

## A MECHANIKAI ÉS ELEKTROMOS REZGÉSEK ANALÓGIÁJÁRÓL

Írta: KOVESDI PÁL

A mechanikai és elektromos rezgések matematikai tárgyalásánál jelentkező analógiák nem ismeretlenek a fizikusok előtt. Ezek az analógiák olyan szembezők, hogy belőlük szinte önként kínálkozik e jelenségek egymás mellett való, analógiára épített tárgyalásmódja. Ezen, az alábbiakban analógiás tárgyalásmódnak nevezett eljárásról a következőket értem: a mechanikai rezgések matematikai alapon való részletes tárgyalása után a megfelelő elektromos rezgéseknek csupán a differenciálegyenletét vezetjük le és rámutatva ennek a mechanikaival való analógiájára, a végeredményeket csupán felírjuk, és a formulákat a megfelelő fizikai tartalommal töltjük ki. Ezzel a szinte önmagától kínálkozó eljárással szemben az általánosan követett eljárás az, hogy a két-fajta rezgésjelenséget időben és térben egymástól elszakítva tárgyalják és az analógiára csupán hivatkozva, nem aknázzák ki teljes mértékben mindazokat az előnyöket, amelyeket azok kínálnak, nevezetesen: az analógiában levő jelenségek mélyebb megértése, lényegesen könnyebb megjegyzése és nem utolsósorban az időnyerés lehetősége.

Annak oka, hogy az analógiák nyújtotta előnyöket általában elsikkadni hagyják, minden bizonnyal az, hogy sokan elvileg látják helytelennek a két, lényegét tekintve különböző fizikai jelenségnek egymás mellett való tárgyalását pusztán matematikai leírásuk hasonló volta miatt. Ezért formálisnak érzik az analógiás tárgyalásmódot. Ez az álláspont a való körülményektől elvonatkoztatva talán tartható is lenne. Úgy érzem azonban, hogy fel kell adnunk, ha figyelembe vesszük a következőket: a rezgésjelenségek matematikai tárgyalása már olyan kísérleti fizikai és matematikai előtanulmányokat tételez fel, hogy ezek mellett az említett két jelenségcsoportnak párhuzamba állítása nem okozhat zavart, sőt a tanultaknak egy újabb szempontból való áttekintését jelenti. Így legfeljebb szépséghibának minősíthető az a körülmény, hogy a mechanikai megfontolásokkal párhuzamosan elektromos jelenségeket is vizsgálunk, de ezért a szépséghibáért bőven kárpótolnak bennünket az ilyen tárgyalás már fentebb vázolt előnyei.

Ami most már speciálisan a pedagógiai főiskolán folyó fizika oktatást illeti: itt az analógiás tárgyalás még szépséghibának sem igen tekinthető. A 4. évben „Válogatott fejezetek az elméleti fizika köréből” c. heti 2 órás előadásban — mint azt már az előadás címén kívül az órakerete is megmutatja — nemigen lehet arról szó, hogy a fizika egyes részeit, mint szorosan vett egységeket, külön tárgyaljuk. Ebben az előadásban Rezgésjelenségek címen az összevont tárgyalás a legkisebb erőltetés nélkül kitűnően megvalósít-

ható. Sőt! Gondolkozni kellene azon is, hogy melyek még azok a részek, amelyek analógiás tárgyalással összevonhatók lennének.

Mindezek alapján a dolgozat célja: a mechanikai és elektromos rezgések közti analógiák szisztematikus feltárása a felsőoktatásban való gyümölcsözőbb felhasználásuk szempontjából. E cél érdekében röviden ismertetem az analógiás tárgyalásmódot a csillapított szabad, a csillapított kényszer és az analógiák felhasználása szempontjából általában elhanyagolt kapcsolt rezgéseknél.

### I. Csillapított szabad rezgések.

#### a) Mechanikai rezgés.

A csillapított szabad rezgések differenciálegyenlete:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + w \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (1)$$

ahol  $m$  a rezgő tömegpont tömege,  $x$  a kirezgés,  $\frac{dx}{dt}$ , ill.  $\frac{d^2 x}{dt^2}$  az  $x$  helyen a rezgő tömegpont sebessége, ill. gyorsulása,  $w$ , ill.  $k$  a súrlódási erőt, illetve a visszahúzó rugalmas erőt jellemző együttható. (1)-et  $m$ -mel osztva és bevezetve a

$$\frac{w}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2 \quad (2)$$

jelöléseket, a következő egyenletre jutunk:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1/a)$$

Ennek a konstans együtthatójú lineáris elsőrendű homogén differenciálegyenletnek általános megoldása

$$x = A_1 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}, \quad (3)$$

ahol  $A_1$  és  $A_2$  a kezdeti feltételekből meghatározható konstansok. A kitevőkben szereplő négyzetgyökös kifejezés értéke szerint 3 eset lehetséges:

$\alpha)$   $\beta^2 > \omega_0^2$ . Ez esetben  $x$  exponenciálisan csökkenve tart 0 felé, a mozgás aperiodikus.

$\beta)$   $\beta^2 = \omega_0^2$ . A megoldás

$$x = (B_1 + B_2 t) e^{-\beta t}.$$

Ez ismét aperiodikus mozgást ír le az előbbihez képest gyorsabban csökkenő kitéréssel (határeset).

$\gamma)$  Fizikai szempontból legjelentősebb a periodikus mozgás esete, amely  $\beta^2 < \omega_0^2$  esetén következik be. Legyen

$$\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \equiv i\omega_1, \quad \text{ahol } i = \sqrt{-1} \text{ és } \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (4)$$

Ezeket figyelembe véve az (1) alatti általános megoldás az Euler formula alkalmazásával

$$x = A e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \varphi) \quad (5)$$

alakba írható, ahol  $A$  és  $\varphi$  az  $A_1$  és  $A_2$  helyett bevezetett két új konstans.

Értékük  $t=0$ -ban  $x=x_0$  és  $\frac{dx}{dt}=0$  kezdeti feltételek mellett

$$A = \frac{x_0 \omega_0}{\omega_1} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_1}{\beta}. \quad (6)$$

(5)  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  rezgésidejű csillapodó rezgést ír le.

Ha  $\beta=0$ , vagyis csillapodás nélküli szabad rezgésről van szó, akkor  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\omega_1 = \omega_0$  és  $A = x_0$  miatt

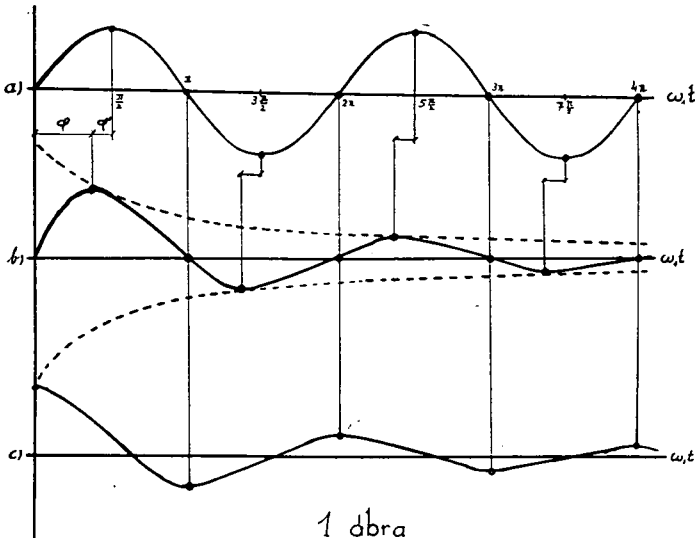
$$x = x_0 \cos \omega_0 t. \quad (5/a)$$

A rezgés ideje:  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

(5) és (5/a) összehasonlításából azonnal látszik, hogy a csillapított rezgés  $\omega_1$  körfrekvenciája kisebb (rezgésideje nagyobb), mint az azonos rugalmas erő hatására létrejövő csillapítatlan rezgésé. A csillapodás tehát a rezgésidőt növeli.

Végezetül igen tanulságos az (5)-ben szereplő  $\varphi$  fázisállandó közelebbi vizsgálata. Mindenekelőtt ábrázoljuk az  $x = A \cdot \sin \omega_1 t$  csillapítatlan rezgést egy olyan koordináta-rendszerben, amelynek vízszintes tengelyére  $\omega_1 t - t$ , a függőleges tengelyére pedig az  $x$  elongációt mérjük fel. A kapott görbe maximális, ill. minimális értékei a  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\pm 3 \frac{\pi}{2}$ , ... helyeken vannak. (1/a ábra).

Ábrázoljuk ezek után az  $x = Ae^{-\beta t} \sin \omega_1 t$  ugyancsak  $\omega_1$  körfrekvenciájú csillapított rezgés képét az előbbi rendszerben. (1/b ábra.) Amint látható,



ennek a görbének nullpontjai az előbbivel azonos helyeken vannak, maximumai (minimumai) azonban az előbbi maximumaihoz (minimumaihoz) képest

$$\varphi' = \arctg \frac{\beta}{\omega_1}$$

szöggel balra tolódtak. Hogy az elongáció görbéjének a kezdeti feltételünknek megfelelően a 0-helyen maximuma legyen, azt  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi'$  szöggel balra kell eltolnunk, vagyis a görbe egyenletébe  $\sin \omega_1 t$  helyett  $\sin(\omega_1 t + \varphi)$ -t kell írunk. (1/c ábra.) (Az  $e^{-\beta t}$  helyébe nem kell  $e^{-\beta(t+\frac{\varphi}{\omega_1})}$ -et írni, mert  $e^{-\beta(t+\frac{\varphi}{\omega_1})} = e^{-\beta t} e^{-\beta \frac{\varphi}{\omega_1}} = \text{const.} \cdot e^{-\beta t}$ , vagyis az átírás csupán az ordináták arányos növekedését okozza.) (5)-ben fellépő  $\varphi$  fázisállandó fellépése tehát azt biztosítja, hogy megoldásgörbéknek  $\omega_1 t = 0$ -ban maximuma van.

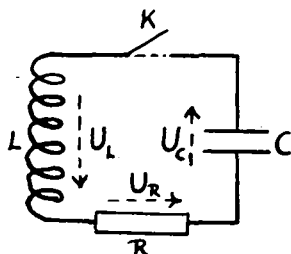
(5)-ből az idő szerinti deriválással (4) és (6) figyelembevételével a csillapított rezgést végző tömegpont sebessége

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 e^{-\beta t} \sin \omega_1 t. \quad (7)$$

A kapott kifejezésben fellépő negatív előjel azt jelzi, hogy csökkenő elongációhoz tartozó sebesség negatív előjelű. A sebesség előjelének a gyakorlati megfontolásokban különösebb jelentősége nincsen s ezért a következőkben tőle eltekintve azt mondhatjuk, hogy a sebesség (l. az 1/b ábrán folytonos vonallal kihúzott görbét)  $\varphi$  szöggel késik az elongációhoz képest.

### b) Elektromos rezgés.

Tekintsük a 2. ábrán látható,  $L$  önindukciót,  $R$  ohmikus ellenállást és  $C$  kapacitást tartalmazó rezgőkört, melynek kondenzátora  $U$  feszültségű. (A lemezeken levő töltés  $+q_0$ , ill.  $-q_0$ .) Ha a  $K$  kapcsolót zárjuk, a körben időben változó  $I$  áram indul meg. Kérdés: milyen ennek időbeli lefutása?



2. ábra.

A zárt körben egy időpillanatban az áram iránya legyen az óramutató járásával egyező. A kapcsolási elemeken e pillanatban a feszültségesések  $U_L$ ,  $U_R$  és  $U_C$ . Kirchhoff II. törvénye értelmében

$$U_L + U_R + U_C = 0,$$

vagy

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{q}{C} = 0. \quad (8)$$

Figyelembe véve az  $I = \frac{dq}{dt}$  összefüggést, (8)

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \quad (8/a)$$

alakba írható át. Ez az egyenlet tökéletes analógiát mutat az (1) alatti egyenlettel. Az egymásnak megfelelő, analóg szerepet játszó mennyiségek:

$$m \sim L$$

$$w \sim R$$

$$k \sim \frac{1}{C}$$

$$x \sim q.$$

(8/a)-t  $L$ -lel osztva és a

$$\frac{R}{L} = 2\beta, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

jelöléseket bevezetve a

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0 \quad (8/b)$$

egyenletre jutunk, amely az (1/a)-nak a megfelelője s így megoldásai az előbbieket alapján azonnal felírhatók. Csupán a  $\beta^2 < \omega_0^2$  ( $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$ ) periodikus esetre szorítkozva

$$q = A e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (9)$$

ahol

$$A = \frac{q_0 \omega_0}{\omega_1} \quad \text{és} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega_1}{\beta}. \quad (10)$$

A kondenzátor töltése tehát periódikusan változva exponenciálisan csökken. A váltakozás periódusa:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{1 - \frac{R^2 C}{4L}}}$$

Ha  $\beta = 0$  ( $R = 0$ ), akkor a töltésváltakozás időbeli lefutása (5/a) alapján

$$q = q_0 \cos \omega_0 t$$

és a váltakozás periódusideje

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{LC}.$$

Tekintve, hogy  $U_C = \frac{q}{C}$ , azért

$$U_C = \frac{A}{C} e^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \quad (11)$$

vagyis a kondenzátoron bekövetkező feszültségingadozás fázisban van töltésének változásával.

A körben folyó áramerősség a mechanikai rezgés sebességének felel meg:

$$I \sim v.$$

(7) alapján tehát  $I$  azonnal felírható

$$I = -A \omega_0 e^{-\beta t} \sin \omega_1 t. \quad (12)$$

A két jelenség között fennálló szoros analógia alapján mindaz, amit a mechanikai csillapított rezgés  $\omega_1$  körfrekvenciájáról és  $\varphi$  fázisállandójáról a) alatt elmondtunk, értelemszerűen átvihető az elektromos rezgésekre is. Így

$\alpha$ )  $\omega_1 < \omega_0$ , vagyis a csillapodás csökkenti a körfrekvenciát (növeli a rezgésidőt).

$\beta$ ) Az  $I$  negatív előjele azt mutatja, hogy a kondenzátoron levő pozitív töltés csökkenésével kapcsolatos ún. kisütési áram iránya a 2. ábrán felvett pozitív iránnyal ellentétes. Ettől az előjeltől itt is eltekinthetünk.

$\gamma$ )  $\varphi$  fellépése  $q$  ( $U_C$ ) kifejezésében azt biztosítja, hogy a megoldás a kezdeti feltételeinknek megfelelő legyen.

$\delta$ )  $\varphi$  azt a fázisszöveget jelenti, amellyel a körben folyó áramintenzitás elmarad a kondenzátor feszültsége mögött.

## II. Kényszerrezgések.

a) *Mechanikai kényszerrezgés.*

Működtessünk az  $I/a$  alatt tárgyalt rezgésre képes rendszerünkre az  $X$  tengely irányában működő  $P \cdot \sin \omega t$  kényszerítő erőt. A mozgás egyenlete a szokásos alakra rendezve

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + w \frac{dx}{dt} + kx = P \sin \omega t. \quad (13)$$

Az egyenletet  $m$ -mel osztva és bevezetve a

$$\frac{w}{m} = 2\beta, \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{P}{m} = p$$

jelöléseket, (14) a következő alakra hozható:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = p \sin \omega t. \quad (13/a)$$

Ennek az inhomogén konstans együtthatójú másodrendű lineáris differenciálegyenletnek az általános megoldását úgy kapjuk meg, hogy a hozzá tartozó homogén egyenlet általános megoldásához hozzáadjuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.  $\omega_0^2 > 2\beta^2$  esetén az általános megoldás

$$x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega_1 t + \varphi) + K \sin(\omega t + \Phi),$$

ahol  $\omega_1$ ,  $A$  és  $\Phi$  értékét a (4) és (6) adják, és a (13/a) partikuláris megoldását adó  $K \cdot \sin(\omega t + \Phi)$ -ben  $K$  és  $\Phi$  meghatározandó mennyiségek. Egy bizonyos idő elteltével a megoldásfüggvény első tagja a második mellett elhanyagolható kicsinnyé lesz. Csupán erre, a fizikai megfontolások szempontjából egyedül jelentős esetre korlátozódva (13/a) megoldása:

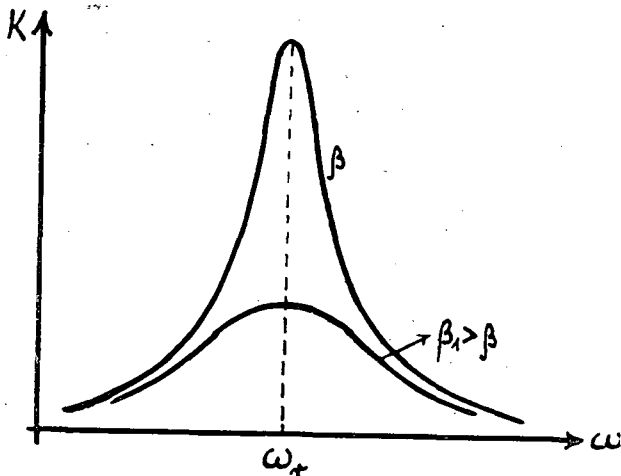
$$x = K \sin(\omega t + \Phi). \quad (14)$$

$K$  és  $\Phi$  meghatározása (14)-nek (13/a)-ba való helyettesítésével történik. A számítás eredménye:

$$K = \frac{p}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (16)$$

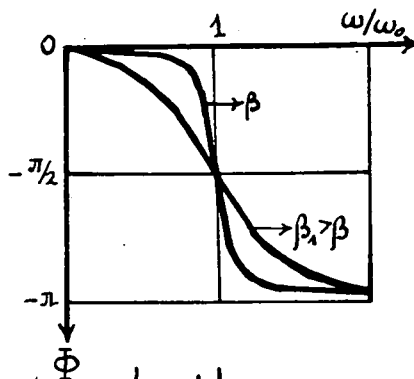
A kapott két kifejezésből látható, hogy adott rezgő rendszer és konstans  $p$  esetén mind  $K$ , mind  $\Phi$  a gerjesztő  $\omega$  körfrekvenciájától függ.  $K$  kifejezésének  $\omega$  szerinti differenciálásával kimutatható, hogy  $K(\omega)$  függvénynek  $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$  helyen maximuma van. Koordináta transzformációval ugyancsak könnyen belátható, hogy  $K(\omega)$  szimmetrikus az  $\omega_r$  körfrekvencia értékre. Az  $\omega_r$  helyen maximummal rendelkező és  $\omega_r$ -re szimmetrikus  $K(\omega)$  tehát harang-görbe alakú. Neve rezonancia-görbe. (3. ábra.)  $\omega_r$  az ún. rezonancia



3. ábra.

körfrekvencia. A rezonancia-görbe maximális értéke és szélessége (meredeksége) a rendszer csillapodását megszabó  $\beta$ -tól függ. Minél kisebb  $\beta$ , annál keskenyebb a rezonancia görbe által határolt terület és annál nagyobb a maximuma.

Ami most már  $\Phi$ -t illeti: (14)-ből látható, hogy a tömegpont rezgése általában nincsen fázisban a gerjesztővel. Ezen azt értjük, hogy kilengésének maximumát általában nem akkor éri el, mikor a gerjesztő erő maximális.  $\Phi$  méri a köztük levő fáziskülönbséget. (16)-ből láthatóan  $\Phi$  tangense negatív, ha  $\omega \leq \omega_0$  és pozitív, ha  $\omega > \omega_0$ . Ebből, valamint a fáziskülönbség folytonos változásából következik, hogy  $\Phi$  lefutásának a 4. ábrán láthatónak kell lennie.  $\Phi$ -nek  $\beta$ -tól való függése is leolvasható az ábráról.



4. ábra.

Eredményeink fizikai tartalmát röviden a következőkben foglalhatjuk össze: ha egy rezgésre képes rendszerre periódikusan változó erő hat, akkor a rendszer a csillapodó rezgéskomponens „elhalása” után a gerjesztő körfrekvenciájával kényszerrezgést végez. Adott rezgő rendszernél a kényszerrezgés amplitúdója és a gerjesztőhöz viszonyított fázisa a gerjesztő  $\omega$  körfrekvenciájától függ. Ha  $\omega$  vagy sokkal nagyobb, vagy sokkal kisebb a gerjesztett rendszer adataitól függő  $\omega_r$  rezonancia körfrekvenciánál, akkor a rezgés amplitúdója kicsiny. Ha a gerjesztő körfrekvenciáját bármely irányból közelítjük  $\omega_r$  felé, a rezgésamplitúdó növekszik s ha  $\omega = \omega_r$ , akkor maximális értékű lesz. Ez esetben — amint mondani szokás — a gerjesztett rendszer rezonál a gerjesztőre. A rezonancia amplitúdó különösen nagy lesz, ha kicsi a rendszer csillapodása. A rezonancia körfrekvenciáról érdemes megjegyezni, hogy az kisebb mind a csillapodás nélküli rezgésre képes rendszer  $\omega_0$ , mind pedig a csillapodó rezgést végző rendszer  $\omega_1$  körfrekvenciájánál. Tehát  $\omega_0 > \omega_1 > \omega_r$ .

A fázisviszonyokat tekintve megállapítottuk, hogy a gerjesztett rendszer késik a gerjesztőhöz képest. Ha  $\omega < \omega_0$ , akkor a késés kisebb mint  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\omega = \omega_0$  esetén  $\frac{\pi}{2}$ . Ha  $\omega > \omega_0$ , akkor  $\pi/2$ -nél nagyobb s ha  $\omega \gg \omega_0$ , akkor közel  $\pi$  a fáziskésés.



Az eddigiekben a kényszerrezgés elongációját vizsgáltuk. A következőkben egész röviden az analógiák szempontjából fontos sebességviszonyokat tekintjük át. (14)-ből

$$v = K\omega \cos(\omega t + \Phi) = K\omega \sin(\omega t + \delta), \quad (17)$$

ahol  $\delta = \Phi + \frac{\pi}{2}$  és

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{1}{\operatorname{tg} \Phi} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\beta\omega}. \quad (18)$$

A sebesség  $K\omega$  amplitúdója maximális, ha

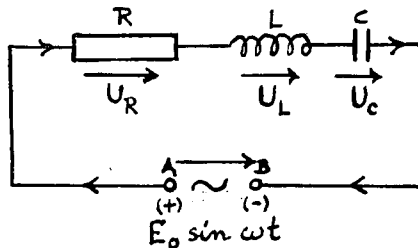
$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (19)$$

vagyis ha a gerjesztő körfrekvenciája a gerjesztett csillapodás nélküli körfrekvenciájával egyenlő. Ez esetben  $\delta = 0$ , vagyis a gerjesztő erő és a rezgő tömeg sebessége fázisban van.

b) *Elektromos kényszerrezgés.*

1. Soros kapcsolású elektromos rezgőkör kényszerrezgése.

Az 5. ábrán látható rezgőkör  $AB$  kapcsaira  $E_0 \cdot \sin \omega t$  váltakozó elektro-



5. ábra.

motoros erőt (eme) kapcsolunk. A körben ennek hatására lejátszódó jelenségeket az

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0 \sin \omega t$$

differenciálegyenlet írja le. Ennek bal oldala azonos a (8/a)-val.  $L$ -lel osztva az egyenletet és bevezetve a

$$2\beta = \frac{R}{L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad p = \frac{E_0}{L}$$

jelöléseket, a megoldandó egyenlet formailag azonos lesz (13/a)-val. A körben tehát elektromos kényszerrezgés jön létre. Ennél a kondenzátor töltése a csillapodó rezgés elhalása után (14) alapján

$$q = K \sin(\omega t + \Phi)$$

összefüggés szerint változik, ahol  $K$  és  $\text{tg } \Phi$  értékét (15) és (16) adja. Elektromos mennyiségekkel kifejezve

$$K = \frac{E_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad \text{és} \quad \text{tg } \Phi = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{\omega C}}$$

Változó  $\omega$  esetén  $K$  értéke és ezzel együtt  $q$ , ill.  $U_c = \frac{q}{C}$  maximális, ha a gerjesztő körfrekvenciája

$$\omega = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}$$

Ez esetben a kondenzátor feszültsége  $\pi/2$ -vel késik a gerjesztő elektromotoros erejéhez képest.

A körben folyó áramerősség (17) alapján

$$I = K\omega \sin(\omega t + \delta)$$

Az áramerősség amplitúdója és fázisállandója (17) és (18) alapján számítva

$$K\omega = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\text{tg } \delta = \frac{\frac{1}{\omega C} - L\omega}{R}$$

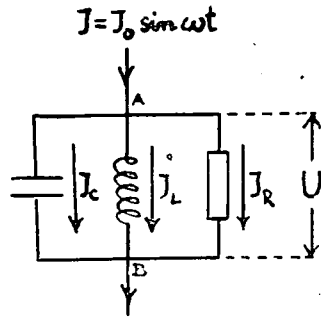
$\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$  a kör váltóáramú ellenállása, impedanciája.  $\delta$  az áramerősség és a gerjesztő eme közti fáziskülönbséget méri. (19) szerint, ha  $\omega = \omega_0 \left(L\omega = \frac{1}{\omega C}\right)$ , akkor az áramerősség amplitúdója maximális és értéke  $\frac{E_0}{R}$ . Ez esetben  $\delta = 0$ , vagyis a körben folyó áramerősség a gerjesztő eme-jével fázisban változik (feszültségrezonancia).

2. Párhuzamos kapcsolású elektromos rezgőkör kényszerrezgése.

A 6. ábrán látható párhuzamos rezgőkör is analógiát mutat az a) alatt tárgyalt mechanikai rezgő rendszerrel. Ez belátható, ha felírjuk a körre érvényes differenciálegyenletet, amely az

$$I = I_L + I_C + I_R \quad (20)$$

Kirchhoff törvényből kapható. Ebben  $I = I_0 \sin \omega t$  a külső körben,  $I_L = \frac{1}{L} \int_0^t U dt$



6. ábra.

$I_c = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}$ ,  $I_R = \frac{1}{R} U = GU$  az  $L$ -,  $C$ - és  $R$ -t tartalmazó ágba folyó áram erőssége. Figyelembe véve, hogy  $U = \frac{d\Psi}{dt}$  ( $\Psi$  a tekercs menetfelületén áthaladó fluxus) és a kapott kifejezéseket (20)-ba helyettesítve nyerjük a párhuzamos körre érvényes

$$C \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + G \frac{d\Psi}{dt} + \frac{\Psi}{L} = I_0 \sin \omega t \quad (21)$$

differenciálegyenletet. Ez az egyenlet analóg (13)-mal. Az egymásnak megfelelő mennyiségek:

$$m \sim C$$

$$w \sim G$$

$$k \sim \frac{1}{L}$$

$$\Psi \sim x$$

$$P \sim I_0.$$

Az analógia alapján azonnal megmondható, hogy a 6. ábrán látható körben kényszerrezgés jön létre, ha a külső körben periódikusan váltakozó áram folyik. A mennyiségi összefüggések is könnyen lehozhatók az analógia alapján.  $C$ -vel osztva az egyenletet és bevezetve a

$$2\beta = \frac{G}{C}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad p = \frac{I_0}{C}$$

jelöléseket,  $\Psi$ -re a (13/a)-hoz hasonló egyenletet nyertünk. Ennek fizikai szempontból jelentős megoldása

$$\Psi = K \sin(\omega t + \Phi),$$

$$\text{ahol } K = \frac{I_0}{\omega \sqrt{G^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} \quad \text{és} \quad \text{tg } \Phi = \frac{G}{C\omega - \frac{1}{L\omega}}.$$

Ezek az értékek (15) és (16) alapján azonnal felírhatók voltak.

A tekercs menetfelületén áthaladó  $\Psi$  indukciófluxusnál általában fontosabb a kör  $AB$  sarkain fellépő  $U$  feszültségnek az ismerete. Ezt  $\Psi$ -nek az idő szerinti deriváltja szolgáltatja s így  $U$  a  $v$ -vel analóg mennyiség. (17) alapján

$$U = K\omega \sin(\omega t + \delta),$$

$$\text{ahol } U_0 \equiv K\omega = \frac{I_0}{\sqrt{G^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}} \quad \text{és} \quad \text{tg } \delta = \frac{\frac{1}{L\omega} - C\omega}{G}.$$

$\sqrt{G^2 + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$  a párhuzamos kapcsolású kör vezetőképessége.

Ha a külső körben folyó áramintenzitás  $\omega$  körfrekvenciája megegyezik  $\omega_0$ -lal, akkor  $U_0 = \frac{I_0}{G}$  maximális értékű és  $\delta = 0$ . Ezt az áramrezonanciának nevezett esetet a kör vezetőképességének minimális (az ellenállás maximális) értéke jellemzi.

Fontos speciális eset az, mikor  $G=0$ , vagyis amikor  $R$  hiányzik a 6. ábrán látható körből. Ez esetben

$$U_0 = \frac{I_0}{C\omega - \frac{1}{L\omega}}$$

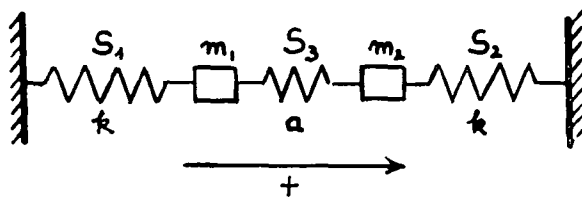
és  $\text{tg } \delta = \pm \infty$  aszerint, hogy  $\frac{1}{L\omega}$  vagy  $C\omega$  a nagyobb. Ha ez esetben  $\omega = \omega_0$ , akkor az  $LC$  kör kapcsain bekövetkező feszültségesés amplitúdója és a kör ellenállása is  $\infty$ , feltételezve, hogy a külső körben folyó áramintenzitást a külső feszültség növelésével állandónak tartjuk.

### III. Kapcsolt rezgések.

#### a) Mechanikai kapcsolt rezgés.

Tekintsük a 7. ábrán látható mechanikai rendszert. Az  $m_1$ , illetve  $m_2$  tömegre működnek azonos  $k$  együtthatójú  $S_1$ , ill.  $S_2$  rugalmas erő, míg az  $a$  együtthatójú  $S_3$  rugalmas erő a két tömeg közti „kapcsolatot” létesíti. Gondoljuk mindkét tömeget az ábrán jelzett pozitív irányban kitérítve, de úgy, hogy  $m_1$   $x_1$  kitérése nagyobb legyen mint  $m_2$   $x_2$  kitérése. A két tömeg mozgásegyenlete:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -kx_1 + a(x_2 - x_1) \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -kx_2 + a(x_1 - x_2) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$



7. ábra.

(A következőkben a számítások egyszerűsítése végett legyen  $m_1 = m_2 = m$ .)  
 E két lineáris differenciálegyenletből álló rendszer partikuláris megoldásait a következő alakban tételezzük fel:

$$x_1 = A e^{i\omega t}, \quad x_2 = B e^{i\omega t},$$

ahol  $A$  és  $B$  konstansok és  $\omega$  a meghatározandó körfrekvencia.

$\omega$  meghatározása; a feltételezett megoldásokat a (22) alatti egyenletekbe helyettesítve a következő egyenletekre jutunk:

$$\left. \begin{aligned} (-m\omega^2 + k + a)A - aB &= 0 \\ -aA + (-m\omega^2 + k + a)B &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

E két egyenlet  $A$  és  $B$ -re feltételeket szab meg, de csak akkor ad 0-tól különböző  $A$  és  $B$  értékeket, ha a rendszer determinánsa 0, vagyis ha

$$\begin{vmatrix} -m\omega^2 + k + a & -a \\ -a & -m\omega^2 + k + a \end{vmatrix} = 0.$$

Ebből a feltételből

$$\omega_{+,-}^2 = \frac{k+a}{m} \pm \frac{a}{m},$$

ahol  $\omega_+$  a + jellel,  $\omega_-$  a - jellel tekintett  $\omega^2$  értéket jelenti. Ha a két tömeg közül bármelyiket a másiktól függetlenül rezgésbe hozzuk, a rezgés

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -(k+a)x$$

egyenlete alapján a rezgés körfrekvenciája

$$\omega_0^2 = \frac{k+a}{m}.$$

Ezt figyelembe véve

$$\left. \begin{aligned} \omega_+^2 &= \omega_0^2 + \frac{a}{m} = \frac{k+2a}{m} \\ \omega_-^2 &= \omega_0^2 - \frac{a}{m} = \frac{k}{m} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

A csatolt rendszernek tehát két, abszolút értékben különböző saját körfrekvenciája van:  $\omega_+$  és  $\omega_-$ . Ezek közül az egyik nagyobb, a másik pedig kisebb mint a csatolt rendszerek egyik tagjának  $\omega_0$  saját frekvenciája, úgy hogy  $\omega_+^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 - \omega_-^2$ . A körfrekvenciák különbsége annál nagyobb, minél nagyobb az  $a$  csatolási tényező (állandónak feltételezett tömegek mellett).

A (22) általános megoldása;  $\omega_+$  értékét helyettesítve a (23)-ba,  $A$  és  $B$  közti kapcsolatra

$$A_+ = -B_+,$$

$\omega_-$  értékével pedig

$$A_- = B_-$$

összefüggésre jutunk. Ezeket a megkötéseket és  $\omega$  négy lehetséges értékét ( $\pm \omega_+$ ,  $\pm \omega_-$ ) figyelembe véve a (22) alatti differenciálegyenletrendszer általános megoldásai:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= A_1 e^{i\omega_+ t} + A_2 e^{-i\omega_+ t} + A_3 e^{i\omega_- t} + A_4 e^{-i\omega_- t} \\ x_2 &= -A_1 e^{i\omega_+ t} - A_2 e^{-i\omega_+ t} + A_3 e^{i\omega_- t} + A_4 e^{-i\omega_- t} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Az  $A$ -k adott kezdeti feltételekből meghatározható konstansok.

Tekintsünk néhány speciális esetet!

$\alpha$ )  $t=0$ -nál  $x_1 = x_2 = K$  és  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$ . Ekkor  $A_1 = A_2 = 0$ ,  $A_3 = -A_4 = \frac{K}{2}$  és

$$x_1 = K \cdot \cos \omega_- t$$

$$x_2 = K \cdot \cos \omega_- t.$$

A rendszer ekkor  $\omega_-$ -szal, a kisebb saját frekvenciájával rezeg.

$\beta$ )  $t=0$ -nál  $x_1 = K$ ,  $x_2 = -K$  és  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$ . Ekkor  $A_1 = A_2 = \frac{K}{2}$ ,  $A_3 = A_4 = 0$  és

$$x_1 = K \cdot \cos \omega_+ t$$

$$x_2 = -K \cdot \cos \omega_+ t.$$

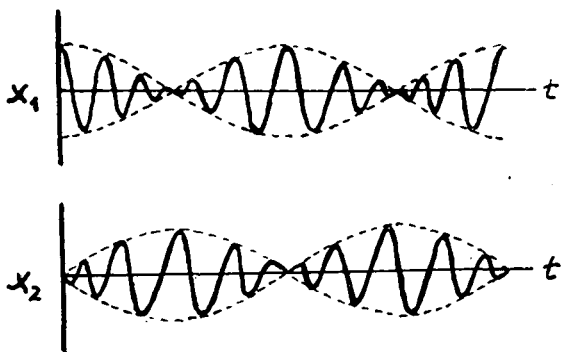
A rendszer ekkor az  $\omega_+$  nagyobb saját frekvenciájával rezeg.

$\gamma$ )  $t=0$ -nál  $x_1 = K$ ,  $x_2 = 0$ ,  $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = 0$ . Ekkor  $A_1 = A_2 = A_3 = -A_4 = \frac{K}{4}$  és

$$x_1 = K \cdot \cos \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t$$

$$x_2 = K \cdot \sin \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_+ + \omega_-}{2} t.$$

Laza csatolást ( $a$  kicsi és  $\omega_+ - \omega_- \ll \omega_+ + \omega_-$ ) feltételezve, a rendszer mindkét tagja lebegést végez a 8. ábrán látható módon.

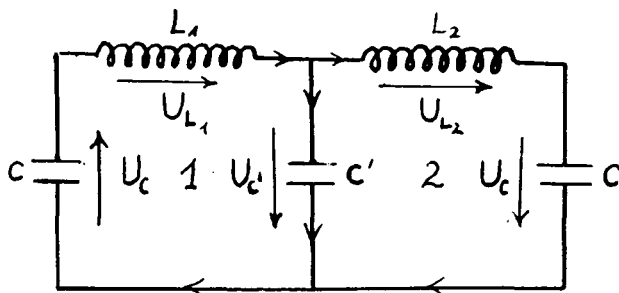


8. ábra.

b) Elektromos kapcsolt rezgések.

1. Kapacitív kapcsolt kör.

A 9. ábrán látható 1 és 2 körre alkalmazzuk Kirchhoff II. törvényét;



9. ábra.

$$U_{L_1} + U_c + U_{c'} = 0$$

$$U_{L_2} + U_c - U_{c'} = 0.$$

Beírva a feszültségek értékeit

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + \frac{q'}{C'} &= 0 \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{q_2}{C} - \frac{q'}{C'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Kirchhoff I. törvényének az  $E$  pontra való alkalmazásával kapott  $I_1 = I' + I_2$  egyenlet integrálásából  $q' = q_1 - q_2$  következik. Ezt beírva a (26) alatti egyenletekbe és figyelembe véve, hogy  $I = \frac{dq}{dt}$ , nyerjük a  $C'$  kapacitással kapcsolt körök kondenzátorainak töltésére felírt differenciálegyenlet-rendszert:

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C} + \frac{q_1 - q_2}{C'} &= 0 \\ L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C} + \frac{q_2 - q_1}{C'} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26/a)$$

Ez az egyenletrendszer a (22) alattinak felel meg. Az analóg mennyiségek:

$$\left. \begin{aligned} m_i &\sim L_i \\ x_i &\sim q_i \end{aligned} \right\} (i = 1, 2)$$

$$k \sim \frac{1}{C}$$

$$a \sim \frac{1}{C'}$$

Ha  $L_1 = L_2 = L$ , akkor (24) alapján azonnal kiszámítható az elektromos rendszernek két saját körfrekvenciája:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2C + C'}{LCC'}}$$

$$\omega_- = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Ezek mindegyike különbözik a külön-külön tekintett körök

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C + C'}{LCC'}}$$

saját körfrekvenciájától:  $\omega_+ > \omega_0 > \omega_-$ . A különbség állandónak feltételezett  $L$  mellett az  $\frac{1}{C'}$  csatolási tényezőtől függ.

Az analógia alapján mindazok a speciális rezgési esetek, melyeket a) alatt tárgyaltunk, az elektromosan csatolt körökre is átvihetők. Ez alapján ha a két  $C$  kapacitású kondenzátort  $t = 0$ -ban úgy töltjük fel, hogy külön-külön a közös vezetékben ellentétes irányú áramot hajtsanak át, akkor mindkét rendszer  $\omega_-$ , ha pedig úgy töltjük fel őket, hogy külön-külön a közös vezetékben azonos irányú áramot hajtsanak át, akkor mindkét rendszer  $\omega_+$  körfrekvenciával rezeg. Ha kezdetben csak az egyik kondenzátort töltjük fel és kisütésével rezgésbe hozzuk az egyik kört, akkor lebegés jön létre a rendszerben. A 8. ábra az elektromos kapcsolt körök lebegését is szemlélteti, ha a függőleges tengelyre a kondenzátorok  $q$  töltését, ill. a velük fázisban változó  $U_C$  kondenzátorfeszültségeket gondoljuk felmérve.

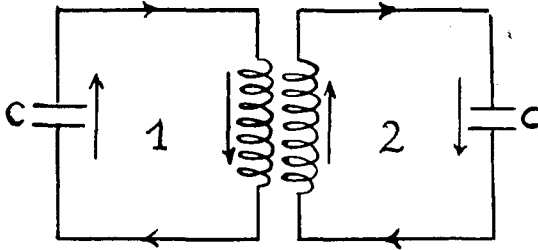


2. Induktíve kapcsolt körök.

A 10. ábra induktíve kapcsolt rezgőköröket ábrázol. Az ilyen módon kapcsolt körök differenciál-egyenletrendszerre

$$\left. \begin{aligned} L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{q_1}{C} + M \frac{dI_2}{dt} &= 0 \\ L_2 \frac{dI_2}{dt} + \frac{q_2}{C} + M \frac{dI_1}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

( $M$  a két tekercs kölcsönös indukciós együtthatója.)



10. ábra.

Legyen ebben az esetben is  $L_1 = L_2 = L$ . Figyelembe véve még a

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{d^2 q_1}{dt^2} \quad \text{és a} \quad \frac{dI_2}{dt} = \frac{d^2 q_2}{dt^2}$$

összefüggéseket, (27) a következőképpen írható át:

$$\left. \begin{aligned} L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C} + M \frac{d^2 q_2}{dt^2} &= 0 \\ L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{q_2}{C} + M \frac{d^2 q_1}{dt^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27/a)$$

A második egyenletből  $\frac{d^2 q_2}{dt^2}$ -et kifejezve és az első egyenletbe helyettesítve, majd az elsőből kifejezett  $\frac{d^2 q_1}{dt^2}$ -et a másodikba téve a következő egyenletrendszerre jutunk:

$$\left. \begin{aligned} \left( L - \frac{M^2}{L} \right) \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \left( \frac{1}{C} - \frac{M}{CL} \right) q_1 + \frac{M}{CL} (q_1 - q_2) &= 0 \\ \left( L - \frac{M^2}{L} \right) \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \left( \frac{1}{C} - \frac{M}{CL} \right) q_2 + \frac{M}{CL} (q_2 - q_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27/b)$$

Ez az egyenletrendszer a (22) alattinak a megfelelője, csak itt

$$L - \frac{M^2}{L} \sim m$$

$$\frac{L - M}{CL} \sim k$$

$$\frac{M}{CL} \sim a$$

$$q_i \sim x_i \quad (i = 1, 2)$$

az egymásnak megfelelő mennyiségek. (24) alapján

$$\omega_+^2 = \frac{1}{C(L - M)}, \quad \omega_-^2 = \frac{1}{C(L + M)}.$$

Az  $\omega_0^2 = \frac{k + a}{m}$  összefüggés alkalmazásánál figyelembe kell venni, hogy amennyiben az egyik kört kiiktatjuk,  $M = 0$  lesz s így

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

A rendszer mindkét rezgőkörre  $\omega_-$ , ill.  $\omega_+$  körfrekvenciával rezeg, ha a tekercsekben minden időpillanatban egy irányban, ill. ellentétes irányban folyik az áram. Végezetül az eddig tárgyalt kapcsolt körökhöz hasonlóan az induktíve kapcsolt rendszereknél is lebegés lép fel, ha az egyik kört rezgésbe hozva a rendszert magára hagyjuk.

#### IRODALOM

*Budó Ágoston*, Mechanika. Tankönyvkiadó, 1951.

*Kohlrausch*, Ausgewählte Kapitel aus der Physik IV. Teil, Springer Verlag Wien, 1948.

*Vilbig*, Lehrbuch der Hochfrequenztechnik, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig, 1953.

*Hupert*, Parallel-Circuit Equivalent of Mechanical Vibrations, American Journal of Physics. Vol. 27 Nb. 6. (1959).

*Baule*, Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs Bd. IV, S. Hirzel Verlag in Leipzig, 1950.

#### ÜBER DIE ANALOGIE DER MECHANISCHEN UND ELEKTRISCHEN SCHWINGUNGEN

Von

P. KÖVESDI

Der Verfasser stellt in dem Artikel die Analogien zwischen den freien, zwangsmäßigen und gekoppelten Schwingungen mechanischer oder elektrischer Art vom Standpunkt deren Anwendung im höheren Unterricht in systematischer Ordnung dar.