VEGYES ABEL-FÉLE CSOPORTOK SZÉTHASÍTHATÓSÁGÁRÓL

Írta: PAPP ZOLTÁN

1. FUCHS LÁSZLÓ—ABEL-féle csoportok c. könyvében szerepel a vegyes ABEL-féle csoportokra vonatkozó következő széthasíthatósági kritérium.[1] Egy G csoport széthasítható, ha valamely n természetes szám esetén nG széthasítható. Az nG csoport G homomorf képe, ahol a homomorfizmus G_0 magja az $ng=0$, $(g \in G)$ feltételt kielégítő elemek részcsoportja. Dolgozatunkban a fenti kritérium néhány általánosítási lehetőségét vizsgáljuk meg.

1. Definíció. Egy A csoport G bővítését T-tulajdonságúnak nevezünk, ha G/A széthasíthatóságából következik G széthasíthatósága.

2. Definíció. Egy G csoportot A szerváns bővítésének nevezzük, ha A szerváns részcsoport G-ben.

A dolgozat fő problémája az olyan csoportok leírása amelyeknek minden szerváns bővítésük T-tulajdonságú. Nyitott probléma marad azoknak a csoportoknak a leírása amelyeknek minden bővítésük T-tulajdonságú. A tétel bizonyításához felhasznált 1. Lemma a FUCHS [1] könyvében szereplő, említett kritérium általánosítása.

2. A tétel bizonyításához szükségünk lesz a következő három lemmára.

1. Lemma. *Ha K korlátos rendű torziócsoport, akkor G/K széthasíthatóságából következik G széthasíthatósága.*

Megjegyzés: a $G \sim nG$ $(g \to ng,\ g \in G)$ homomorfizmus G_0 magja az olyan $g \in G$ elemek halmaza amelyekre $ng=0$ teljesül. G_0 tehát G korlátos részcsoportja, ezért az 1. Lemmából következik a FUCHS [1] könyvében szereplő kritérium.

Bizonyítás. Legyen K G-nek korlátos rendű részcsoportja. Vezessük be a következő jelöléseket: $\bar{G}=G/K$ és $\bar{g}=g+K$ a $G \sim G/K$ $(g \to \bar{g})$ homomorfizmusnál a g elem képe. Legyen $\bar{G}$ széthasítható, azaz $\bar{G}=\bar{T}+\bar{B}$ ahol $\bar{T}$ a $\bar{G}$ vegyes csoport maximális torziórészcsoportja és $\bar{B}$ torziómentes csoport. Ha T-vel ill. B-vel jelöljük a $\bar{T}$ ill. $\bar{B}$ csoportok teljes inverzképét $\bar{G}$-ben a $G \sim G/K$ homomorfizmusnál, akkor $G=\{T, B\}$ azaz a T és B csoportok generálják G-t.

A T részcsoport G-nek maximális torziórészcsoportja. Valóban, legyen $g \in G$ és $kg=0$ valamely k egész szám esetén. Ekkor $k\bar{g}=\bar{o}$ azaz $\bar{g} \in \bar{T}$. Mivel g egy inverzképe ezért $g \in T$. Fordítva ha t tetszőleges T-beli elem, akkor $\bar{t} \in \bar{T}$, tehát van olyan

[1]) A dolgozatban csoporton mindig ABEL-féle csoportot értünk. Széthasíthatónak nevezünk egy vegyes csoportot, ha felbontható maximális torziórészcsoportja és egy torziómentes csoport direkt összegére. Előismeretek szempontjából utalunk FUCHS [1] könyvére.

l egész szám, hogy $o = l\bar{t} = (\overline{lt})$ azaz $lt \in K$, amiből következik, hogy a t elem rendje véges, hiszen a K részcsoport elemei véges rendűek.

Legyen $b (b \in B)$ véges rendű, akkor $\bar{b} = \bar{o}$ mert $\bar{B}$ torziómentes csoport, így $b \in K$ tehát $nb = o$, ahol n a K részcsoport korlátja. Tehát a B vegyes csoport véges rendű elemei korlátos rendűek, így $B = T_0 + F$, ahol T_0 a B csoport maximális torzió-részcsoportja és F torziómentes csoport. Bebizonyítjuk, hogy $G = T + F$. A $T \cap F = 0$ és $T + F \subseteq G$ relációk nyilvánvalóan igazak s így csak a $G \subseteq T + F$ tartalmazási relációt kell bizonyítanunk. Legyen g tetszőleges G-beli elem, akkor $G = \{T, B\}$ miatt $g = t + b$, $(t \in T, b \in B)$ de a $B = T_0 + F$ felbontásból $b = t_0 + f (t_0 \in T, f \in F)$, azaz $g = t + t_0 + f = t' + f$ ($t' \in T$, mert t' rendje véges és T a G csoport maximális torziórészcsoportja,) tehát $G \subseteq T + F$. Ezzel bebizonyítottuk, hogy $G = T + F$, azaz G széthasítható vegyes csoport.

2. Lemma. *Ha F a G vegyes csoport szerváns torziómentes részcsoportja és G/F torziócsoport akkor $G = T + F$, ahol T a G vegyes csoport maximális torzió-részcsoportja.*

Bizonyítás. Legyen F szerváns részcsoport G-ben akkor a G/F faktorcsoportnak létezik olyan $T' = (\ldots, \bar{h}_\alpha, \ldots)_{\alpha \in \Gamma}$ ($h_\alpha \in G$ és Γ valamilyen indexhalmaz) reprezentáns-rendszere, amelynél az $n\bar{h}_\alpha = \bar{o}$ egyenlőségből $nh_\alpha = o$ következik. (Lásd Fuchs [1] 82. old.) T' csak véges rendű elemeket tartalmazhat mert a G/F faktorcsoport torziócsoport. Ha a t_1 és t_2 véges rendű elemekre $t_1, t_2 \in \bar{h}_\alpha$ akkor $t_1 = t_2$, mert a $t_1 = t_2 + f$ $(f \in F)$ egyenlőség csak $f = 0$ esetén állhat fenn, tehát $\bar{h}_\alpha$ csak egy véges rendű eleme tartalmazhat. Legyen T a G csoport maximális torziórészcsoportja, akkor $T' \subseteq T$. Fordítva, ha $t \in T$, akkor $G = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} \bar{h}_\alpha$ miatt valamilyen $\alpha_0 \in \Gamma$ esetén $t \in h_{\alpha_0}$, azaz $t = h_{\alpha_0}$ s így a $T \subseteq T'$ reláció is fennáll, tehát $T' = T$. Ebből közvetlenül látható, hogy $G = T + F$, amivel az állításunkat bizonyítottuk.

3. Lemma. *Ha az F torziómentes csoport szerváns G-ben, akkor G/F széthasíthatóságából következik G széthasíthatósága.*

Bizonyítás. Legyen F a G vegyes csoport tetszőleges szerváns részcsoportja és $G/F = A^* + B^*$, ahol A^* torziócsoport és B^* torziómentes csoport. Jelölje A ill. B az A^* ill. B^* csoportok teljes inverzképét G-ben, akkor $G = \{A, B\}$, $A/F \cong A^*$ és $B/F \cong B^*$. Mivel F szerváns G'-ben s így A-ban is és A^* torziócsoport a 2. Lemmából következik, hogy $A = T + F$, ahol T az A vegyes csoport maximális torziórész-csoportja. Másrészt B^*-gal együtt B is torziómentes csoport, mert ha $nb = o$, akkor $n\bar{b} = (\overline{nb}) = \bar{o}$ tehát $\bar{b} = o$ $(\bar{b} \in B^*)$ s így $b \in F$ de ez csak $b = o$ esetén állhat fenn, mert F torziómentes csoport. Az 1. Lemma bizonyítása végén levő gondolatmenet megismétlésével könnyen belátható, hogy $G = T + B$, azaz G széthasítható csoport.

3. A dolgozat elején felvetett probléma megoldását a következő tételben adjuk meg.

Tétel. *Egy A redukált csoportnak minden szerváns bővítése akkor és csak akkor lesz T-tulajdonságú, ha $A = K + F$, ahol K korlátos rendű torziócsoport és F torziómentes csoport.*

Megjegyzés. Nem jelent megszorítást az, hogy csak a redukált csoportokat vizsgáljuk, mert mint könnyen belátható, egy csoportnak minden szerváns bővítése akkor és csak T-tulajdonságú ha a redukált részére érvényes hasonló állítás.

Bizonyítás. Az elegendőség bizonyításához tegyük fel, hogy A szerváns részcsoport G-ben és $A = K + F$, ahol K korlátos rendű torziócsoport, F torziómentes és G/A széthasítható csoport. Ekkor az 1. Lemmát alkalmazva $G/F\big/A/F \cong G/A$ alapján következik, hogy G/F széthasítható vegyes csoport, mert az A/F csoport elemeinek rendje korlátos. Mivel A s így F is szerváns részcsoport G-ben és G/F széthasítható, a 3. Lemmából következik, hogy G is széthasítható vegyes csoport.

Tegyük fel most a feltétel szükségességének igazolása végett, hogy az A csoport bármely G^* szerváns bővítése T-tulajdonságú. Ekkor speciálisan $G^* = A$ is T-tulajdonságú szerváns bővítés és $G^*/A \cong \{0\}$ széthasítható csoport, tehát a feltétel szerint $A = G^* = T + F$, ahol T torziócsoport és F torziómentes csoport. Kimutatjuk, hogy a T torziócsoport korlátos rendű.

Tegyük fel, hogy T elemeinek rendje nem korlátos, így a BAER—FOMIN tétele (lásd pl. FUCHS [1] 187. old.) alapján létezik egy nem széthasítható H vegyes csoport, amelynek T a maximális torziórészcsoportja. Legyen $G = H + F$, ekkor A szerváns részcsoport G-ben. Ugyanis, legyen az $nx = a\,(a \in A)$ egyenlet egy megoldása $g(\in G)$, akkor $g = h + f$ és $a = t' + f'$ $(h \in H; f, f' \in F; t' \in T)$ és az $ng = nh + nf = t' + f'$ egyenlőségekből a $G = H + F$ direkt felbontás alapján $nf = f'$ és $nh = t'$ következik. Mivel T a H csoport maximális torziórészcsoportja szerváns részcsoport, s így alkalmas $t \in T$ elemre $nt = t'$, tehát az $nx = a$ egyenlet $t + f$ megoldása az A csoport eleme. Legyen a G/A faktorcsoport egy rendhű reprezentánsrendszere $(\ldots, h_\alpha, \ldots)\alpha \in \Gamma$ (Γ: indexhalmaz.) Ekkor egy $n\overline{h}_\alpha = \overline{0}$ egyenlőségből $nh_\alpha = 0$ következik, azaz $h_\alpha \in T \subseteqq A$, mert G és H maximális torziórészcsoportja megegyezik, így $\overline{h}_\alpha = 0$, tehát G/A torziómentes, azaz széthasítható csoport. A feltétel értelmében $G = T + F'$ (F': torziómentes csoport,) de $H \subseteqq G$ és $T \subseteqq H$ miatt $H = T + F''$ (F'': torziómentes csoport) következnék ami ellentétben van azzal, hogy H nem széthasítható vegyes csoport. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

IRODALOM

[1] FUCHS, L.: Abelian groups. Budapest, 1958.

О ПРОБЛЕМЕ РАСЩЕПЛЯЕМОСТИ СМЕШАННЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

З. ПАПП

В заметке доказывается следующая теорема:

Теорема. Для того чтобы всякое расширение G редуцированной абелевой группы A, содержащее A в качестве сервантной подгруппы, расслось, если только распадается факторгруппа G/A, необходимо и достаточно, чтобы было $A = K + F$, где K — периодическая группа с органиченными в свокупности порядками элементов, а F — группа без кручения.

ON THE SPLITTING PROBLEM OF MIXED ABELIAN GROUPS

Z. PAPP

In this paper we prove the following theorem.

Theorem. A reduced group A has the property that every extension G of A, in which A is a pure subgroup splits whenever G/A splits if and only if $A = K + F$, where K is a bounded torsion group and F is torsion free.