MEGJEGYZÉS AZ ALGEBRAILAG ZÁRT MODULUSOK ELMÉLETÉHEZ

Írta: PAPP ZOLTÁN

A moduluselméletben gyakori a következő problémakörök felvetése. Ha megadjuk az ABEL-féle csoportok egy tulajdonságát, akkor:

a) egy adott R gyűrűhöz határozzuk meg az összes olyan R-modulust, amely rendelkezik a megadott tulajdonsággal;

b) határozzuk meg az összes olyan R gyűrűt, hogy bármely R-modulus rendelkezzék a megadott tulajdonsággal.

A két problémakör egymásnak duálisa. Az első csoportba tartozó problémák vizsgálata a csoportok és modulusok elmélete szempontjából jelentősek, míg a másik részben elért eredmények inkább a gyűrűelméletet gazdagítják. Dolgozatunkban a fenti két problémakörrel kapcsolatos kérdéseket vizsgálunk.

Előismeretek szempontjából utalunk KERTÉSZ ANDOR [1] dolgozataira, és itt csak a legfontosabb fogalmakat és elnevezéseket foglaljuk össze.

Egy R gyűrű balideáljaira nézve teljesíti a maximumkövetelményt, (minimumkövetelményt) ha balideáljainak minden szigorúan növekvő (csökkenő) lánca csak véges sok egymástól különböző tagot tartalmaz. A maximumkövetelmény ekvivalens azzal a feltétellel, hogy az R gyűrű minden L balideálja végesen generálható. Ezeket a gyűrűket NOETHER-féle gyűrűknek nevezik.

Féligegyszerűnek nevezünk egy gyűrűt, ha balideáljaira nézve teljesíti a minimumkövetelményt és nem tartalmaz nilpotens balideált a $\{0\}$ balideálon kívül. (Az R gyűrű egy L balideálja nilpotens, ha létezik olyan természetes szám, hogy $L^n = 0$). Ismeretes az a tétel, mely szerint a gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha jobbegységelemes és minimális balideáljainak direkt összege.

Direkt összeg alatt midig diszkrét direkt összeget értünk, jelben: $A = \sum_i A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_i + \cdots$. Ha $G = A + B$, akkor A-t (és ennek megfelelően B-t is) G direkt összeadandójának nevezzük.

Legyen Γ egy indexhalmaz. Egy $(\ldots, A_\nu, \ldots)_{\nu \in \Gamma}$ modulusrendszert, ($A_\nu \subseteq A$ minden $\nu \in \Gamma$ esetén) függetlennek nevezünk, ha Γ minden véges rendezett $(\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_k)$ részhalmaza esetén teljesül az $A_{\nu_1} \cap \{A_{\nu_2}, A_{\nu_3}, \ldots, A_{\nu_k}\} = 0$ feltétel, azaz az A_ν $(\nu \in \Gamma)$ modulusok összege direkt összeg. A $\{\ldots.\}$ szimbólum jelenti a zárójelben szereplő elemek vagy részmodulusok által generált modulust.

Legyen H a G R-modulus részmodulusa és tekintsük az

$$(1) \qquad \langle r_\nu, n_\nu \rangle x = h_\nu \qquad (\langle r_\nu, n_\nu \rangle \in R^*, h_\nu \in H, \nu \in \Gamma)$$

egyismeretlenes kompatibilis lineáris egyenletrendszert. H-t a G R-modulus szerváns részmodulusának nevezzük, ha abból, hogy egy (1) típusú kompatibilis egyenletrendszert G-ben megoldható, mindig következik, hogy H-ban is megoldható (R^* jelenti az R gyűrű DORROH-féle egységelemes bővítését).

Ha a H R-modulusban minden (1) típusú kompatibilis egyenletrendszer megoldható, H-t algebrailag zárt R-modulusnak nevezzük. A dolgozatban felhasználjuk az algebrailag zárt R-modulusok alábbi tulajdonságait, (lásd pl. KERTÉSZ ANDOR [1] dolgozatait).

I. Tetszőleges G R-modulusnak létezik algebrailag zárt bővítése.

II. A G algebrailag zárt R-modulus direkt összeadandója minden őt tartalmazó modulusnak.

III. A $H = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ modulus akkor és csak akkor algebrailag zárt, ha minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén G_i algebrailag zárt modulus.

Az algebrailag zárt Abel-féle csoportok egy fontos tulajdonsága az, hogy ha a G Abel-féle csoportnak H_1 és H_2 algebrailag zárt részcsoportjai, akkor a $H = \{H_1, H_2\}$ részcsoport is algebrailag zárt. Tetszőleges R gyűrű esetén algebrailag zárt R-modulusokra ez nem teljesül, (később ezt egy példán látni fogjuk).

Felvetjük a következő problémát: legyenek A_1 és A_2 a G R-modulus algebrailag zárt részmodulusai. Milyen feltételek mellett lesz az $A = \{A_1, A_2\}$ R-modulus algebrailag zárt?

A probléma egy megoldását az 1. tételben fogalmazzuk meg. Ehhez szükségünk lesz a következő definícióra.

Definíció. Egy A R-modulust erősen algebrailag zárt R-modulusnak nevezünk, ha minden homomorf képe algebrailag zárt.

1. Tétel. Egy tetszőleges A_1 R-modulus akkor és csak akkor rendelkezik azzal a tulajdonsággal, hogy bármely A_2 algebrailag zárt R-modulussal együtt algebrailag zárt R-modulust generál, ha A_1 erősen algebrailag zárt.

Bizonyítás. Legyen A_1 erősen algebrailag zárt modulus és A_2 tetszőleges algebrailag zárt modulus, (feltehetjük, hogy A_1 és A_2 a G modulus részmodulusai) és

$$A = \{A_1, A_2\}, \quad A_{12} = A_1 \cap A_2.$$

Az izomorfizmus tétel felhasználásával $A|A_2 \cong A_1|A_{12}$. Mivel A_2 algebrailag zárt modulus, érvényes az $A = A_2 + C$ felbontás, tehát $C \cong A|A_2 \cong A_1|A_{12}$. Minthogy A_1 erősen algebrailag zárt, a C modulus is algebrailag zárt, ami az állításunk egyik részét bizonyítja.

Megfordítva, tegyük fel, hogy A_1 nem erősen algebrailag zárt modulus, azaz létezik egy olyan A_{12} részmodulusa, hogy $\bar{A}_1 \cong A_1|A_{12}$ nem algebrailag zárt.

Legyen $A = (A_1 + A_2)|H$ ahol $A_1 \cap A_2 = 0$, $A_1 \cong A_2$ és jelöljük ezt az izomorfizmust φ-vel; H jelentse az összes olyan $(a - a\varphi)$ elemek által alkotott részmodulust, ahol $a \in A_{12}$, ekkor $A_1 \cap H = A_2 \cap H = 0$.

Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$B_1=(A_1+H)|H, \quad B_2=(A_2+H)|H, \quad B_{12}=(A_{12}+H)|H.$$

Könnyű belátni, hogy $A=\{B_1, B_2\}$, $B_1 \cap B_2 = B_{12}$, $B_1 \cong A_1$, $B_2 \cong A_2$ és $B_1|B_{12} \cong \bar{A}_1$. Mivel B_2 algebrailag zárt modulus, $A=B_2+C$ és így az izomorfizmus tétel alapján

$$C \cong A|B_2 \cong B_1|B_{12} \cong \bar{A}_1$$

tehát $\bar{A}_1$-gyel együtt C sem algebrailag zárt modulus. Ebből következik, hogy a $\{B_1, B_2\}=A=B_2+C$ modulus sem lehet algebrailag zárt, ami a tétel másik állítását bizonyítja.

Megmutatjuk, hogy létezik olyan algebrailag zárt modulus, amely nem erősen algebrailag zárt.

Legyen $\mathfrak{G}_2$ a páros számok gyűrűje és $\mathfrak{G}_2^*$ az $\mathfrak{G}_2$ gyűrű DORROH-féle egységelemes bővítése. KERTÉSZ ANDOR [1] dolgozata 21. tételéből következik, hogy a racionális számok $\mathfrak{R}$ additív csoportja mint triviális $\mathfrak{G}_2$-modulus algebrailag zárt. Legyen $\mathfrak{G}$ az egész számok additív csoportja ($\mathfrak{R}$ részmodulusa) és tekintsük az $\mathfrak{R}|\mathfrak{G} \cong \sum_p C(p^\infty)$, faktormodulust. Ez nem algebrailag zárt, mert legyen az $a \in \mathfrak{R}|\mathfrak{G}$ elem rendje (az $\mathfrak{G}_2^*$ gyűrű $\langle r, n\rangle a=0$ feltételt kielégítő elemei) $O(a)=\{\langle 2, 2\rangle\}$, akkor a $\langle 2, 0\rangle x=a$ ($\langle 2, 0\rangle \in \mathfrak{G}_2^*$) egyenlet kompatibilis — ugyanis az $\langle s, m\rangle\langle 2, 0\rangle=0$ ($\langle s, m\rangle \in \mathfrak{G}_2^*$) feltételből $2s+$ $+2m=0$ azaz $s+m=0$ következik, és miután s osztható 2-vel így m is, tehát $\langle s, m\rangle a=sa+ma=0$ — de $\mathfrak{R}|\mathfrak{G}$-ben nyilván nem oldható meg, mivel $\mathfrak{R}|\mathfrak{G}$ triviális $\mathfrak{G}_2$-modulus.

A fenti példa és az 1. tétel segítségével könnyen konstruálhatunk példát olyan algebrailag zárt modulusokra, amelyek által generált modulus nem algebrailag zárt. Legyen $B_1 \cong A_1 = \mathfrak{R}$, $B_{12} \cong A_{12} = \mathfrak{G}$, akkor megadható (lásd 1. tétel) olyan B_2, hogy $A=\{B_1, B_2\}$ nem algebrailag zárt modulus.

Ezután néhány egyszerű lemmát bizonyítunk be, amelyeket a továbbiakban alkalmazni fogunk.

1. Lemma. Erősen algebrailag zárt modulusok homomorf képe is erősen algebrailag zárt.

Az állítás helyessége a homomorfizmus tranzitivitásából következik.

2. Lemma. Ha R NOETHER-féle gyűrű, akkor az erősen algebrailag zárt R-modulusok növekvő láncának egyesítési halmaza is erősen algebrailag zárt modulus.

Bizonyítás. Tekintsük az A_μ ($\mu \in \Gamma$) erősen algebrailag zárt R-modulusok növekvő láncát:

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_\mu \subseteq \ldots$$

és legyen $A=\bigcup_{\mu \in \Gamma} A_\mu$, $A \sim A' \cong A|A_0$, ahol A' A tetszőleges homomorf képe. Felhasználva az izomorfizmus tételt, tetszőleges $\mu(\in \Gamma)$ index esetén

$$B_\mu=\{A_\mu, A_0\}|A_0 \cong A_\mu|A_\mu \cap A_0,$$

tehát $B_\mu (\mu \in \Gamma)$ algebrailag zárt modulus. Ekkor a [2] dolgozat 1. tétele alapján a $B = \bigcup_{\mu \in \Gamma} B_\mu$ R-modulus is algebrailag zárt, így a következő egyenlőségek

$$A' \cong A | A_0 = \bigcup_{\mu \in \Gamma} \{A_\mu, A_0\} | A_0 = \bigcup_{\mu \in \Gamma} B_\mu = B$$

mutatják, hogy A' is algebrailag zárt R-modulus.

3. Lemma. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n (\subseteqq G)$ erősen algebrailag zárt modulusok, akkor az $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ modulus is erősen algebrailag zárt modulus.

Bizonyítás. Ha $n = 2$, akkor az 1. tétel alapján az $A = \{A_1, A_2\}$ modulus algebrailag zárt. Legyen $\bar{A}$ A tetszőleges homomorf képe, $A \sim \bar{A}$ akkor $\bar{A} = \{\bar{A}_1, \bar{A}_2\}$ ahol az $A_1 \sim \bar{A}_1$, $A_2 \sim \bar{A}_2$ homomorfizmusokat az $A \sim \bar{A}$ homomorfizmus indukálja. Mivel A_1 és A_2 erősen algebrailag zárt modulusok, az 1. lemma alapján $\bar{A}_1$ és $\bar{A}_2$ is erősen algebrailag zárt. Az 1. tételből következik, hogy $\bar{A}$ is algebrailag zárt.

Tetszőleges n esetére a tétel állítása teljes indukcióval könnyen kiterjeszthető.

A [2] dolgozat 1. tétele és a 2. Lemma alapján kimondhatjuk a következő tételt.

2. Tétel. Legyen R NOETHER-féle gyűrű és $A_\mu (\mu \in \Gamma)$ a G R-modulus erősen algebrailag zárt részmodulusai, akkor az $A = \{\ldots, A_\mu, \ldots\}_{\mu \in \Gamma}$ R-modulus erősen algebrailag zárt.

A rövidebb írásmód kedvéért azt mondjuk, hogy egy R gyűrű T-tulajdonságú, ha minden olyan A R-modulus, amelyet algebrailag zárt részmodulusai generálnak, algebrailag zárt.

A 2. tétel és KERTÉSZ ANDOR [1] dolgozatának 20. tétele alapján érvényes a következő tétel.

3. Tétel. Egy R gyűrű akkor és csak akkor T-tulajdonságú, ha NOETHER-féle és minden balideálja egy szabad R-modulus direkt összeadandója.

Befejezésül megvizsgáljuk azokat az egységelemes R gyűrűket, amelyeknél a gyűrű additív csoportja (jelölése: R^+) mint baloldali R-modulus erősen algebrailag zárt. (R-modulus alatt mindig unitér R-modulust értünk, azaz ha a gyűrű egységeleme 1, akkor $1 \cdot g = g$ teljesül minden $g \in G$ elem esetén.) Érvényes a következő tétel.

4. Tétel. Tetszőleges egységelemes R gyűrű esetén az alábbi állítások ekvivalensek:

a) R^+ erősen algebrailag zárt R-modulus;

b) Minden végesen generálható R-modulus algebrailag zárt;

c) Minden G R-modulusban a végesen generálható részmodulusok direkt összeadandók;

d) Minden G R-modulusban a végesen generálható részmodulusok szerváns részmodulusok.

Bizonyítás. *a)* $\Longrightarrow$ *b)* Legyen H tetszőleges végesen generálható R-modulus. Mivel R egységelemes, egy tetszőleges n-rangú szabad R-modulusra érvényes az

$$F = R_1 + R_2 + \cdots + R_n$$

felbontás, ahol minden i-re $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $R_i \cong R^+$. A 3. lemmából következik, hogy véges sok erősen algebrailag zárt R-modulus direkt összege is erősen algebrailag zárt, tehát F erősen algebrailag zárt R-modulus. Felhasználva azt a tételt, hogy minden végesen generált R-modulus egy véges rangú szabad R-modulus homomorf képe, azt kapjuk, hogy $H \cong F|S$, és mivel F erősen algebrailag zárt, következik, hogy H algebrailag zárt R-modulus.

A *b)* $\Longrightarrow$ *c)* és *c)* $\Longrightarrow$ *d)* állítások nyilvánvalóak, mert egy algebrailag zárt modulus minden bővítésében direkt összeadandó, és egy modulus direkt összeadandója mindig szerváns részmodulus.

d) $\Longrightarrow$ *a)* Legyen H tetszőleges végesen generált R-modulus és tekintsük H-nak egy $\bar{H}$ algebrailag zárt bővítését. A feltétel szerint H $\bar{H}$ szerváns részmodulusa, így maga is algebrailag zárt. Speciálisan R^+ és összes homomorf képe is végesen generálható R-modulusok, így algebrailag zártak. Ebből következik, hogy R^+ erősen algebrailag zárt R-modulus. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

A következő tétel a féligegyszerű gyűrűk osztálya és az előbb meghatározott gyűrűosztály közti kapcsolatra mutat rá.

5. Tétel. Egy R gyűrű akkor és csak akkor féligegyszerű, ha R^+ erősen algebrailag zárt R-modulus és az R gyűrű balideáljaira nézve teljesíti a következő két feltétel egyikét:

a) maximumkövetelmény,

b) minimumkövetelmény.

Bizonyítás. Ha az R gyűrű féligegyszerű, akkor a feltételek nyilván teljesülnek.

Mivel R^+ algebrailag zárt R-modulus, az

$$rx = r \qquad (r \in R)$$

kompatibilis lineáris egyenletrendszer megoldható R^+-ban, így az R gyűrűnek létezik jobbegységeleme.

a) Az R gyűrű teljesíti a maximumkövetelményt. A [2] dolgozat 2. tétele alapján érvényes a következő felbontás:

$$R = L_1 + L_2 + \cdots + L^n$$

ahol L_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ nem tartalmaz algebrailag zárt valódi részmodulust (balideált). Ekkor minden i-re L_i minimális balideál. Ellenkező esetben, ha egy L_i' balideálra $L_i' \subset L_i$ teljesülne, akkor tetszőleges $l' \in L_i'$-re $Rl' \subseteq L_i' \subset L_i$. Mivel R^+ erősen algebrailag zárt R-modulus és $R^+ \sim Rl'$, következnék, hogy Rl' algebrailag zárt és L_i valódi részmodulusa, a feltétellel ellentétben.

Tehát R jobbegységelemes gyűrű és minimális balideáljainak direkt összege, így az [1] dolgozat 29. tétele alapján R féligegyszerű gyűrű.

b) Az R gyűrű teljesíti a minimumkövetelményt. Legyen $\mathfrak{L}$ az R gyűrű minimális balideáljainak egy maximális független rendszere. $\mathfrak{L}$ számossága csak véges lehet, ugyanis, ha az $\mathfrak{L}$ rendszer végtelen sok $L_i (i=1, 2, \ldots, n, \ldots)$ minimális balideált tartalmazna, akkor az

$$N_k=\sum_{i=k}^{\infty} L_i \qquad (k=1, 2, \ldots, n, \ldots)$$

balideálok egy végtelen szigorúan csökkenő láncot alkotnának, ami a feltétel szerint nem lehetséges. Legyenek az $\mathfrak{L}$ elemei az $L_1, L_2, \ldots, L_n$ minimális balideálok. Mivel minden i-re ha $l_i \in L_i$, $L_i = Rl_i$, $R^+ \sim Rl_i$ és R^+ erősen algebrailag zárt R-modulus, az $L_i (i=1, 2, \ldots, n)$ és az $L=L_1+L_2+\cdots+L_n$ R-modulusok (balideálok) algebrailag zártak. Tehát az $R=R^+=L+N$ felbontásban az $\mathfrak{L}$ rendszer maximalitása miatt csak az $N=0$ eset állhat fenn, azaz

$$R=L_1+L_2+\cdots+L_n.$$

Ismét azt kaptuk, hogy az R jobbegységelemes gyűrű és minimális balideáljainak direkt összege, tehát R féligegyszerű gyűrű. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

IRODALOM

[1] KERTÉSZ ANDOR: Vizsgálatok az operátormodulusok elméletében I, II, III. Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. 8 (1958) 411—436, 9 (1959) 15—50, 105—120.

[2] PAPP ZOLTÁN: On algebraically closed modules, Publ. Math. Debrecen 6 (1959) 311—327.

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫХ МОДУЛЕЙ

З. Папп

Назовем R-модуль A алгебраически сильно замкнутым, если каждый гомоморфный образ от A алгебраически замкнут.

Кольцо R обладает свойством T, если всякий R-модуль A, порождаемый своими алгебраически замкнутыми подмодулями, сам является алгебраически замкнутым.

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. R-модуль A_1 тогда и только тогда порождает вместе со всяким алгебраически замкнутым R-модулем A_2 алгебраически замкнутый R-модуль, если A_1 является алгебраически сильно замкнутым.

Теорема 2. Кольцо R тогда и только тогда обладает свойством T, если выполняется в нем условие обрыва убывающих цепей левых идеалов и если всякий левый идеал в нем является прямым слагаемым в некотором свободном R-модуле.

Теорема 3. При произвольном кольце с единицей R следующие условия являются эквивалентными:

а) R^+ алгебраически сильно замкнутый R-модуль,

б) всякий конечно порождаемый R-модуль является алгебраически замкнутым,

в) конечно порождаемые подмодули любого R-модуля являются прямыми слагаемыми последнего,

г) конечно порождаемые подмодули любого R-модуля сервантны.

Теорема 4. Кольцо R тогда и только тогда является полупростым, когда R^+ алгебраически сильно замкнутый R-модуль и левые идеалы кольца R подчиняются одному из следующих двух условий:

а) условие максимума,

б) условие минимума.

A REMARK ON ALGEBRAICALLY CLOSED MODULES

By

Z. PAPP

An R-module A is called stictly algebraically closed module, if each homomorphic image of A is algebraically closed.

A ring R has the Property P, if any R-module, generated by its algebraically closed submodules, are algebraically closed.

In this paper we proved the following theorems.

Theorem 1. An arbitrary R-module A_1 has the property that $A = \{A_1, A_2\}$ is algebraically closed, where A_2 is an arbitrary algebraically closed R-module if and only if A_1 is a strictly algebraically closed R-module.

Theorem 2. An arbitrary ring R has the Property P if and only if R is a Noetherian ring and every left ideal of R is a direct summand of a free R-module.

Theorem 3. For an arbitrary ring with unit element the following conditions are equivalent:

a) R^+ (the additive module of R) is strictly algebraically closed R-module;
b) any finitely generated R-modules are algebraically closed;
c) in arbitrary R-module G the finitely generated submodules are direct summans;
d) in arbitrary R-module G the finitely generated submodules are pure submodules.

Theorem 4. A ring R is semi-simple if and only if R^+ is a strictly algebraically closed R-module, and one of the following conditions are satisfied:

a) the ascending chain condition for the left ideals of R;
b) the descending chain condition for the left ideals of R.

A ring R is semi-simple if R satisfies the descending chain condition for left ideals and has not nonzero nilpotent left ideal.