AZ ABEL-FÉLE CSOPORTOK ELMÉLETÉHEZ

Írta: TÓTH BALÁZS

Egy tetszőleges csoportot jelöljünk G-vel. G-nek azt a részcsoportját, amelyet a G csoport elemeinek k-adik hatványaiból álló halmaz generál, a G csoport k-adik hatványának nevezzük és G^k-nal jelöljük.

Egy korábbi dolgozatunkban igazoltuk a következő tételt:

Egy tetszőleges G csoport akkor és csak akkor ciklikus, ha G^m és G^n ciklikus, ahol $(m, n)=1$.

Jelen dolgozatban a fentemlített és megoldott problémát általánosítjuk és igazoljuk a következő tételt:

Tétel: Egy véges, vagy végtelen G torziócsoport akkor és csak akkor Abel-féle, ha léteznek olyan m és n egész számok, hogy G^m és G^n Abel-félék, ahol $(m, n)=1$.

Bizonyítás: A feltevés szerint G minden eleme végesrendű.

Legyen

$$p_1, p_2, \ldots, p_1', p_2', \ldots \qquad ((p_i, m)=1,\ (p_i', n)=1,\ i=1,2,\ldots)$$

a csoport elemeinek rendjében fellépő valamennyi különböző prímszám. (A prímszámok ezen két osztályba sorolását úgy végezzük, hogy a két osztálynak közös eleme ne legyen.) Legyenek továbbá m és n azok a természetes számok $((m, n)=1)$, amelyekre G^m és G^n Abel-féle csoportok. Könnyű belátni, hogy G^m és G^n normálosztói a G-nek. Ugyanis pl. G^n az $\alpha^n, \beta^n, \gamma^n, \ldots$ alakú elemek által generált csoport, ahol $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ rendre a G elemei, és G^n ezen generátorrendszerét G bármely ξ eleme ugyanezen generátorrendszerbe transzformálja. Pl.

$$\xi\alpha^n\xi^{-1} = \xi\alpha\xi^{-1} \cdot \xi\alpha\xi^{-1} \cdots \xi\alpha\xi^{-1} = (\xi\alpha\xi^{-1})^n.$$

Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $\xi G^n \xi^{-1} = G^n$.

A G^m tartalmazza azt a részcsoportot, amelyet a G azon elemei generálnak, amelyek rendje relatív prím az m-hez. Jelöljük ezt a részcsoportot M-mel. A G^n pedig azt a részcsoportot tartalmazza, amelyet az n-hez relatív prím rendű elemek generálnak. Ezt a részcsoportot jelöljük N-nel. Az M-et generáló elemek rendje a $p_1, p_2, \ldots$ prímszámok hatványaiból $((p_i, m)=1,\ i=1,2,\ldots)$, az N-et generáló elemek rendje pedig a $p_1', p_2', \ldots$ prímszámok hatványaiból áll $((p'_i, n)=1,\ i=1,2,\ldots)$. Minthogy G^m Abel-féle csoport, ezért van olyan. $M' \subseteq M$ részcsoportja, amelyben $p'_1, p'_2, \ldots$ rendű elemek már nincsenek. Hasonlóan G^n-nek van olyan $N' \subseteq N$ részcsoportja, amelyben $p_1, p_2, \ldots$ rendű elemek nincsenek. Mivel M' ill. N' karakterisztikus részcsoportjai G^m-nek ill. G^n-nek, ezért M' és N' normálosztók G-ben. Nyilván $G = M' \cdot N'$ és $M' \cap N' = 1$ Mint ismeretes, e két egyenlőségből $G = M' \otimes N'$ következik. Minthogy M' és N' ABEL-féle csoportok, tehát G is az.

Az állítás megfordítása nyilvánvaló. Ha ugyanis G Abel-féle csoport, akkor G^k is Abel-féle bármely k-ra, így $k = m, n$; $(m, n) = 1$ esetben is.

Megjegyzések:

Az előző tétel gondolatmenetéhez hasonlóan belátható a következő tétel.

Egy véges, vagy végtelen G torziócsoport akkor és csak akkor nilpotens, ha léteznek olyan m és n egész számok, amelyekre $(m, n) = 1$ és a G^m, G^n csoportok nilpotensek.

Véges feloldható csoportok esetében (P. HALL ismert tételének felhasználásával) igazolható a következő tétel:

Egy véges G csoport akkor és csak akkor feloldható, ha léteznek olyan m és n egész számok, amelyekre $(m, n) = 1$ és a G^m, G^n csoportok feloldhatók.

Nyitott kérdés marad az, hogy a dolgozat tételei érvényesek-e akkor, ha G torziómentes vagy vegyes csoport.

К ТЕОРИИ АБЕЛЕВСКИХ ГРУПП

Б. Тот

В работе доказывается следующая теорема:

Конечная или бесконечная периодическая группа G является тогда и только тогда Абелевой, если существуют такие целые числа m и n, по отношению которых G^m и G^n Абелевы, где $(m, n) = 1$.

ON THE THEORY OF ABELIAN GROUPS

B. TÓTH

In this paper we prove the following theorem.

An arbitrary torsion group G is abelian group if and only if there exist integers $m, n > 1$ with $(m, n) = 1$ such that G^m and G^n are abelian groups.