CIKLIKUS CSOPORTOK EGY JELLEMZÉSE

Írta: TÓTH BALÁZS

1. Jelöljön G egy tetszőleges csoportot. G elemeit görög betűkkel jelöljük, latin betűk mindig egész számokat jelentenek. A G csoport k-adik hatványán értjük G-nek azt a részcsoportját. amelyet a G összes elemeinek k-adik hatványai generálnak, és ezt G^k-val jelöljük. A G^k hatványt triviálisnak mondjuk, ha $k=0, \pm 1$.

Szász. Ferenc „Csoportokról, amelyeknek összes nem triviális hatványai ciklikus alcsoportok" (MTA. III. Osztályának Közleményei, 5(1955/491—492) című dolgozatában bebizonyította a következő tételt: *Egy tetszőleges G csoport akkor és csakis akkor ciklikus, ha a G csoport bármely nem triviális hatványa ciklikus.*

Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy a tétel állítása lényegesen kevesebb feltétel mellett is igaz. Elég ugyanis egymáshoz relatív prím kitevőjű két hatvány ciklikusságát megkövetelnünk.

Előrebocsátunk néhány ismert jelölést és fogalmat, néhány, a dolgozatban felhasználandó tételt.

A G csoport rendjét $O(G)$, az α csoportelem rendjét $o(\alpha)$ jelöli. Egy G csoport H részhalmazával generált részcsoportot $\{H\}$-val jelöljük. Egy G csoportot végesen generáltnak nevezünk, ha van a G-nek olyan H véges részhalmaza, hogy $G=\{H\}$. A véges Abel-féle csoportok alaptétele szerint minden G véges Abel-féle csoport prímhatványrendű ciklikus csoportok direkt szorzata. Ezeket a prímhatványokat a G csoport invariánsainak nevezzük. Egy véges Abel-féle csoport akkor és csakis akkor ciklikus, ha invariánsai csupa különböző prímszámok hatványai. Ha $G(\neq\varepsilon)$ véges Abel-féle csoport és $O(G)=P_i,\ldots,P_k$, ahol $P_i,\ldots,P_k$ (>1) különböző prímszámok hatványai, akkor G egyértelműen bomlik fel olyan $H_i,\ldots,H_k$ részcsoportok direkt szorzatára, amelyeknek a rendje $O(H_i)=P_i=p_i^{e_i}$ $(i=1,\ldots,k)$, mégpedig a H_i a G-nek azokból az elemeiből áll, amelyeknek rendje P_i-nek osztója.

2. Ezek után bebizonyítjuk a következő tételt:

Tétel: *Egy tetszőleges G csoport akkor és csakis akkor ciklikus, ha G^m és G^n ciklikus, ahol m, $n \neq 0, \pm 1$ és $(m,n)=1$.*

Bizonyítás: Legyen G tetszésszerinti csoport és tegyük fel hogy $G^m=\{\alpha\}$ és $G^n\{\beta\}$, ahol m, $n\neq 0$, ± 1, $(m,n)=1$. Először megmutatjuk, hogy $G=\{\alpha,\beta\}$. Legyen ugyanis γ a G-nek egy tetszőleges eleme. Az $(m,n)=1$ miatt van olyan x és y, hogy $mx+ny=1$ teljesül. Ekkor

$\gamma = \gamma^{mx+ny} = (\gamma^m)^x (\gamma^n)^y$. De a γ^m eleme a G^m-nek és γ^n eleme a G^n-nek. Ebből

$$\gamma = \alpha^r \beta^s$$

ami éppen azt jelenti, hogy $G = \{\alpha, \beta\}$.

Ezután azt mutatjuk meg, hogy a G Abel-féle. Elegendő ehhez belátni, hogy a generáló elemek felcserélhetők. A feltevés miatt

$$(\alpha\beta)^m = \alpha^k \quad \text{és} \quad (\alpha\beta)^n = \beta^l.$$

Ezért felhasználva az $mx + ny = 1$ egyenlőséget, a következőt kapjuk:

$$\alpha\beta = (\alpha\beta)^{mx+ny} = ((\alpha\beta)^m)^x \cdot ((\alpha\beta)^n)^y = \alpha^{kx} \cdot \beta^{ly}.$$

Balról α-val, jobbról β-val leosztva adódik: $\varepsilon = \alpha^{nx-1} \cdot \beta^{ty-1}$. Tehát α^{kx-1} és β^{ly-1} egymás inverzei, ezért ezek felcserélhetők. Ezt felhasználva

$$\alpha\beta = \alpha\varepsilon\beta = \alpha \cdot \alpha^{kx-1} \cdot \beta^{ly-1} \beta = ((\alpha\beta)^m)^x \cdot ((\alpha\beta)^n)^y =$$
$$= ((\alpha\beta_a))^y \cdot ((\alpha\beta)^m)^x = \beta \cdot \beta^{ly-1} \cdot \alpha^{lx-1} \alpha = \beta\alpha,$$

amivel az állításunkat igazoltuk. Tehát G végesen generált Abel-féle csoport.

A következőkben két esetet különböztetünk meg.

A) Ha G torzió csoport, akkor G véges Abel-féle csoport. Tehát felbontható (különböző) prímhatványrendű csoportok direkt szorzatára:

$$G = H_i \otimes \cdots \otimes H_k, \quad O(H_i) = P_i = p_i^{e_i} \qquad (i = 1, \ldots. k).$$

Tegyük fel, hogy G nem ciklikus. A fentebb említett kritérium szerint ez pontosan azt jelenti, hogy a G invariánsai között előfordul legalább két megegyező prímszámnak a hatványa, másszóval legalább az egyik H_i komponens felbomlik legalább két p_i-hatványrendű ciklus csoport direkt szorzatára.

Az m és n közül $(m, n) = 1$ miatt legalább az egyik, pl. az m olyan, hogy $p_i \nmid m$, így $(P_i, m) = 1$. Ezért G-nek ez a H_i komponense megegyezik G^m H_i komponensével. Ebből következik, hogy a G^m invariásai között is előfordul legalább két azonos prímszám hatványa, ami azt jelenti, hogy G^m nem ciklikus. Ellentmondásra jutottunk, G tehát ciklikus.

B) Ha G-nek van végtelenrendű eleme akkor $G^m = \{\alpha\}$ és $G^n = \{\beta\}$ miatt kell, hogy $o(\alpha) = o(\beta) = 0$. Mivel $G = \{\alpha, \beta\}$, azért G torziómentes, azaz minden $(\neq \varepsilon)$ eleme zérus rendű. Állítjuk érvényes a következő izomorfia:

$$G \approx G^m \quad (\xi \to \xi^m).$$

A torziómentesség miatt ugyanis a $\xi \to \xi^m$ leképezés kölcsönösen egyértelmű, továbbá, ha $\eta \to \eta^m$, akkor

$$\xi\eta \to (\xi\eta)^m = \xi^m \cdot \eta^m$$

érvényes a kommutativitás miatt. A fennálló izomorfia miatt G is ciklikus.

Az állítás megfordítása nyilvánvaló. Ha ugyanis G ciklikus, akkor G^k is ciklikus bármely k-ra, így $k = m$, $n (\neq 0, \pm 1)$, $(m, n) = 1$ esetben is, amivel a tétel bizonyítását befejeztük.

3. Egy R gyűrűt akkor mondunk ciklikusnak, ha az R modulusa ciklikus. Az mR jelölje azt a részgyűrűt, amelyet az R gyűrű összes elemének m-szereseiből álló halmaz generál.

Kézenfekvő megtennünk az alábbi következtetést, ami az előbb bizonyított tételnek egyszerű következménye:

Egy tetszőleges R gyűrű akkor és csakis akkor ciklikus, ha mR és nR ciklikus, ahol $m, n \neq 0, \pm 1$ és $(m, n) = 1$.

ОДНА ХАРАКТЕРИСТИКА ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРУПП

Б. Тот

Ф. Сас в своей работе „О группах, все нетривиальные степени которых являются циклическими подгруппами" (Сообщения 3. отделения ВАН, 5 (1955), 491—492) доказал следующее положение:

Одна группа Γ является, и является только в том случае циклической, если все нетривиальные степени группы Γ циклические.

В этой работе доказано, что это положение удовлетворяется и при наличии значительно менее условий:

Одна группа Γ является и является только в том случае сиклической, если Γ^m и Γ^n циклические, где $m, n \neq 0, \pm 1$ и $(m, n) = 1$.

ÜBER EINE CHARAKTERISIERUNG DER ZYKLISCHEN GRUPPEN

von

B. TÓTH

F. Szász hatte in einer früheren Arbeit (»Csoportokról, amelyeknek összes nem triviális hatványai ciklikus alcsoportok« MTA. II. Osztályának Közleményei, 5 (1955) 491—492) den folgenden Satz bewiesen:

Eine Gruppe ist dann und nur dann zyklisch, wenn jede nichttriviale Potenz der Gruppe zyklisch ist.

In unserer Arbeit werden wir zeigen, dass die Behauptung des Satzes von F. Szász auch neben wesentlich schwächeren Bedingungen gilt. Es gilt nämlich:

Eine Gruppe G ist dann und nur dann zyklisch, wenn die Gruppen G^n und G^n mit $m, n \neq 0, \pm 1$, $(m, n) = 1$ zyklisch ist.