$

ahol $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Az (1) egyenlet pontosan leírja a vektorteret, vagyis bármely x, y, z pontban megadja a kérdéses ponthoz tartozó térerősségvektort irány és nagyság szerint. Győződjünk meg erről! A térerősség nagyságát a komponensek négyzetösszegéből vont négyzetgyök,

$$E=\frac{e}{r^3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{e}{r^2}$$

adja az elektrosztatikában látottakkal megegyezésben. $\bar{E}$ irányát az $\bar{E}$ iránycosinusai adják:

$$\cos(\bar{E},X)=\frac{E_x}{E}=\frac{x}{r},$$

$$\cos(\bar{E},Y)=\frac{E_y}{E}=\frac{y}{r},$$

$$\cos(\bar{E},Z)=\frac{E_z}{E}=\frac{z}{r}.$$

Az iránycosinusok a rádiusvektor iránycosinusaival egyenlők. $\bar{E}$ iránya tehát a rádiusvektoréval megegyező, vagy a töltéstől radiálisan elirányul, vagy afelé mutat, az e töltés előjelétől függően. Ez az eredmény ugyancsak megegyezik az elektrosztatikában látottakkal.

Mielőtt a vektorterek egy másik egyszerű példájára térnénk, röviden szólanunk kell az ún. vektorvonalakról. A vektorvonal olyan térbeli görbe, amelynek bármelyik pontjához húzott érintője a vektortér illető ponthoz tartozó vektorának irányát adja meg. A vektortér minden pontján halad át vektorvonal. A vektorvonalak tehát csak irány szempontjából jellemzik a vektortereket. A vektortér minden pontjának erőssége is jellemezhető a vektorvonalakkal, ha a vektorvonalakat a kérdéses helyen olyan sűrűeknek rajzoljuk, hogy ez a sűrűség a vektor nagyságát adja. Az ilyen sűrűséggel felvett vektorvonalak az elektromos teret egyértelműen jellemzik, és erőterek esetén az ilyen vektorvonalakat erővonalaknak nevezzük. Az erővonalfogalom jelentősége az, hogy szemléletessége folytán számos fizikai probléma egyszerű megoldását teszi lehetővé.

Ezek után tekintsük a vektorterek másik példájaként egy I erősségű áram átfutotta végtelen hosszú egyenes vezető mágneses terét. A kísérletek alapján tudjuk, hogy ennek a vezetőnek mágneses erővonalrendszere a vezetőre merőleges síkban, a vezető, mint középpont körüli koncentrikus körsereg. A vezetőtől merőleges ϱ távolságban kialakult erővonalak ϱ sugarú hengerfelületen helyezkednek el. $\overline{H}$ iránya minden pontban érintőleges a kérdéses ponthoz tartozó erővonalhoz úgy, hogy az iránnyal vett I, a pontba mutató $\overline{r}$ helyzetvektor és $\overline{H}$ jobbsodrású rendszert alkotnak. $\overline{H}$ nagysága $H = 2I/\varrho$, ahol I az elektromágneses egységben mért áramerősség és ϱ a kérdéses pontnak a vezetőtől mért távolsága. Ha a vezető irányának egy derékszögű koordinátarendszer Z tengelyét választjuk és az áram a $+Z$ tengely irányában folyik, akkor ezt a teret a

$$\overline{H} = \frac{2I}{\varrho^2}[\overline{k}, \overline{r}] = \frac{2I}{\varrho^2}\left\{\begin{matrix} -y \\ x \\ 0 \end{matrix}\right. \tag{2}$$

egyenlet írja le, ahol $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ és $\overline{r}$ a kérdéses pontba mutató helyzetvektor: $|\overline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. (2)-ből

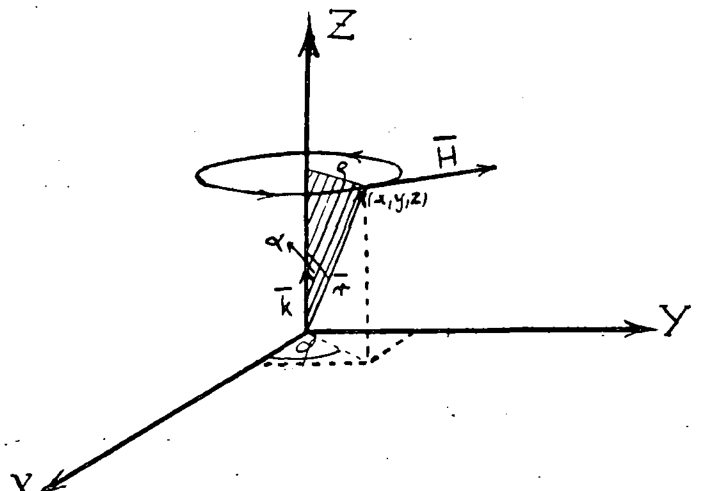
$$H = \frac{2I}{\varrho^2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2I}{\varrho},$$

és

$$\cos(\overline{H}, X) = -\frac{y}{\varrho},$$

$$\cos(\overline{H}, Y) = \frac{x}{\varrho},$$

$$\cos(\overline{H}, Z) = 0.$$



1. ábra

Annak ellenőrzése céljából, hogy az imént felírt iránycosinusok helyesen adják $\overline{H}$ irányát, gondoljuk meg, hogy a Z tengely bármely magasságában ϱ-nak az X tengely pozitív felével bezárt φ szögére

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

összefüggés érvényes (lásd az 1. ábrát). $\overline{H}$ síkvektor, s így iránytangense

$$\operatorname{tg} (\overline{H}, X) = \frac{\cos (\overline{H}, Y)}{\cos (\overline{H}, X)} = -\frac{x}{y}.$$

Ez ϱ iránytangensének negatív reciproka, vagyis $\overline{H}$ merőleges ϱ-ra. Abból pedig, hogy $x > 0$, $y > 0$ esetén $\cos (\overline{H}, X) < 0$, $\cos (\overline{H}, Y) > 0$, belátható, hogy (2) a kísérleti eredményeknek megfelelően adja $\overline{H}$ irányát.

E két példa elég szemléletesen mutatja a vektorterek matematikai leírásának módját és előnyeit.

Potenciáltér és örvénytér. A gradiens- és rotációvektor fogalma

A kísérleti fizikában, miután megismerkedtünk az elektrosztatikus térrel mint vektortérrel, felvetettük a kérdést: mekkora egy külső erő munkavégzése, ha a pozitív egységnyi töltést a tér egy adott A pontjából egy tőle különböző B pontba visszük? A végzett L munkát általában az

$$L = \int_A^B E_s ds \tag{3}$$

vonalmenti (vonal-) integrál adja, ahol ds az A-ból B-be vezető s út egyik eleme, E_s pedig a ds helyén tekintett $\overline{E}$-nek ds-re vett vetülete.

A (3) alatti vonalintegrált egy speciális és egyszerű tér, a pontszerű töltés tere esetében kiszámítva, azt a fontos eredményt nyerjük, hogy a munkavégzés független az úttól, csupán A és B pontok helyétől függ. Ha tehát önkényesen megválasztunk egy ún. vonatkoztatási pontot, amelyhez minden munkaértéket viszonyítunk, akkor a tér minden egyes pontjához egy skaláris értéket, az ún. potenciált rendelhetjük. Ha a vonatkoztatási pontot a következőkben P_0-lal jelöljük, akkor a tér egy tetszés szerinti P pontjának P_0-ra vonatkoztatott U_P potenciálját az

$$U_P = \int_{P_0}^{P} E_s ds \tag{4}$$

vonalintegrál adja. (4) segítségével tehát az elektrosztatikus vektortérhez egy potenciálteret (skalártér) kapcsolunk. Ez a potenciáltér éppen olyan jól leírja az elektrosztatikus teret, mint a térerősségtér, hiszen belőle az ismert

$$E_s = -\frac{dU}{ds} \tag{5}$$

összefüggés alapján E_s, vagyis a térerősség ds irányába eső komponense kiszámítható. $\bar{E}$ irányát az az irány adja, melyben E_s a legnagyobb, és ez a legnagyobb vetület a térerősségvektor nagyságával egyenlő. Tekintve, hogy a skalártér matematikailag könnyebben kezelhető, mint a vektortér, azért elméleti meggondolásokban igen fontos szerepet játszik adott erőterek potenciálfüggvényének meghatározása.

Ezek után felmerülhet a kérdés: vajon bármilyen $\bar{A}$ vektortérhez rendelhetünk-e a

$$\varphi(x, y, z) = \int_{P_0}^{P} A_s ds \tag{6}$$

összefüggés alapján a teret jellemző skalárteret? A kérdést másképpen megfogalmazva azt kérdezhetjük: vajon minden vektortér potenciálos (potenciál-) tér-e? Az eddigiekből következik, hogy a potenciálfüggvény létezésének feltétele az, hogy a vizsgált erőtérben a munkavégzés az úttól független legyen. Az ilyen erőtereket konzervatív tereknek nevezik. Ha az erőtér nem konzervatív, akkor nem potenciálos, hanem örvénytér. A munkavégzés úttól való függetlenségéből következik, hogy tetszés szerinti zárt görbe-menti munka zérus, vagyis

$$\oint A_s ds = 0, \tag{7}$$

ahol az integráljelre rajzolt kör azt jelzi, hogy az integrálást zárt görbére végezzük. A (7) egyenlet tehát lényegében azt fejezi ki, hogy az $\bar{A}$ vektortér potenciáltér.

Tegyük fel, hogy a (6) alapján meghatároztuk egy $\bar{A}$ vektortér $\varphi(x,y,z)$ potenciálfüggvényét. φ ismeretében (5) alapján $\bar{A}$ P, Q, R derékszögű komponensei rendre

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

-nek adódnak. Azt a vektort, melynek komponensei φ-nek x, y és z szerinti parciális deriváltjai, a fizikában grad φ vektornak nevezik, úgyhogy

$$\bar{A} = -\operatorname{grad} \varphi = -\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array} \right. . \tag{8}$$

Ez az összefüggés tehát megmutatja, hogy a potenciálfüggvényből hogyan számítható ki a vele kapcsolt vektortér.

Számítsuk ki ezekután az origóba helyezett pontszerű elektromos töltés

$$U = \frac{e}{r} = \frac{e}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

potenciálfüggvényéből a térerősség vektorterét. (8) alapján

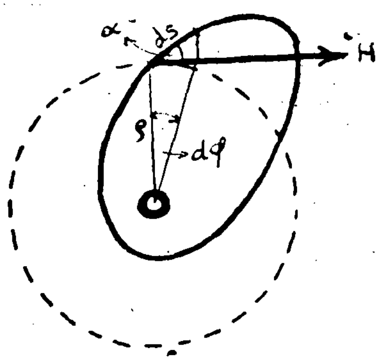
$$\overline{E} = -\operatorname{grad} U = \frac{e}{r^3}\begin{cases} x \\ y, \\ z \end{cases}$$

megegyezésben az (1) alatti egyenlettel.

Térjünk ezek után az örvényterek matematikai jellemzésére. Az örvénytereket nyilván a

$$\oint A_s ds \neq 0 \tag{9}$$

jellemzi. Nézzünk erre egy példát. Számítsuk ki a (2) alatt megadott mágneses térben a (9) alatti körintegrált. A vezetőt körülfutó integrációs út legyen a 2. ábrán vastagon kihúzott görbe. Ennek ds elemi darabjánál $H_s = H \cdot \cos\alpha$,



2. ábra

és $ds \cdot \cos\alpha = \varrho d\varphi$, tehát

$$H_s ds = H\cos\alpha \cdot ds = H\varrho d\varphi = \frac{2I}{\varrho}\varrho d\varphi = 2I d\varphi.$$

A körintegrál

$$\oint H_s ds = \int_0^{2\pi} 2I d\varphi = 4\pi I \neq 0, \tag{10}$$

vagyis az I áramátfutotta vezető mágneses tere örvénytér.

Az örvénytereket az ún. örvénypontok jellemzik. Örvénypontoknak nevezzük a tér olyan pontjait, amelyeknek végtelen kis környezetében a pontokra tekintve átellenes helyeken a tér vektorai párhuzamosak, de ellentétes irányúak. Az örvényteret akkor ismerjük, ha ismerjük az örvénypontjait. Ebből következik, hogy a (9) alatti körintegrál, melynél az integrálás útja tetszés szerinti nagy lehet, a fizika szempontjából nem írja le a teret, hanem arról csak azt az általános megállapítást teszi, hogy az integrációs út örvénypontokat fog közre. (9)-ből azonban egyszerűen eljuthatunk egy, a tér minden pontjának

„örvénysajátságát“ kvantitatíve jellemző összefüggésre. Nem kell mást tennünk, mint a körintegrál útját egy pont körül elemi kicsinnyé „összehúzni“, és az így kapott integrál értékét az integrációs út által bekerített elemi síkfelület df területével elosztani. Az integrációs út, s vele a rajta átfektetett elemi síkfelület a térben különböző helyzetű lehet. Kimutatható, hogy egy pont elemi környezetére képezett

$$\frac{\oint A_s ds}{df}$$

hányadosok értéke a felületelem térbeli helyzetétől függ. Ez a tény csak úgy magyarázható, hogy az egyes pontok örvényerősségének jellemzésére a fenti módon bevezetett mérték vektor, amelynek a felületelem normálisára vett vetületét adják a képezett hányadosok. (A normális irányítása mindig olyan, hogy a vonalintegrál körülfutási irányával jobbcsavart alkot). Egy pont örvényerősségét mérő vektort rotáció-vektornak nevezzük, és a szó 3 első betűjével (rot) jelöljük. Ez alapján egy pont elemi környezetére tekintett $\oint A_s ds/df$ hányados általában a rot $\bar{A}$ vektornak a felületelem $\bar{n}$ normálisa irányába eső vetületét adja, vagyis

$$\mathrm{rot}_n \bar{A} = \frac{\oint A_s ds}{df}. \tag{11}$$

A rot $\bar{A}$ vektor iránya az az irány, melyben $\mathrm{rot}_n \bar{A}$ a legnagyobb, nagysága pedig a legnagyobb vetületével egyező.

A rot $\bar{A}$ vektor komponensekkel is kifejezhető. Számításokkal igazolható, hogy

$$\mathrm{rot}\,\bar{A} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}. \tag{12}$$

Ezek után számítsuk ki, egy a sugarú végtelen hosszú egyenes vezető mágneses terének a rotációját. Erről a térről a (10) alapján tudjuk, hogy örvénytér, de semmit sem tudunk az örvénypontok helyéről. (2)-t felhasználva

$$\mathrm{rot}\,\overline{H} = 2I \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{\varrho^2} & \frac{x}{\varrho^2} & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \frac{y^2 - x^2 - y^2 + x^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \end{cases} = 0. \tag{13}$$

Ez az eredményünk azt jelenti, hogy a vezető körüli térben nincsen örvénypont. Mivel (10) alapján a térnek örvényesnek kell lennie, következik, hogy az örvénypontoknak a vezető belsejében kell lenniök. Számítsuk ki ezeknek örvényerősségét! A vezető belsejében kialakult mágneses tér erőssége

$$\bar{H}=\frac{2I}{a^2}[\bar{k},\bar{r}]=\frac{2I}{a^2}\begin{cases}-y\\ x,\\ 0\end{cases}$$

ahol $|[\bar{k},\bar{r}]|=\varrho<a$.

$$\text{rot}\,\bar{H}=\frac{2I}{a^2}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -y & x & 0\end{vmatrix}=\frac{2I}{a^2}\begin{cases}0\\ 0\\ 2\end{cases}=\begin{cases}0\\ 0\\ \frac{4I}{a^2}\end{cases}.$$

Eredményünk valóban igazolja feltevésünket. A vezető belsejének minden pontja örvénypont, amelynek örvényerősségét a vezetőben folyó áramintenzitás értéke szabja meg. A rot-vektor az áramfolyás irányába, vagyis a $+Z$ tengely irányába mutat. Ha minden ponthoz hozzárendeljük az $\bar{I}$ áramerősségvektort, eredményünket a következőképpen is felírhatjuk:

$$\text{rot}\,\bar{H}=\frac{4\bar{I}}{a^2}=\frac{4\pi\bar{I}}{a^2\pi}=4\pi\frac{\bar{I}}{f}=4\pi\bar{i}_i, \tag{14}$$

ahol $\bar{i}_i$ a kérdéses ponthoz tartozó áramsűrűségvektor. (14) egyébként az egész térre is vonatkoztatható, mert azt mondja ki, hogy amely pontban áram nem folyik ($\bar{i}_i\equiv 0$), az örvénymentes pont. Ez alapján az áramvezetőn kívül fekvő minden pont örvénymentes, megegyezésben a (13) alatt kapott eredményünkkel.

Megjegyezzük még, hogy (14) alatti eredményünk (11) alapján számolva is könnyen megkapható. A vezető belsejében felvett pont elemi környezetében

$$\text{rot}\,\bar{H}=\frac{\oint H_s ds}{df}=\frac{4\pi d\bar{I}}{df}=4\pi\bar{i}_i.$$

Végezetül felhívjuk a figyelmet arra, hogy tisztán matematikai szempontból tekintve a grad, ill. rot olyan műveletek, amelyek segítségével skalártérből vektorteret, ill. vektortérből egy másik vektorteret származtatnak.

Fluxus; divergencia fogalma

Egy vektortérbe helyezett F felületen merőlegesen áthaladó vektorvonalak számát az erőtér F-hez tartozó fluxusának nevezzük. Ha a tér homogén és F merőleges a vektorvonalakra, akkor a Φ fluxus

$$\Phi=A\cdot F,$$

ahol A a vektortér erőssége (= vektorvonalak sűrűsége). Ha F normálisa a vektorvonalakkal α szöget zár be, akkor

$$\Phi=A\cdot F\cos\alpha=A_n F.$$

Ebben az egyenletben $A_n=A\cos\alpha$ az $\bar{A}$-nak a felület normálisára vett vetülete.

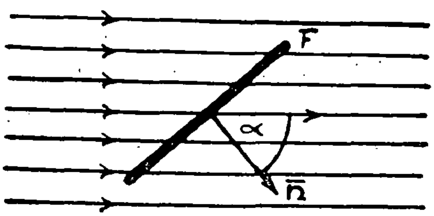
Inhomogén tér esetén az F-hez tartozó fluxust oly módon számíthatjuk ki, hogy az F-et olyan kis dF felületelemekre bontjuk, amelyek környezetében a tér már homogénnek tekinthető. dF környezetében ekkor a vektortér erőssége, valamint a felületelem normálisának az erővonalakkal bezárt α szöge egyértelműen értelmezhető, s így a dF-en áthaladó fluxus

$$d\Phi = A_n dF.$$

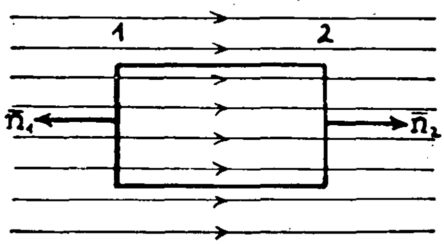
Az egész F-re vonatkoztatott fluxus az így tekintett elemi fluxusok összege, vagyis

$$\Phi = \int_F A_n dF.$$

A fluxus előjeles mennyiség. Előjele a felület normálisának irányításától függ. A 3. ábrán látható esetben, amikor $\bar{n}$ normális egységvektor hegyesszöget zár be az erővonalakkal, Φ pozitív előjelű. $\bar{n}$ ellentétes irányítása esetén, mikor α tompaszög, negatív előjelűnek adódik.



3. ábra



4. ábra

Ezek után képezzük az A erősségű homogén vektortér fluxusát egy olyan paralelepipedonra nézve, amelynek két lapja merőleges a vektorvonalakra (4. ábra). A lapok normálisait — amint ez általában szokás — vegyük kifelé mutatóknak. A testre vonatkoztatott fluxus, amely a lapokra vett fluxusok algebrai összege, nyilván zérus. Az 1. lapra tekintett fluxus ugyanis megegyező értékű a 2. lapra vonatkoztatottal, csak ellentett előjelű, s így összegük 0. Az oldallapokon nincs vektorvonalátlépés, így az ezekre vonatkoztatott fluxusok összege ugyancsak 0. Ha egy zárt felületre vonatkoztatott fluxust az integráljelre rajzolt körrel jelöljük, akkor eredményünk matematikai alakban a következőképpen fejezhető ki:

$$\oint_F A_n dF = 0.$$

Bebizonyítható, hogy ez az összefüggés egészen általános, vagyis egyrészt nemcsak homogén, hanem inhomogén térre, másrészt akármilyen alakú és helyzetű zárt felületre is érvényes, feltéve, hogy a felületen belül nincsenek vektorvonalforrások, illetőleg elnyelő centrumok. Ha források, ill. elnyelő centrumok vannak a felületen belül, akkor

$$\oint_F A_n dF \neq 0. \tag{15}$$

Az integrál pozitív előjele források, negatív előjele pedig elnyelő centrumok jelenlétére utal. (15) tehát a matematika nyelvén azt fejezi ki, hogy a térnek a kérdéses felület által körülzárt részében vektorvonalak erednek, ill. torkollnak, vagyis az illető térrész vektorvonalforrással bir. (A forrás szóba most és a következőkben az elnyelő centrumok is beleértendők.)

Alkalmazzuk az eddigieket az elektrosztatikus térre. Ha az F zárt felület által körülzárt térrész forrásmentes, ami ebben az esetben annyit jelent, hogy töltések nélküli, akkor

$$\oint_F E_n dF = 0. \tag{16}$$

Legyen azonban F-en belül e nagyságú elektromos töltés. Mivel e töltésből $4\pi e$ számú erővonal indul ki, azért

$$\oint_F E_n dF = 4\pi e.$$

Ha F-en belül több pontszerű töltés van, akkor az F-en átmenő fluxus nyilván

$$\oint_F E_n dF = 4\pi \sum e.$$

Folytonos töltéseloszlás esetén célszerű a töltések $\varrho = de/dV$ térbeli sűrűségének bevezetése. Ebből a dV térfogatelemben levő töltésmennyiség

$$de = \varrho dV.$$

Véges nagyságú V térfogatban levő töltésmennyiség

$$e = \int_V \varrho dV,$$

s így ezt a V térfogatú, folytonos eloszlású töltésmennyiséget körülvevő F felületre számított fluxus

$$\oint_F E_n dF = 4\pi \int_V \varrho dV. \tag{17}$$

Ez az összefüggés arra az esetre érvényes, ha a töltés vákuumban van. ε dielektromos állandójú közegben az erőfluxus a tapasztalatok szerint a légüres térbelinek ε-od része, vagyis

$$\oint_F E_n dF = \frac{4\pi}{\varepsilon} \int_V \varrho dV,$$

amiből

$$\oint_F \varepsilon E_n dF = \oint_F D_n dF = 4\pi \int_V \varrho dV \tag{18}$$

adódik, ahol $D_n = \varepsilon E_n$ az elektromos indukcióvektor dF normálisára vett vetülete.

A (16), (17) és (18) egyenletek a matematika nyelvén kifejezik azt, hogy egy tetszés szerinti nagyságú térrészben van-e elektromos töltés, vagy nincs, s ha van, mekkora ezek összességének forrásbősége. Az egyes források erősségéről, ezek felületen belüli elhelyezkedéséről azonban a fenti egyenletek semmit sem mondanak, vagyis a teret források szempontjából nem jellemzik. Az elektrosztatikus, s általában bármely vektorteret a források szempontjából az egy pontbeli forráserősség, az ún. divergencia (jelölve: div) jellemzi. Fogalmához a rotációnál már megismert eljáráshoz hasonlóan úgy jutunk, hogy a véges nagyságú zárt felületet a forráserősség szempontjából jellemezni kívánt pont körül elemi kicsinnyé „húzzuk össze", s az erre képezett integrált osztjuk a felület által bezárt térrész dV-térfogatával. Matematikai alakban

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\oint A_n dF}{dV}. \tag{19}$$

A $\operatorname{div} \bar{A}$, vagyis egy pont forráserősségének mértéke, skalár mennyiség. A divergencia mint művelet tehát az $\bar{A}$ vektortérből olyan skalárteret állít elő, amelynek mindenegyes pontjához annak forráserősségét kapcsoljuk.

A divergencia-tér, mint kimutatható, az

$$\bar{A} = \begin{cases} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{cases}$$

vektortérből

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{20}$$

összefüggés alapján származtatható.

(19) alapján egy folytonos töltéseloszlású ε dielektromos állandójú elektrosztatikus térben

$$\operatorname{div} \bar{D} = \frac{\oint D_n dF}{dV} = \frac{4\pi\varrho dV}{dV} = 4\pi\varrho,$$

vagyis egy pont indukciós vonalak szempontjából tekintett forráserőssége a kérdéses pontbeli töltéssűrűség 4π-szerese.

A mágneses indukcióvektor divergenciája mindig zérus.

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0,$$

mert valódi mágneses töltések, amelyek az indukcióvonalak forrásai lennének, nincsenek.

Az elektro- és magnetosztatikai tér alapegyenletei

Az elektrosztatikus tér két alaptörvénye:

a) a teret leíró D indukcióvonalaknak ($\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ indukcióvektornak) forrásai az elektromos töltések, amelyek $\bar{D}$-t teljesen meghatározzák.

b) az elektrosztatikus tér örvénymentes.

E két alapvető sajátságot fejezi ki az elektrosztatikus tér két alapegyenlete, melyek integrál-alakja:

$$\oint_F D_n dF = 4\pi \int_V \varrho dV, \tag{21}$$

$$\oint E_s ds = 0, \tag{22}$$

ahol $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$.

A magnetosztatikus tér annyiban különbözik az elektrosztatikustól, hogy a $\overline{B}$ indukcióvektornak nincsenek forrásai, a B-vonalak önmagukba záródó görbék. E szerint a magnetosztatikai tér alapvető két sajátságát kifejező egyenletek:

$$\oint_F B_n dF = 0, \tag{23}$$

$$\oint H_s ds = 0, \tag{24}$$

ahol $\overline{B} = \mu \overline{H}$.

Számítások céljára a kétféle sztatikus tér egyenleteit az ún. differenciális alakban használják. Ezekhez úgy juthatunk, ha az egyenletek integrális alakját egy pont elemi környezetére felírva a nyert alakot divergenciát vagy rotációt tartalmazó kifejezéssé alakítjuk. Az eljárást a (21) egyenleten illusztráljuk. (21)-nek egy pont elemi környezetére felírt alakja:

$$\oint D_n dF = 4\pi\varrho dV.$$

Az egyenletet dV-vel osztva és figyelembevéve a divergenciának (19) alatti definícióját, kapjuk (21) differenciális alakját. A (21)—(24) egyenletek a vázolt átalakítás után:

$$\operatorname{div} \overline{D} = 4\pi\varrho \qquad \operatorname{div} \overline{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \overline{E} = 0 \qquad \operatorname{rot} \overline{H} = 0.$$

Ezek az alapegyenletek, mint az a div és a rot (20), ill. (12) alatti kifejezéseiből látható, parciális differenciálegyenletek, amelyekből bizonyos határfeltételek mellett a teret leíró $\overline{D}$, ill. $\overline{B}$ vektorok meghatározhatók.

A Maxwell-féle egyenletek

a) Maxwell, hogy a kondenzátort is tartalmazó váltakozóáramú kör zárt legyen, feltételezte a dielektrikumok belsejében változó elektromos tér esetén folyó ún. eltolási áram létét, amelynek a sűrűsége

$$\overline{i}_e = \frac{1}{4\pi} \dot{\overline{D}},$$

ahol $\dot{\overline{D}} = d\overline{D}/dt$. Ez alapján tehát bevezethető az összáram fogalma, amelyen a vezetési áramnak és az eltolási áramnak az összegét értjük. Az összáram sűrűsége:

$$\overline{i}_ö = \overline{i}_v + \overline{i}_e.$$

Az összáram szempontjából minden elektromos áramkör zárt. Az összárammal éppen olyan mágneses tér kapcsolt, mint a vezetési árammal, vagyis (10) alapján, figyelembevéve, hogy $I_ö = \int_F (\bar{i}_v + \bar{i}_e)_n dF = \int_F \left(\bar{i}_v + \frac{1}{4\pi} \dot{\bar{D}} \right)_n dF$

$$\oint H_s ds = \int_F (4\pi \bar{i}_v + \dot{\bar{D}})_n dF. \tag{25}$$

Ez Maxwell I. egyenlete.

b) Maxwell II. egyenlete az indukciós törvény általánosítása. Ismeretes, hogy változó mágneses tér egy nyugvó körvezetőben elektromotoros erőt indukál, amelynek nagysága

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_F B_n dF = -\int_F \dot{B}_n dF, \tag{26}$$

ahol $\dot{B}_n = dB_n/dt$, és az integrálás a körvezető által hurkolt F felületre vonatkozik. Ezt a kísérleti tapasztalatot Maxwell oly módon általánosította, hogy mindenütt, ahol mágneses tér változik, ott elektromos tér is indukálódik, függetlenül attól, hogy van-e vezető a kérdéses helyen, vagy nincsen. Ennek az általánosított indukciótörvénynek matematikai alakja, figyelembevéve, hogy egy zárt görbére tekintve $\mathcal{E}_i = \oint E_s ds$,

$$\oint E_s ds = -\int_F \dot{B}_n dF, \tag{27}$$

ahol a jobboldali integrál a körintegrál útja által meghatározott felületre vonatkozik.

(25) és (27) Maxwell ismertetett elgondolásait fejezik ki matematikai alakban. A két egyenletből azonban még további következtetések is levonhatók. Nevezetesen, ha valahol a térben periodikusan ismétlődő mágneses térerősségváltozás lép fel, akkor ez (27) alapján ugyancsak periodikusan változó elektromos térerősségváltozást hoz létre, amelynek erővonalai zárt gyűrűalakban veszik körül a mágneses erővonalakat. A periodikusan változó elektromos tér erővonalai (25) alapján ugyancsak periodikusan változó mágneses teret indukálnak, amelyek erővonalai zárt gyűrűalakban hurkolják körül a változó elektromos térerősségvonalakat. Ezek a változó mágneses erővonalak ismét változó elektromos teret, majd ez ismét változó mágneses teret hoz létre, s a folyamat a centrumtól c sebességgel távolodva ismétlődik. A jelenség tehát tipikus hullámjelenség, és mivel a hullámteret egymással kapcsolódó elektromos és mágneses terek alkotják, elektromágneses hullámtérnek, vagy röviden elektromágneses térnek szokás nevezni. Az elektromágneses tér örvénytér, amint ez (25) és (27)-ből kiolvasható.

A (25) és (27) alatti Maxwell-féle egyenletek az elektrodinamika alapegyenletei. A végből, hogy speciális esetként az elektrosztatika és magnetosztatika leírását is tartalmazzák, mindegyiket egy-egy további, egyébként már ismert egyenlettel kell kiegészítenünk. (25)-öt kiegészítő egyenlet $\bar{D}$ és a töltésmennyiség kapcsolatát kifejező (21), (27)-et kiegészítő egyenlet pedig

(23). Az ily módon kiegészített Maxwell-féle egyenletek az elektromosságtan és mágnességtan közvetlenül nem bizonyítható alapegyenletei, amelyek semmiféle más egyenletre vissza nem vezethetők. Az elektromosságtanban és mágnességtanban tehát olyan szerepet játszanak, mint a mechanikában a Newton-féle axiómák.

A Maxwell-féle egyenletek eddig megadott integrál-alakja számítások céljára nem alkalmas, mivel nem írja le a teret. Az integrálalakból azonban könnyen eljuthatunk az egyenletek differenciális alakjára, ha az integrálegyenletek mindegyikét a tér egy pontja körüli elemi térrészre, ill. felületre vonatkoztatjuk. Ha pl. az I. egyenletnél a körintegrált a tér kérdéses pontján átmenő dF elemi felület határvonalára képezzük, akkor

$$\oint H_s ds = (4\pi \bar{i}_v + \dot{\bar{D}})_n dF,$$

vagy dF-fel átosztva és figyelembevéve (11)-et

$$\mathrm{rot}_n \bar{H} = (4\pi \bar{i}_v + \dot{\bar{D}})_n .$$

Ez az egyenlet érvényes bármely $\bar{n}$ normális irányra, tehát magára a vektorra is:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = 4\pi \bar{i}_v + \dot{\bar{D}}.$$

Hasonló módon alakítható át a többi egyenlet is. A differenciális alakban felírt Maxwell-egyenletek tehát a következők:

$$\mathrm{rot}\,\bar{H} = 4\pi \bar{i}_v + \dot{\bar{D}} \qquad \mathrm{div}\,\bar{D} = 4\pi\varrho$$

$$\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\dot{\bar{B}} \qquad \mathrm{div}\,\bar{B} = 0,$$

ahol $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ és $\bar{B} = \mu \bar{H}$.

A Maxwell-egyenletek parciális differenciálegyenletek, amelyekből egy adott elektrodinamikai probléma esetében $\bar{E}$ és $\bar{H}$ térerősségek bizonyos kezdeti- és határfeltételek mellett kiszámíthatók.

A fent vázolt út meggyőződésem szerint alkalmas arra, hogy a Maxwell-egyenleteket és azok fizikai tartalmát megérttessük hallgatóinkkal. Céljánál fogva nem törekszik a teljességre, de igyekszik röviden a lényegre rámutatni. Hasonló módon foglalhatók össze a fizika más részei is elméleti alapon. Az a néhány óra, amit ilyen összefoglalások céljára használunk fel, bőven meghozza gyümölcsét hallgatóink fizikai látókörének bővülésében, tudásának mélyülésében.

IRODALOM

Novobátzky K.—Neugebauer T.: Elektrodinamika és optika, Tankönyvkiadó, 1951.

L. Bergmann—Cl. Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. II., Walter de Gruyter, Berlin, 1958.

S. E. Frisch—A. W. Timorewa: Lehrgang der allgemeinen Physik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1955.

R. Becker: Theorie der Elektrizität, Bd. I., Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1951.

G. Joos: Lehrbuch der theoretischen Physik, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954.
R. Rothe: Höhere Mathematik, Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1954.

КРАТКАЯ ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ СВОДКА УЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСТВА И МЕХАНИЗМА

П. Кевешди

Автор в своей работе, опираясь на пройденный материал по физике, наглядным способом вводит в математический описивающий способ скалярных и векторных полей, потом в понятие градиента, ротации и дивергенции. Зная физическое содержание этих понятий, он просто доводит до понимания и записи Максвелловских уравнений.

KURZE THEORETISCHE ZUSAMMENFASSUNG DER ELEKTRIZITÄTSLEHRE UND DER MAGNETIK IM PHYSIKUNTERRICHT DER HOCHSCHULE

von

P. KÖVESDI

In seiner Arbeit leitet der Verfasser auf Grund des in der experimentellen Physik Gelernten die Art der mathematischen Schreibung der Skalar- und Vektorfelder, dann den Begriff des Gradienten, der Rotation und der Divergenz ein. Auf Grund der Kenntnis des physikalischen Inhalts dieser Begriffe gelangt er auf einfachem Wege zum Aufschreiben der Maxwell-Gleichungen und der Erklärung von deren physikalischer Bedeutung.