EGY GYŰRŰBŐVÍTÉS ÁLTALÁNOSÍTÁSA

Írta: SZENDREI JÁNOS

1. Ha az R gyűrűnek R_1 és R_2 két olyan részgyűrűje, hogy az R gyűrű R^+ modulusa az R_1 és R_2 részgyűrű R_1^+ és R_2^+ modulusának az összegeként előállítható, azaz

(1) $$R^+ = R_1^+ + R_2^+$$

teljesül, akkor az R gyűrűnek az R_1 és R_2 részgyűrűjére való *általános értelemben vett febontásá*ról beszélünk, s a következő jelölést használjuk:

$$R = R_1 \oplus R_2.$$

A jelen dolgozatban ennek a problémának a megfordításával foglalkozunk, amit a következőképpen fogalmazhatunk meg:

Adott S_1 és S_2 gyűrűhöz meghatározandók (izomorfizmustól eltekintve) mindazok az R gyűrűk, amelyekre

(2) $$R = R_1 \oplus R_2,$$

és

(3) $$R_1 \approx S_1, \; R_2 \approx S_2$$

teljesül.

Gyűrűk általános értelemben vett felbontására egyszerű példaként említhetjük a következőt: Legyenek a_1 és a_2 relatív prim egész számok, azaz $(a_1, a_2) = 1$. Az a_1 többszöröseinek gyűrűje legyen R_1, az a_2 többszöröseinek gyűrűje pedig R_2. Nyilvánvaló, hogy az egész számok R gyűrűjére

$$R = R_1 \oplus R_2$$

teljesül, és $R_1 \cap R_2$ az $a_1 a_2$ többszöröseinek gyűrűje.

A fentebb említett problémának az

(4) $$R_1 \cap R_2 = 0$$

speciális esetét SZÉP J. oldotta meg [3] dolgozatában, majd további tulajdonságait vizsgálta [4] dolgozatában.

Megjegyezzük, hogy az említett gyűrűelméleti probléma csoportelméleti analogonját RÉDEI L. és SZÉP J. tárgyalták [2] alatti közös dolgozatukban, ami G. ZAPPA [5] és G. CASADIO [1] által vizsgált csoportbővítések általánosítása.

2. Legyen adott az S_1 gyűrű a $0, a, b, \ldots$ elemekkel és az S_2 gyűrű a $o, \alpha, \beta, \ldots$ elemekkel. Tekintsük az összes

(5) $$(a, \alpha) \qquad (a \in S_1, \; \alpha \in S_2)$$

alakú elempárok $\mathfrak{P}$ halmazát. Ebben a $\mathfrak{P}$ halmazban összeadást és szorzást a következőképpen definiálunk:

(6) $$(a, \alpha)+(b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta),$$

(7) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab+a^{\beta}+{}^{\alpha}b, \alpha^{b}+{}^{a}\beta+\alpha\beta),$$

ahol az

(8) $$a^{\beta}, {}^{\alpha}b \in S_1, \alpha^{b}, {}^{a}\beta \in S_2$$

függvények a következő feltételeknek tesznek eleget:

(9) $$0^{\alpha} = a^{o} = {}^{\alpha}0 = {}^{o}a = 0,$$

(10) $$o^{a} = \alpha^{0} = {}^{a}o = {}^{0}\alpha = o.$$

A $\mathfrak{P}$ halmaz a (6), (7) alatti definíciók szerint kétműveletes struktúra, (9), (10) miatt $(0, o)$ a $\mathfrak{P}$ zéruseleme.

A $\mathfrak{P}$ kétműveletes struktúrának egy C kompatibilis osztályozásához tartozó kongruenciarelációt jelölje „$\equiv$". Az (a, α) elemmel reprezentált osztályt jelöljük $\overline{(a, \alpha)}$-sal. Az így kapott osztályok halmazát $\mathfrak{P}/C$ jelöli, s ebben összeadást és szorzást a következőképpen definiálunk:

$$\overline{(a, \alpha)}+\overline{(b, \beta)} = \overline{(a, \alpha)+(b, \beta)},$$

$$\overline{(a, \alpha)}\,\overline{(b, \beta)} = \overline{(a, \alpha)(b, \beta)}.$$

Az így definiált $\mathfrak{P}/C$ kétműveletes struktúrák között gyűrűk is előfordulhatnak, még akkor is, ha maga $\mathfrak{P}$ nem gyűrű.

Be fogjuk bizonyítani, hogy felvetett problémánk mindegyik megoldása (izomorfiától eltekintve) bizonyos $\mathfrak{P}/C$ faktorstruktúrával egyezik meg, amelyet úgy kapunk, hogy a C osztályozásra, valamint a (8) alatti függvényekre a (9) és (10) feltételeken kívül további feltételeket rovunk ki.

3. Érvényes a következő

Tétel. *Legyen S_1^*, S_2^* az S_1 ill. S_2 gyűrűnek egy-egy olyan részgyűrűje, amelyekre fennáll az*

(11) $$S_1^* \approx S_2^* \quad (a_* \to \alpha_* = \mathrm{A}a_*)$$

izomorfizmus. Definiáljuk $\mathfrak{P}$-ben a következő ekvivalenciarelációt:

(12) $(a, \alpha) \equiv (b, \beta)$ *akkor és csakis akkor, ha* $\quad A(b-a) = -(\beta-\alpha).$

Ahhoz, hogy (12) *kongruenciareláció legyen és a hozzátartozó $\mathfrak{P}/C$ faktorstruktúra gyűrű legyen, szükséges és elégséges, hogy a* (8) *függvények* (9) *és* (10) *mellett kielégítsék a következő feltételeket:*

(13) $$\mathrm{A}({}^{\alpha}a_*) = \alpha(\mathrm{A}a_*)+\alpha^{a},$$

(14) $$\mathrm{A}^{-1}({}^{a}\alpha_*) = a(\mathrm{A}^{-1}\alpha_*)-a^{\alpha_*},$$

(15) $$\mathrm{A}(a_*^{\alpha}) = (\mathrm{A}a_*)\alpha-{}^{a_*}\alpha,$$

(16) $$\mathrm{A}^{-1}(\alpha_*^{a}) = (\mathrm{A}^{-1}\alpha_*)a-{}^{\alpha_*}a,$$

(17) $$\mathrm{A}\big(a(b^{\gamma})+a^{b_{\gamma}}-(ab)^{\gamma}\big) = -\big({}^{a}({}^{b}\gamma)-{}^{ab}\gamma\big),$$

$$\mathsf{A}\big({}^{\alpha}(bc)-({}^{\alpha}b)c-{}^{(\alpha^b)}c\big) = -\big(\alpha^{bc}-(\alpha^b)^c\big), \tag{18}$$

$$\mathsf{A}\big(a^{\beta\gamma}-(a^{\beta})^{\gamma}\big) = -\big({}^{a}({}^{\beta}\gamma)-{}^{(a_\beta)}\gamma-{}^{a^\beta}\gamma\big), \tag{19}$$

$$\mathsf{A}\big({}^{\alpha}({}^{\beta}c)-{}^{\alpha\beta}c\big) = -\big(\alpha(\beta^c)+\alpha^{\beta_c}-(\alpha\beta)^c\big), \tag{20}$$

$$\mathsf{A}\big(a({}^{\beta}c)+a^{(\beta c)}-(a^{\beta})c-{}^{(a_\beta)}c\big) = -\big({}^{a}(\beta^c)-({}^{a}\beta)^c\big), \tag{21}$$

$$\mathsf{A}\big({}^{\alpha}(b^{\gamma})-({}^{\alpha}b)^{\gamma}\big) = -\big(\alpha({}^{b}\gamma)+\alpha^{(b^\gamma)}-(\alpha^b)\gamma-{}^{(\alpha_b)}\gamma\big), \tag{22}$$

$$\mathsf{A}\big({}^{\alpha}b+{}^{\alpha}c-{}^{\alpha}(b+c)\big) = -(\alpha^b+\alpha^c-\alpha^{b+c}), \tag{23}$$

$$\mathsf{A}(a^{\beta}+a^{\gamma}-a^{\beta+\gamma}) = -\big({}^{a}\beta+{}^{a}\gamma-{}^{a}(\beta+\gamma)\big), \tag{24}$$

$$\mathsf{A}\big(a^{\gamma}+b^{\gamma}-(a+b)^{\gamma}\big) = -({}^{a}\gamma+{}^{b}\gamma-{}^{a+b}\gamma), \tag{25}$$

$$\mathsf{A}({}^{\alpha}c+{}^{\beta}c-{}^{\alpha+\beta}c) = -\big(\alpha^c+\beta^c-(\alpha+\beta)^c\big). \tag{26}$$

Ezek az

$$R=\mathfrak{P}/C \tag{27}$$

gyűrűk (izomorfizmustól eltekintve) adják a felvetett probléma összes megoldását. A (27) *gyűrűben az* $\overline{(a, o)}$ *ill. a* $\overline{(0, \alpha)}$ *elemek egy-egy* R_1 *ill.* R_2 *részgyűrűt alkotnak, amelyekre* (2) *és* (3) *teljesül. Az* $R_1 \cap R_2$ *közös rész izomorf* S_1^**-gal (s természetesen* S_2^**-gal is), továbbá az* $\overline{(a_*, o)}$ *elemek az* $R_1 \cap R_2$ *közös rész összes különböző elemei.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítását több lépésben végezzük el.

Könnyen belátható, hogy a (12) alatt definiált reláció valóban ekvivalenciareláció. Most megadjuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a $\mathfrak{P}$ kétműveletes struktúrának a (12) ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozása kompatibilis legyen, azaz az $\mathfrak{P}/C$ faktorstruktúra létezzék. $\mathfrak{P}$-nek két tetszőleges, egymással ekvivalens eleme nyilvánvalóan felvehető az

$$(a, \alpha),\ (a+a_*, \alpha-\mathsf{A}a_*)$$

alakban. $\mathfrak{P}$-nek ez az osztályozása akkor és csakis akkor kompatibilis, ha tetszőleges $(r, \varrho)\,(\in \mathfrak{P})$ elemre teljesülnek a következők:

$$(a, \alpha)+(r, \varrho)\equiv(a+a_*, \alpha-\mathsf{A}a_*)+(r, \varrho),$$

$$(r, \varrho)(a, \alpha)\equiv(r, \varrho)(a+a_*, \alpha-\mathsf{A}a_*),$$

$$(a, \alpha)(r, \varrho)\equiv(a+a_*, \alpha-\mathsf{A}a)(r, \varrho).$$

Az első triviálisan teljesül, így (12) szerint $\mathfrak{P}/C$ akkor és csakis akkor létezik, ha teljesülnek a következők:

$$\mathsf{A}\big(ra_*+r^{\alpha-\mathsf{A}a_*}+{}^{\varrho}(a+a_*)-r^{\alpha}-{}^{\varrho}a\big) = -\big(\varrho^{a+a_*}+{}^{r}(\alpha-\mathsf{A}a_*)-\varrho(\mathsf{A}a_*)-{}^{r}\alpha-\varrho^{a}\big), \tag{28}$$

$$\mathsf{A}\big(a_*r+(a+a_*)^{\varrho}+{}^{\alpha-\mathsf{A}a_*}r-a^{\varrho}-{}^{\alpha}r\big) = -\big((\alpha-\mathsf{A}a_*)^{r}+{}^{a=a_*}\varrho-(\mathsf{A}a_*)\varrho-\alpha^{r}-{}^{a}\varrho\big). \tag{29}$$

Ezek után feltesszük, hogy $\mathfrak{P}/C$ létezik, azaz (28) és (29) teljesül. Most szükséges és elégséges feltételét adjuk meg annak, hogy $\mathfrak{P}/C$ gyűrű legyen. Minthogy $\mathfrak{P}/C$ az összeadás szerint nyilvánvalóan modulus, azért $\mathfrak{P}/C$ akkor és csakis akkor gyűrű, ha a $\mathfrak{P}/C$-ben értelmezett szorzás asszociatív és az összeadásra nézve disztributív.

Először a disztributivitást vizsgáljuk. A bal oldali disztributivitás $\mathfrak{P}/C$-ben a következőt jelenti:

$$(a, \alpha)\big((b, \beta)+(c, \gamma)\big)\equiv(a, \alpha)(b, \beta)+(a, \alpha)(xc, \gamma).$$

A műveletek elvégzésével ez a következővel ekvivalens:

$$\text{(30)} \qquad \mathsf{A}\big(a^{\beta}+a^{\gamma}+{}^{\alpha}b+{}^{\alpha}c-a^{\beta+\gamma}-{}^{\alpha}(b+c)\big) = -\big(\alpha^{b}+{}^{a}\beta+\alpha^{c}+{}^{a}\gamma-{}^{a}(\beta+\gamma)-\alpha^{b+c}\big).$$

Ebből az $a=0$, $\beta=\gamma=o$ ill. a $b=c=0$, $\alpha=o$ helyettesítéssel kapjuk a (23) ill. (24) egyenlőséget. A (23) és (24) összeadásával pedig nyilvánvalóan a (30) egyenlőség áll elő. Ez azt jelenti, hogy (30) ekvivalens a (23), (24) egyenlőségek egyidejű fennállásával. Hasonlóan kapjuk, hogy az

$$\text{(31)} \qquad \big((a, \alpha)+(b, \beta)\big)(c, \gamma)\equiv(a, \alpha)(c, \gamma)+(b, \beta)(c, \gamma)$$

jobb oldali disztributivitás ekvivalens a (25) és (26) egyenlőségek teljesülésével.

Minthogy az összeadás definíciója és (8) alapján $(a, \alpha)\equiv(a, o)+(0, \alpha)$ azért a disztributivitás miatt a szorzás asszociativ voltát elegendő az (a, o), $(0, \alpha)$ alakú elempárokra megvizsgálni. A következő esetek lehetségesek:

$$\begin{array}{ll}
(a, o)(b, o)(c, o), & (0, \alpha)(0, \beta)(0, \gamma) \\
(a, o)(b, o)(0, \gamma), & (0, \alpha)(b, o)(c, o) \\
(a, o)(0, \beta)(0, \gamma), & (0, \alpha)(0, \beta)(c, o), \\
(a, o)(0, \beta)(c, o), & (0, \alpha)(b, o)(0, \gamma).
\end{array}$$

Itt az első sorban álló hármasra az asszociativitás triviálisan teljesül. A többi sorokból pedig közvetlen számolással rendre a (17)—(22) egyenleteket kapjuk. Így $\mathfrak{P}/C$-ben a szorzás akkor és csakis akkor asszociativ, ha a (17)—(22) egyenletek teljesülnek.

Eddig azt bizonyítottuk be, hogy $\mathfrak{P}/C$ akkor és csakis akkor létezik és alkot gyűrűt, ha a (28), (29) és a (17)—(22) egyenlőségek teljesülnek.

Most azt mutatjuk meg, hogy (17)—(22) feltételezése mellett (28), (29) ekvivalens a (13)—(17) egyenletekkel. (28)-ból $a=r=0$ helyettesítéssel a (13) egyenletet kapjuk, az $\alpha=\varrho=o$ helyettesítéssel pedig az

$$\text{(32)} \qquad \mathsf{A}(ra_{*}+r^{-\mathsf{A}a_{*}}) = -{}^{r}(-\mathsf{A}a_{*})$$

egyenletet. Vezessük be a következő jelölést:

$$-\mathsf{A}a^{*}=\alpha^{*}.$$

Ennek felhasználásával átrendezés után (32)-ből a következőt kapjuk:

$$\mathsf{A}\big(r(-(\mathsf{A}^{-1}\alpha_{*}))+r^{\alpha_{*}}\big) = -{}^{r}\alpha_{*}.$$

Innen az A^{-1} inverz leképezésre áttérve (14)-et kapjuk. Tehát (28)-nak (13) és (14) következménye. Megfordítva, bebizonyítjuk, hogy (13) és (14) teljesüléséből (17)—(26) feltételezése mellett következik (28). A (23) egyenlet szerint

$$\mathsf{A}\big({}^{\varrho}a+{}^{\varrho}a_{*}-{}^{\varrho}(a+a_{*})\big) = -(\varrho^{a}+\varrho^{a_{*}}-\varrho^{a+a_{*}}),$$

ahonnan

$$\mathsf{A}\big({}^{\varrho}(a+a_{*})-{}^{\varrho}a\big) = \mathsf{A}({}^{\varrho}a_{*})+(\varrho^{a}+\varrho^{a_{*}}-\varrho^{a+a_{*}})$$

adódik. Ha az itt kapott egyenlet jobb oldalán helyettesítjük $A({}^{\varrho}a_*)$-t (13) alapján, akkor az

$$(33) \qquad \mathrm{A}({}^{\varrho}(a+a_*)-{}^{\varrho}a) = -(\varrho^{a+a_*}-\varrho^{a}-\varrho(\mathrm{A}a_*))$$

egyenlethez jutunk. (14)-ből egyszerűen kapjuk (32)-t, aminek felhasználásával (24)-ből az előbbihez hasonlóan nyerhető az

$$(34) \qquad \mathrm{A}(ra_* + r^{\alpha-\mathrm{A}a_*} - r^{\alpha}) = ({}^{r}(\alpha-\mathrm{A}a_*)-{}^{r}\alpha)$$

egyenlet. (33) és (34) összeadásával kapjuk (28)-at. Bebizonyítottuk tehát, hogy (28) ekvivalens (13) és (14) egyidejű teljesülésével. Teljesen hasonlóan bizonyítható (29)-nek a (15), (16) egyenletekkel való ekvivalenciája. Ezzel bebizonyítottuk, hogy a $\mathfrak{P}/C$ faktorstruktúra létezésének és gyűrű voltának szükséges és elégséges feltétele ((9) és (10) mellett) a (13)—(26) egyenleteknek a teljesülése.

Tekintsük most már a (27) alatti $\mathfrak{P}/C$ gyűrűt. Könnyen látható, hogy az $\overline{(a, o)}$ egy R_1 ill. a $\overline{(0, \alpha)}$ elemek egy R_2 gyűrűt alkotnak, amelyekre teljesül (1) és (3). Az R_1 és R_2 részgyűrűk $D=R_1\cap R_2$ közös része azokból az $\overline{(a, o)}$ elemekből áll, amelyek $\overline{(0, \alpha)}$ alakban is felírhatók. Mivel (12) szerint

$$(35) \qquad \overline{(a, o)}=\overline{(0, \alpha)} \quad \text{akkor és csakis akkor, ha } \mathrm{A}a=\alpha,$$

azért (11)-ből következik, hogy D az $\overline{(a_*, o)}$ elemekből áll és ezek az elemek mind különbözők. (6) és (7) miatt pedig fennáll a $D\approx S_1$ izomorfia. Ezek szerint mindegyik $\mathfrak{P}/C$ gyűrű megoldása a felvetett problémának.

Még azt kell bebizonyítanunk, hogy a felvetett gyűrűbővítési probléma minden R megoldása a tételben megadott $\mathfrak{P}/C$ gyűrűk egyikével izomorf. A (3) alatti izomorfizmus miatt feltehető, hogy

$$(36) \qquad R=R_1\oplus R_2,$$

ahol R_1, R_2 az R-nek részgyűrűje. Legyen

$$(37) \qquad S_1^*=R_1\cap R_2.$$

(36) miatt R-nek minden eleme felvehető

$$(38) \qquad a+\alpha \qquad (a\in R_1, \alpha\in R_2)$$

alakban. Nyilvánvalóan teljesül a következő:

$$(39) \quad a+\alpha=b+\beta \text{ akkor és csakis akkor, ha } b-a=-(\beta-\alpha)\in S_1^*.$$

R-nek minden eleme s ezért speciálisan az $a\alpha$ ill. az αa is felvehető $b+\beta$ alakban, mégpedig általában többféleképpen. Mindegyik a, α pár esetén rögzítsük a b és a β elemeket, azaz legyen b ill. β az a, α elemeknek egy függvénye:

$$(40) \qquad a\alpha = a^{\alpha}+{}^{a}\alpha,$$

$$(41) \qquad \alpha a = {}^{\alpha}a+\alpha^{a}.$$

Ennélfogva

$$(42) \qquad (a+\alpha)+(b+\beta)=(a+b)+(\alpha+\beta),$$

$$(43) \qquad (a+\alpha)(b+\beta) = ab+a\beta+\alpha b+\alpha\beta= = (ab+a^{\beta}+{}^{\alpha}b)+(\alpha^{b}+{}^{a}\beta+\alpha\beta).$$

Minthogy speciálisan $0\alpha=\alpha 0=0$ és $oa=ao=0$, azért feltehetjük, hogy (9), (10) teljesül. Mivel (8)—(10) teljesül, azért létezik a $\mathfrak{P}$ kétműveletes struktúra. A (6), (7) alatti műveletek alapján (42) és (43) miatt teljesül a következő homomorfizmus:

$$\mathfrak{P} \sim R((a, \alpha) \to a+\alpha). \tag{44}$$

Jelölje C $\mathfrak{P}$-nek a (44) homomorfizmushoz tartozó kompatibilis osztályozását. Ennél az osztályozásnál $\mathfrak{P}$-nek azok az elemei kerülnek egy osztályba, amelyeknek közös R-beli képük van, azaz

$$(a, \alpha) \equiv (b, \beta) \text{ akkor és csakis akkor, ha } a+\alpha=b+\beta.$$

Innen (39) miatt

$$(a, \alpha) \equiv (b, \beta) \text{ akkor és csakis akkor, ha } b-a=-(\beta-\alpha).$$

Ezzel (11)-nek és (12)-nek azt a speciális esetét kaptuk, amelynél $S_1^*=S_2^*$ és A az S_1^*-nak az önmagára való az identikus leképezését jelenti. (44)-ből következik az

$$R \approx \mathfrak{P}/C$$

izomorfia, ami azt jelenti, hogy a felvetett problémánk valamennyi megoldása megadható a tételben leírt módon.

Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

IRODALOM

[1] CASADIO, G.: Construzione dei gruppi come prodotto di sottogruppi permutabili; *Rendiconti di Mat. Univ. Roma, 2* (1941), 348—360.

[2] RÉDEI L., SZÉP J.: Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenprodukte von Zappa—Casadio, *Acta Sci. Math., 16* (1955), 165—170.

[3] SZÉP J.: Über eine neue Erweiterung von Ringen I., *Acta Sci. Math., 19* (1958), 51—62.

[4] SZÉP J.: Über eine neue Erweiterung von Ringen II., *Acta Sci. Math., 20* (1959), 202—214

[5] ZAPPA, G.: Sulla construzione dei gruppi prodotto di due dati sottogruppi permutabili tra loro, Atti Secondo Congresso Unione Mat. Italiana, Bologna 1940, 119—125.

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО РАСШИРЕНИЯ КОЛЕЦ

Я. Сендреи

При заданных кольцах S_1, S_2 требуется описать (с точностью до изоморфизма) все кольца R, для которых выполняются

$$R^+ = R_1^+ + R_2^+, \qquad R_1 \approx S_1, \; R_2 \approx S_2.$$

В работе даются все решения этой проблемы. Результат является обобщением решения одного аналогичного вопроса, исследованного в статьях [3, 4] *Й. Сеп*-а, где кроме вышеуказанных выполнено и условие $R_1 \cap R_2 = O$ (т. е. $R_1^+ + R_2^+$ прямая сумма).

DIE VERALLGEMEINERUNG EINER GEWISSEN ERWEITERUNG VON RINGEN

Von

J. Szendrei

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um das folgende Problem: Zu beliebigen Ringen S_1, S_2 sind diejenigen Ringe R zu bestimmen, für die

$$R^+ = R_1^+ + R_2^+, \qquad R_1 \approx S_1, \; R_2 \approx S_2,$$

gelten, wobei mit dem oben angesetzten „+" Zeichen der Modul des Ringes bezeichnet wird. Der Satz gibt die sämtlichen Lösungen dieses Problems. Diese Ringerweiterung mit der Bedingung $R_1 \cap R_2 = O$ (d. h. $R_1^+ + R_2^+$ ist die direkte Summe der Moduln R^+ und R_2^+) wurde von J. Szép [3, 4] untersucht und gelöst.