FÉLCSOPORTOK BŐVITÉSÉRŐL

Írta: SZENDREI JÁNOS

1. Jelöljön $\Phi=\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ egy tetszésszerinti félcsoportot, $F=0, a, b, \ldots$ pedig egy zéruselemes félcsoportot. Ha Φ-nek, illetve F-nek van egységeleme, akkor ezt ε-nal, illetve e-vel jelöljük. A Φ félcsoportnak az F félcsoporttal való (CLIFFORD-féle) *bővítésén* értünk egy olyan E félcsoportot, amelynek Φ ideálja és $E/\Phi \approx F$ teljesül [1]. Ezek a bővítések — ha egyáltalán léteznek — a következőképpen állnak elő:

Legyen $E=F_0 \cup \Phi$, ahol $F_0=F \setminus 0$. E-ben definiálunk egy $*$ műveletet úgy, hogy

$$\text{(I)} \qquad a*b=\begin{cases} ab, & \text{ha} \quad ab \neq 0, \\ \langle a, b \rangle \in \Phi, & \text{ha} \quad ab=0, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \qquad a*\alpha, \quad \alpha*a \in \Phi,$$

$$\text{(III)} \qquad \alpha*\beta=\alpha\beta.$$

E nyilván akkor és csakis akkor Φ-nek F-fel való bővítése, ha az E-ben bevezetett $*$ művelet asszociatív.

CLIFFORD [1] alatti dolgozatában megmutatja, hogy a Φ félcsoportra tett bizonyos kikötések mellett létezik Φ-nek egy tetszésszerinti F félcsoporttal való bővítése. Nyitott kérdésként veti fel azonban ilyen bővítés létezésének az eldöntését az általános esetben.

Ebben a dolgozatban RÉDEI [3] és VAN LEEUWEN [5] alatti gyűrűelméleti vizsgálatainak analógonjaként rámutatunk a félcsoportok kettős-tranzlációinak használhatóságára s ezek felhasználásával megvizsgáljuk a félcsoportok bővítéseit.

2. A Φ félcsoport kettős-tranzlációján értjük a Φ olyan önmagába való $A:\alpha \to {}^A\alpha$, $\alpha \to \alpha^A$ (rendezett) leképezéspárját, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

$${}^A(\alpha\beta)=({}^A\alpha)\beta, \quad (\alpha\beta)^A=\alpha(\beta^A), \tag{1}$$

$$(\alpha^A)\beta=\alpha({}^A\beta), \tag{2}$$

$$({}^A\alpha)^A={}^A(\alpha^A). \tag{3}$$

Φ-nek A, B kettős-tranzlációjának szorzatát így értelmezzük:

$${}^{AB}\alpha={}^A({}^B\alpha) \quad \alpha^{AB}=(\alpha^A)^B. \tag{4}$$

Az A és B kettős-tranzlációkat *barátságos*nak nevezzük, ha

$$({}^A\alpha)^B={}^A(\alpha^B). \tag{5}$$

A kettős-tranzlációk egy halmazát (vagy egy félcsoportját) barátságosnak mondjuk, ha e halmaz bármely két eleme barátságos. (3)-ból nyilvánvaló, hogy minden kettős-tranzláció önmagával barátságos. A KURATOWSKI—ZORN-lemma alapján következik, hogy barátságos kettős-tranzlációknak bármely halmaza egy maximális ugyanilyen halmaznak része. Könnyen belátható az is, hogy barátságos kettős-tranzlációknak egy maximális halmaza félcsoport, s ezt maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportnak nevezzük. Az elmondottakból következik, hogy *minden kettős-tranzláció-félcsoport legalább egy maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportnak része.*

Ha φ a Φ egy rögzített eleme, akkor a $B_\varphi:\alpha\to\varphi\alpha,\ \alpha\to\alpha\varphi$ Φ-nek önmagába való leképezéspárja Φ-nek kettős-tranzlációja, amelyet a Φ (φ által indukált) *belső kettős-tranzlációjának* nevezünk. Nyilvánvaló, hogy az összes ilyenek félcsoportot alkotnak, amelyet a Φ teljes belső kettős-tranzláció-félcsoportjának nevezünk s B_Φ-vel jelöljük. Erre vonatkozik az

1. t é t e l. *B_Φ a Φ félcsoport minden maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportjának ideálja.*

Bizonyítás. Legyen A egy tetszésszerinti, B_φ pedig egy belső kettős-tranzláció. (4) és (1), illetve (4) és (2) felhasználásával adódik a következő:

$$^{(AB_\varphi)}\alpha = {}^{A}({}^{B_\varphi}\alpha) = {}^{A}(\varphi\alpha) = ({}^{A}\varphi)\alpha,\quad \alpha^{(AB_\varphi)} = (\alpha^{A})^{B_\varphi} = (\alpha^{A})\varphi = \alpha({}^{A}\varphi),$$

azaz AB_φ egyenlő az ${}^{A}\varphi$ elemmel indukált belső kettős-tranzlációval. Hasonlóan kapjuk azt is, hogy $B_\varphi A$ egyenlő a φ^{A}-val indukált belső kettős-tranzlációval. Tehát $AB_\varphi, B_\varphi A\in B_\Phi$, ami bizonyítandó volt.

Érvényes továbbá a következő

2. t é t e l. *Egy félcsoport akkor és csakis akkor egységelemes, ha csak belső kettős-tranzlációja van.*

Bizonyítás. Legyen a Φ félcsoport egységeleme ε. Ekkor (1) miatt Φ bármely A kettős-tranzlációjára

$${}^{A}\alpha = {}^{A}(\varepsilon\alpha) = ({}^{A}\varepsilon)\alpha,\qquad \alpha^{A} = (\alpha\varepsilon)^{A} = \alpha(\varepsilon^{A}),$$

továbbá (2) miatt ${}^{A}\varepsilon = \varepsilon({}^{A}\varepsilon) = (\varepsilon^{A})\varepsilon = \varepsilon^{A}$, amikből következik, hogy Φ bármely A kettős-tranzlációja egyenlő az ${}^{A}\varepsilon(\in\Phi)$ elemmel indukált belső kettős-tranzlációval, azaz $A = B_{({}^{A}\varepsilon)}$. Megfordítva, ha Φ-nek minden kettős-tranzlációja belső, akkor az identikus leképezéspárnak is belső kettős-tranzlációnak kell lennie. Ebből következik, hogy Φ-nek van egységeleme.

A fentiekből látszik, hogy egy félcsoportnak általában több maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportja van. Az alábbiakban néhány olyan félcsoportosztályt adunk meg, amelyekhez tartozó félcsoportoknak egyetlen maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportja van.

3. t é t e l. *Ha a Φ félcsoportban érvényes az egyoldali leosztási szabály, akkor Φ-nek egyetlen maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportja van.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Φ-ben érvényes a jobboldali leosztási szabály azaz $\alpha\gamma=\beta\gamma$ fennállásából következik az $\alpha=\beta$ egyenlőség. Jelölje A, B a Φ két tetszésszerinti kettős-tranzlációját. (2) és (1) ismételt felhasználásával kapjuk a következőt:

$$(({}^{A}\alpha)^{B})\gamma = ({}^{A}\alpha)({}^{B}\gamma) = {}^{A}(\alpha({}^{B}\gamma)) = {}^{A}((\alpha^{B})\gamma) = ({}^{A}(\alpha^{B}))\gamma.$$

Ebből a feltevés miatt

$$({}^{A}\alpha)^{B} = {}^{A}(\alpha^{B})$$

következik, azaz bármely két kettős-tranzláció barátságos, ami bizonyítandó volt.

4. tétel. *Ha a Φ félcsoportnak bármely eleme felírható két elem szorzataként, akkor Φ-nek egyetlen maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportja van.*

Kiegészítés. Ilyen félcsoportok például a következők:

a) A bal- (ill. jobb-) egységelemes félcsoportok;

b) Azok a félcsoportok, amelyekben minden elem idempotens;

c) A NEUMANN-féle reguláris félcsoportok.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Φ bármely α eleme $\alpha=\beta\gamma$ alakban írható fel. Ekkor (1) ismételt felhasználásával kapjuk a következőt:

$$({}^{A}\alpha)^{B}=({}^{A}(\beta\gamma))^{B}=(({}^{A}\beta)\gamma)^{B}=({}^{A}\beta)(\gamma^{B})={}^{A}(\beta(\gamma^{B}))={}^{A}((\beta\gamma)^{B})={}^{A}(\alpha^{B}).$$

Eszerint bármely két kettős-tranzláció barátságos, tehát Φ-nek egyetlen maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportja van.

3. Ezután rátérünk a félcsoportok bővítéseinek vizsgálatára.

Legyen E a Φ félcsoportnak egy bővítése az F zéruselemes félcsoporttal. Az $\langle a, b\rangle \in \Phi$ elemek halmazát, ahol $a, b \neq 0$ és $ab=0$, *faktorrendszernek* nevezzük, s Ψ-vel jelöljük. Ψ lehet az üres halmaz is, mégpedig akkor és csakis akkor, ha F_0 félcsoport. Világos, hogy az asszociativitásból kifolyólag a faktorrendszerre $a, b, c \neq 0$, $abc=0$ esetén

$$\langle ab, c\rangle=\langle a, bc\rangle,\ \langle ab, c\rangle=a*\langle b, c\rangle,\ \langle a, b\rangle*c=\langle a, bc\rangle,\ \langle a, b\rangle*c=a*\langle b, c\rangle \quad (6)$$

érvényes aszerint, hogy

$$ab, bc \neq 0;\ ab\neq 0, bc=0;\ ab=0, bc\neq 0;\ ab=0, bc=0.$$

Az E-ben értelmezett $*$ művelet szerint F_0 minden a eleme Φ-nek egy $[a]$ kettős-tranzlációját indukálja, mivel Φ ideálja E-nek. Tekintsük E-ben az F_0 által generált félcsoportot s jelöljük ezt $\{F_0\}$-val. Nyilvánvaló, hogy $\{F_0\} \supseteq F_0 \cup \Psi$. A Φ félcsoportnak E-ben az $\{F_0\}$ elemeivel indukált kettős-tranzlációinak $[\{F_0\}]$ halmaza nyilvánvalóan tartalmazza az $[F_0]\cup[\Psi]$ halmazt. $[\{F_0\}]$ barátságos kettős-tranzláció-félcsoportja Φ-nek. Az $a\to[a]$ hozzárendelés az F-nek olyan leképezése $[\{F_0\}]$-ba, amely az $a\neq 0$ esetén egyértelmű, a 0-nak megfelelő halmaz pedig tartalmazza Ψ-t és

$$[a][b]\alpha=\begin{cases}[ab]\alpha,\\ \langle a, b\rangle\alpha,\end{cases} \qquad \alpha[a][b]=\begin{cases}\alpha[ab],\\ \alpha\langle a, b\rangle,\end{cases} \quad (7)$$

aszerint, hogy $ab\neq 0$, illetve $ab=0$. Az F félcsoportnak egy ilyen leképezését az F *elágazó homomorfizmusának* nevezzük a Φ egy barátságos kettős-tranzláció-félcsoportjára.

Megfordítva, ha valamely F zéruselemes és Φ tetszésszerinti félcsoport esetén létezik egy Ψ faktorrendszer a (6) feltétellel, és létezik az F-nek Φ egy $[\Psi]$-t tartalmazó barátságos kettős-tranzláció-félcsoportjára való elágazó homomorfizmusa, akkor létezik Φ-nek F-fel való bővítése. Az $E=F_0\cup\Phi$ halmazban definiáljuk a $*$ műveletet a következőképpen:

$$a*b=\begin{cases}ab & (ab\neq 0),\\ \langle a, b\rangle & (ab=0),\end{cases} \quad a*\alpha=[a]\alpha,\ \alpha*a=\alpha[a],\ \alpha*\beta=\alpha\beta. \quad (8)$$

E-ben a $*$ művelet asszociatív volta közvetlenül adódik az (1)—(7) alatti összefüggésekből.

Összefoglalva tehát kimondhatjuk a következő tételt:

5. tétel. *Egy Φ félcsoportnak akkor és csakis akkor létezik valamely F zéruselemes félcsoporttal való bővítése, ha megadható a* (6) *feltételt kielégítő Ψ faktorrendszer és van az F-nek a Φ egy, a $[\Psi]$-t tartalmazó barátságos kettős-tranzlációfélcsoportjába való elágazó homomorfizmusa.*

Ekkor az $E=F_0\cup\Phi$ halmaz a (8) *alatt definiált művelet szerint félcsoportot alkot, s ez Φ-nek F-fel való egyik bővítése, továbbá ilyen módon állítható elő a Φ-nek F-fel való összes bővítése.*

4. Végül az elmondottaknak néhány alkalmazását mutatjuk be.

a) Ha Φ egységelemes, akkor mint előbb láttuk, akkor Φ-nek csak belső kettős-tranzlációja van, s ezek félcsoportja izomorf magával Φ-vel. Ezért Φ-nek F-fel való bármely bővítése úgy áll elő, hogy vesszük az F-nek Φ-be való elágazó homomorfizmusát. (Lásd CLIFFORD [1] 2. tétel.)

b) Š. SCHWARZ [4] dolgozatában a következő két félcsoportkonstrukciót adja meg:

1°. Legyen F_0 és Φ közös elem nélküli csoport. Legyen φ az F_0-nek Φ-be való homomorf leképezése. Az $E=F_0\cup\Phi$ halmazban definiáljuk a következő műveletet:

$$a*b=ab,\quad a*\alpha=\varphi(a)\alpha,\quad \alpha*a=\alpha\varphi(a),\quad \alpha*\beta=\alpha\beta.$$

E egységelemes félcsoport, Φ ideálja E-nek.

Ezt a konstrukciót a következőképpen is megadhatjuk.

A $F=F_0\cup\{0\}$ halmaz a $0\cdot 0=0$, $0\cdot a=a\cdot 0=0(a\in F_0)$ definíciók szerint zéruselemes félcsoport. Most F_0 félcsoport lévén a Ψ faktorrendszer az üres halmaz. Továbbá Φ egységelemes lévén, egyetlen maximális barátságos kettős-tranzlációfélcsoportja van, a belső és az izomorf magával Φ-vel. Mindezek alapján F-nek Φ-ba való elágazó homomorfizmusa éppen az F_0-nek Φ-be való $a\to[a]=\varphi(a)$ homomorf leképezése. Az $E=F_0\cup\Phi$ halmazban a fenti módon értelmezve egy műveletet, E félcsoport és ez a Φ-nek egyik bővítése az $F=F_0\cup\{0\}$ félcsoporttal. Az is nyilvánvaló Φ-nak az F-fel való minden bővítése így adható meg.

2°. Legyen Φ egy csoport és a egy, nem a Φ-ben fekvő elem. Legyen ϱ a G egy rögzített eleme. Az $E=\{a\}\cup\Phi$ halmazban definiáljuk a műveletet a következőképpen: $a*a=\varrho^2$, $a*\alpha=\varrho\alpha$, $\alpha*a=\alpha\varrho$, $\alpha*\beta=\alpha\beta$. Ekkor E félcsoport.

Ezt a konstrukciót a bővítések segítségével a következőképpen adhatjuk meg.

Legyen $F=\{a,0\}$, amelyben $0\cdot 0=0$, $0a=a\cdot 0=0$, $a\cdot a=0$. A faktorrendszer egyetlen elemből áll, ez az $\langle a,a\rangle\in\Phi$. Másrészt Φ egységelemes lévén, egyetlen maximális barátságos kettős-tranzláció-félcsoportja izomorf Φ-vel. F-nek bármely elágazó homomorfizmusa Φ-be $a\to[a]=\varrho(\in\Phi)$ leképezéssel adható meg. A (7) alatti $[a][a]\alpha=\langle a,a\rangle\alpha$, $\alpha[a][a]=\alpha\langle a,a\rangle$ összefüggésből következik, hogy $\langle a,a\rangle=\varrho^2$. Az $E=\{a\}\cup\Phi$, tehát Φ-nek az $F=\{a,0\}$ félcsoporttal való bővítése és az összes ezen az úton nyerhető.

c) KAUFMAN [2] dolgozatában leírja véges ciklikus félcsoportok ciklikus félcsoportokkal való bővítéseit.

Legyen $\Phi=\{\alpha\}=\alpha,\dots,\alpha_{n_2-r_2},\alpha^{n_2-r_2+1},\dots,\alpha^{n_2}$ $(\alpha^{n_2+1}=\alpha^{n_2-r_2+1})$, és $S=\{a\}=$ $=a,\dots,a^{n_1-r_2},a^{n_1-r_1+1},\dots,a^{n_1}$ $(a^{n_1+1}=a^{n_1-r_1+1})$. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $r_1\geqq 2$ vagy $r_1=1$. Az előbbi esetben S-nek nincs zéruseleme, a másodikban a^{n_1} S-nek zéruseleme. Ennek megfelelően az első esetben legyen $F=S\cup\{0\}$, a második esetben $F=S$.

A $\Phi=\{\alpha\}$ összes kettős-tranzlációi a következők:

$$[\varepsilon]:\alpha\to\alpha,\ \alpha\to\alpha$$

$$[\alpha]^t:\alpha\to\alpha^t\cdot\alpha,\ \alpha\to\alpha\cdot\alpha^t \qquad (t=1,\ldots,n_2-1),$$

ezek halmazát jelölje D. $[\varepsilon]$ akkor és csakis akkor belső, ha $r_2=n_2$, azaz Φ ciklikus csoport. ($[\alpha]^t$ $t=0$ esetén jelentse $[\varepsilon]$-t.) Nyilvánvaló, hogy $[\alpha]^{n_2}=[\alpha]^{n_2-r_2}$.

1°. Tekintsük az első esetet. Mivel most $F_0=S$ félcsoport, azért Ψ üres. F-nek D-be való elágazó homomorfizmusait pontosan azok az $a\to[\alpha]^t$ leképezések szolgáltatják, amelyekre $t=0$ vagy $r_2|r_1t$ és $(n_1-r_1+1)t\geqq n_2-r_2$. Ezért érvényes a következő állítás:

Az $\{\alpha\}$ félcsoportnak akkor és csakis akkor van bővítése az $\{\alpha\}$ $(r_1\geqq 2)$ félcsoporttal, ha létezik olyan t szám, amelyre $t=0$, vagy $t\neq 0$ esetén $r_2|r_1t$, $(n_1-r_1+1)t\geqq n_2-r_2$ teljesül. Ekkor a bővítés a következőképpen adható meg: Az $E=\{a\}\cup\{\alpha\}$ halmazban a $*$ műveletet az

$$a^i*a^k=a^{i+k},\ a*\alpha=[\alpha]^t\alpha=\alpha*a=\alpha[\alpha]^t=\alpha^{t+1},\ \alpha^i*\alpha^k=\alpha^{i+k}$$

relációkkal definiáljuk.

2°. A második esetben $F=S$, $F_0=a,\ldots,a^{n_1-1}$, ahol F_0 nem félcsoport. A Ψ faktorrendszert azok az $\langle a^i,a^k\rangle$ elempárok alkotják, amelyekre $i+k=n_1$. Az F-nek D-be való elágazó homomorfizmusait most is $a\to[a]^t$ alakban adhatjuk meg. (7) miatt $\langle a^i,a^k\rangle*\alpha=[\alpha]^{it}[\alpha]^{kt}\alpha$, $\alpha*\langle a^i,a^k\rangle=\alpha[\alpha]^{it}[\alpha]^{kt}$, amiből következik, hogy $\langle a^i,a^k\rangle=\alpha^m$ minden i,k-ra $(i+k=n_1)$. Ezt figyelembe véve az $a\to[a]^t$ leképezés akkor és csakis akkor elágazó homomorfizmusa F-nek, ha 1. $t=0$ (s ez akkor és csakis akkor következhet be, ha $[\varepsilon]$ belső kettős-tranzláció, azaz $\{\alpha\}$ ciklikus csoport); 2. $t\neq 0$ esetén $m=n_1t$ vagy $r_2|m-n_1t$ és $n_1t\geqq n_2-r_2$ $(m\neq n_1t)$ teljesül.

Összefoglalva, az $\{\alpha\}$ félcsoportnak akkor és csakis akkor van bővítése az $\{a\}$ $(r_1=1)$ félcsoporttal, ha léteznek olyan m és t egész számok, amelyekre teljesül a következő feltételek egyike

1. $t=0$ és $n_2=r_2$, $m=n_2$, azaz $\{\alpha\}$ ciklikus csoport;

2. $m=n_1t$ vagy $m\neq n_1t$ és $r_2|m-n_1t$, $n_1t\geqq n_2-r_2$ $(t\neq 0)$. A bővítés a következőképpen adható meg: Az $E=\{\{a\}\setminus a^{n_1}\}\cup\{\alpha\}$ halmazban műveletet az

$$a^i*a^k=\begin{cases} a^{i+k} & i+k<n_1,\\ a^{m+s} & i+k\geqq n_1,\ i+k=n_1+s,\end{cases}$$

$a*\alpha=[\alpha]^t\alpha$, $\alpha*a=\alpha[\alpha]^t=\alpha^{t+1}$ $\alpha^i*\alpha^k=\alpha^{i+k}$ relációkkal definiáljuk.

IRODALOM

[1] CLIFFORD, A. H.: Extensions of semigroups, *Transactions of the American Math. Soc.* **68** (1950), 165—173.

[2] Кауфман, АМ.: Ассоциатиные системы с идеально разрешимым радом длины два, Ученые Записки Ленинградский Гос. Пед. Ин-та им. А. И. Герцена, **89** (1953), 67—93.

[3] RÉDEI, L.: Csoportok és gyűrűk holomorfelmélete, *MTA III. Osztályának Közleményei*, **4** (1954), 27—48.

[4] SCHWARZ, S.: Semigroups in which every proper subideal is a group, *Acta Sci. Math.* **21** (1960), 125—134.

[5] VAN LEEUWEN, L. C. A.: On the holomorphs of a ring, *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A* **61** (1958), 162—169.

О РАСШИРЕНИИ ПОЛУГРУПП

Я. СЕНДРЕИ

Пара отображений полугруппы Φ в себе, удовлетворяющая условиям (1)—(4), называется двойным сдвигом. При помощи двойних сдвигов полугруппы задаетса необходимое и достаточнойе условие для существования Клиффордова расширения E полугруппы Φ с помощью полугруппы F с нулем, т. е. плугруппы E, в которой Φ — двусторонний идеал и виполняется $E/\Phi \approx F$ Результат является усилением результатов Клиффорда [1]. Методам, изложенными здесь, оказываются просто сконструируемыми полугруппы, заданные Шварцом [4] и Кауфманом [2].

ÜBER DIE ERWEITERUNGEN VON HALBGRUPPEN

Von

J. SZEENDREI

Unter einer Doppeltranslation einer Halbgruppe Φ verstehen wir eine Doppelabbildung (ein geordnetes Paar von Abbildungen) der Halbgruppe Φ in sich, die die Bedingungen (1)—(4) erfüllen. Mit Hilfe der Doppeltranslationen wird eine notwendige und hinreichende Bedingung gegeben dafür, daß eine CLIFFORDsche Erweiterung E einer Halbgruppe Φ mit einer Halbgruppe F (mit Nullelement) existiere, d. h. in der Halbgruppe E die Halbgruppe Φ ein zweiseitiges Ideal sei und es gilt $E/\Phi \approx F$. Dieses Ergebnis verschärft die Resultate von CLIFFORD [1], Ferner, die hier betrachtete Konstruktion liefert die von SCHWARZ [4] und KAUFMAN [2] gegebenen Erweiterungen von speziellen Halbgruppen.