A FÉLCSOPORT HOLOMORFJAI

Írta: SZENDREI JÁNOS

1. A csoport holomorfjának fogalma régóta ismeretes. Ez a fogalom jelentős szerepet játszik a csoportelméletben, mivel a csoport automorfizmusaival és karakterisztikus részcsoportjaival áll szoros kapcsolatban. A félcsoport holomorfjának fogalmát a csoport holomorfjának analógiájára R. CROISOT vezette be [3] dolgozatában. A gyűrűkre vonatkozó holomorf-elmélet alapjait RÉDEI L. vetette meg [5]. A csoport- és a gyűrűelméleti holomorfelmélet között sarkalatos az a különbség, hogy egy csoport holomorfjával szemben egy gyűrűnek általában több holomorfja van.

Ismeretes az is, hogy a félcsoportok sok tekintetben a gyűrűkhöz állnak közelebb s nem a csoportokhoz. Így például a félcsoportok ideáljai rendkívül jelentős szerepet töltenek be, bár ennek a fogalomnak csoportok esetén — mint speciális esetben — nincs értelme. Kézenfekvőnek látszik a félcsoport holomorfjának fogalmát a gyűrűelméleti holomorf-fogalomnak analógiájára bevezetni, ellentétben a CROISOT által bevezetett fogalommal. Ebben a dolgozatban a félcsoportok holomorfjainak és a karakterisztikus félcsoportoknak a fogalmát vezetjük be s megvizsgáljuk legegyszerűbb tulajdonságait.

2. Előkészületül a félcsoportok bitranszlációit vizsgáljuk [8].

Legyen Φ egy tetszőleges félcsoport, amelynek elemeit görög kisbetűkkel jelöljük. Ha Φ-nek van egységeleme ill. zéruseleme, akkor azt ε ill. 0 jelöli.

A Φ félcsoport bal (jobb) transzlációján értjük a Φ olyan önmagába való $\alpha \to a_1\alpha$ $(\alpha \to a_2\alpha)$ egyértelmű leképezését, amelyre

$$a_1(\alpha\beta) = (a_1\alpha)\beta \qquad (a_2(\alpha\beta)) = \alpha(a_2\beta)) \tag{1}$$

teljesül. A Φ félcsoport bal (jobb) transzlációinak T_1 (T_2) halmaza az

$$(a_1b_1)\alpha = a_1(b_1\alpha) \qquad ((a_2b_2)\alpha = b_2(a_2\alpha)) \tag{2}$$

előírással értelmezett szorzás szerint félcsoportot alkot.

A Φ félcsoport *bitranszlációi*n értjük az olyan bal és jobb transzlációkból álló $A = (a_1, a_2)$, azaz

$$A:\quad \alpha \to {}^{A}\alpha = a_1\alpha, \quad \alpha \to {}^{A}\alpha = a_2\alpha \tag{3}$$

leképezéspárokat, amelyekre

$$\alpha({}^{A}\beta) = (\alpha^{A})\beta, \quad \text{azaz} \quad \alpha(a_1\beta) = (a_2\alpha)\beta, \tag{4}$$

$${}^{A}(\alpha^{A}) = ({}^{A}\alpha)^{A}, \quad \text{azaz} \quad a_1a_2\alpha = a_1(a_2\alpha) = a_2(a_1\alpha) = a_2a_1\alpha \tag{5}$$

teljesül.

A Φ félcsoport bitranszlációinak szorzatát a következőképpen értelmezzük: Ha $A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$, akkor legyen

$$(6) \qquad AB: \quad \alpha \to {}^{AB}\alpha = {}^{A}({}^{B}\alpha), \; \alpha \to \alpha^{AB} = (\alpha^{A})^{B},$$

azaz $AB=(a_1 b_1, b_2 a_2)$.

A Φ félcsoport bitranszlációinak halmaza általában nem alkot félcsoportot, bitranszlációk szorzatára ugyanis nem mindig teljesül az (5) feltétel. Ezért szükséges a következő fogalom bevezetése:

A Φ félcsoport tetszőleges $A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$ bitranszlációpárját *barátságos*nak nevezzük, ha

$$(7) \qquad {}^{A}(\alpha^{B}) = ({}^{A}\alpha)^{B}, \quad \text{azaz} \quad a_1 b_2 \alpha = b_2 a_1 \alpha,$$

és

$$(7') \qquad {}^{B}(\alpha^{A}) = ({}^{B}\alpha)^{A}, \quad \text{azaz} \quad b_1 a_3 \alpha = a_2 b_1 \alpha$$

teljesül.

A bitranszlációk egy halmazát (vagy egy félcsoportját) batárságosnak nevezzük, ha e halmaz (félcsoport) bármely két eleme batárságos. (3)-ból nyilvánvaló hogy minden bitranszláció önmagával barátságos. A KURATOWSKI—ZORN-lemma szerint barátságos bitranszlációknak bármely halmaza egy maximális ugyanilyen halmaznak része. Könnyen belátható, hogy barátságos bitranszlációknak egy maximális halmaza félcsoport, ezt *maximális barátságos bitranszláció-félcsoport*nak nevezzük. Az elmondottakból következik, hogy minden bitranszláció-félcsoport legalább egy maximális barátságos bitranszláció-félcsoportnak része.

Ha ϱ a Φ-nek egy rögzített eleme, akkor a

$$B_\varrho: \quad \alpha \to \varrho\alpha = {}^{B_\varrho}\alpha, \; \alpha \to \alpha\varrho = \alpha^{B_\varrho}$$

leképezéspár Φ-nek egy bitranszlációja, amelyet a Φ (ϱ által indukált) *belső bitranszláció*jának nevezünk. Nyilvánvaló, hogy az összes ilyenek egy félcsoportot alkotnak, amelyet a Φ *teljes belső bitranszláció-félcsoport*jának nevezünk, s $\mathscr{B}_\Phi$-vel jelölünk.

Az is világos, hogy a $\varrho \to B$ leképezés Φ-nek $\mathscr{B}_\Phi$-re való homomorf leképezése. Ez a leképezés akkor és csakis akkor izomorfizmus, ha a Φ félcsoportban a $\varrho_1\alpha = \varrho_2\alpha$ és $\alpha\varrho_1 = \alpha\varrho_2$ fennállásából mindig $\varrho_1 = \varrho_2$ következik. Ezeket a félcsoportokat gyengén reduktívnak nevezzük [2].

Ezek szerint $\mathscr{B}_\Phi \approx \Phi$ akkor és csakis akkor, ha Φ gyengén reduktív.

Érvényesek a következő, könnyen belátható tételek (lásd: [8]-ban):

I. *$\mathscr{B}_\Phi$ a Φ félcsoport mindegyik maximális barátságos bitranszláció-félcsoportjának ideálja.*

II. *Egy félcsoportnak minden bitranszlációja akkor és csakis akkor belső, ha a félcsoport egységelemes.*

Fontos és érdekes probléma azoknak a félcsoportoknak a felkutatása, amelyeknek egyetlen maximális barátságos bitranszláció-félcsoportja van.

Tekintsük a Φ félcsoport bal és jobb transzlációi félcsoportjának metszetét, azaz legyen $D = T_1 \cap T_2$. Nyilvánvaló, hogy D tartalmazza az identikus leképezést, az esetleg meglevő zérusleképezést, továbbá a Φ centrumelemei által indukált belső transzlációkat. Ha $a^* \in D$, akkor az $A=(a^*, a^*)$ transzlációpár

$$\alpha(a^*\beta) = a^*(\alpha\beta) = (a^*\alpha)\beta$$

és

$$a^* a^* \alpha = a^* a^* \alpha$$

miatt kielégíti a (4)—(5) feltételt, tehát bitranszláció. Ahhoz tehát, hogy egy Φ félcsoportnak egyetlen maximális barátságos bitranszláció-félcsoportja legyen, szükséges, hogy bármely $A=(a^*, a^*)$; $B=(b^*, b^*)$ alakú bitranszlációpár barátságos legyen. Ez pedig akkor és csakis akkor igaz, ha

$$a^*b^*\alpha = b^*a^*\alpha$$

teljesül. Innen kapjuk a következő tételt (lásd [9]-et):

1. tétel. *Ahhoz, hogy a Φ félcsoportnak egyetlen maximális barátságos bitranszlácó-félcsoportja legyen, szükséges, hogy D kommutatív legyen.*

Tekintsük ezután Φ-nek csupán azokat a bal transzlációit, amelyek legalább egy bitranszláció első komponenseként fellépnek. Jelöljük ezek halmazát T_1-vel. Nyilvánvalóan $T_1' \subseteq T_1$, de T_1' általában nem félcsoport. Hasonlóan értelmezhető T_1' is. Közvetlenül belátható, hogy

$$D = T_1' \cap T_2'$$

is érvényes.

Ahhoz, hogy Φ-nek egyetlen maximális barátságos bitranszláció-félcsoportja legyen, szükséges és elégséges, hogy bármely két bitranszláció barátságos legyen, más szóval, (7) és (7') szerint T_1' bármely eleme T_1' bármely elemével felcserélhető legyen. Igaz ennek alapján a következő tételt [9]:

2. tétel. *A Φ félcsoportnak akkor és csakis akkor van egyetlen maximális barátságos bitranszláció-félcsoportja, ha minden T_1'-beli bal transzláció bármely, T_2'-beli jobb transzlációval felcserélhető. Ebben az esetben T_1' és T_2' a T_1 ill. T_2 félcsoportnak részfélcsoportja.*

Az (1) és (4) ismételt alkalmazásával kapjuk a következőket:

$$\big(({}^A\alpha)^B\big)\beta = ({}^A\alpha)({}^B\beta) = {}^A\big(\alpha({}^B\beta)\big) = {}^A\big((\alpha^B)\beta\big) = \big({}^A(\alpha^B)\big)\beta,$$

azaz

$$(a_1b_2\alpha)\beta = (b_2a_1\alpha)\beta \tag{8}$$

és

$$\big({}^A(\alpha\beta)\big)^B = \big(({}^A\alpha)\beta\big)^B = ({}^A\alpha)(\beta^B) = {}^A\big(\alpha(\beta^B)\big) = {}^A\big((\alpha\beta)^B\big),$$

azaz

$$a_1b_2(\alpha\beta) = b_2a_1(\alpha\beta). \tag{9}$$

(8)-ból és (9)-ből a 2. tétel alapján közvetlenül leolvasható a következő tétel [4, 7, 9]:

3. tétel. *A Φ félcsoportnak egyetlen maximális barátságos bitranszláció-félcsoportja van, ha*

a) *a Φ félcsoportnak van legalább egy (jobb oldali) reguláris eleme;*

a_1) *a félcsoport gyengén reduktív;*

b) *$\Phi = \Phi^2$ (ahol Φ^2 a Φ-beli elemek szorzataival generált ideált jelenti), azaz a Φ bármely eleme felírható két elem szorzataként;*

b_1) *a félcsoportnak van bal (jobb) egységeleme;*

b_2) *a félcsoport minden eleme idempotens.*

b_3) *Φ Neumann-féle reguláris félcsoport.*

Nyilvánvaló, hogy kommutatív félcsoport esetén $T_1 = T_2 = D$, ezért érvényes a következő

4. tétel. *Kommutatív félcsoportnak akkor és csakis akkor van egyetlen maximális barátságos bitranszláció-félcsoportja, ha a $T_1 = T_2 = D$ félcsoport kommutatív.*

3. Ezek után rátérünk a félcsoport holomorfjai fogalmának bevezetésére.

A Φ félcsoport egy maximális barátságos bitranszláció-félcsoportját jelöljük $\mathscr{B}$-vel. Bevezetjük a következő jelölést:

$$\mathscr{B}^\circ = \begin{cases} \mathscr{B}, \text{ ha } \mathscr{B}\text{-nek van } \mathcal{O} \text{ zéruseleme és } |\mathscr{B}|>1; \\ \mathscr{B}\cup\mathcal{O} \text{ egyébként, ahol } \mathcal{O}\mathcal{O}=A\mathcal{O}=\mathcal{O}A=\mathcal{O} \ (A\in\mathscr{B}). \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathscr{B}$-nek akkor és csakis akkor van zéruseleme, ha Φ-nek van zéruseleme.

Tekintsük ezután a $\mathbf{H}=\mathscr{B}^\circ\setminus\mathcal{O}\cup\Phi$ halmazt, amelyben egy $*$ műveletet definiálunk a következőképpen:

$$A*B=\begin{cases} AB, & \text{ha } AB\neq\mathcal{O}, \\ 0(\in\Phi), & \text{ha } AB=\mathcal{O}, \end{cases}$$

$$A*\alpha={}^A\alpha,\quad \alpha*A=\alpha^A,$$

$${}^A({}^B\alpha)=\begin{cases} {}^{AB}\alpha, \\ 0, \end{cases} \quad (\alpha^A)^B=\begin{cases} \alpha^{AB}, & \text{ha } AB\neq\mathcal{O}, \\ 0, & \text{ha } AB=\mathcal{O}, \end{cases}$$

$$\alpha*\beta=\alpha\beta.$$

Könnyen belátható, hogy $\mathbf{H}$ az így értelmezett $*$ művelet szerint félcsoportot alkot, amelyben Φ ideál és $\mathbf{H}/\Phi\approx B^\circ$. Az így kapott $\mathbf{H}$ félcsoportot a Φ-nek $\mathscr{B}^\circ$-sal való CLIFFORD-féle bővítésének nevezzük [1].

1. Definíció. *A Φ félcsoport holomorfjain értjük a Φ-nek a maximális barátságos bitranszláció-félcsoportjaival való* CLIFFORD-*féle bővítéseit.*

A félcsoport holomorfjainak egy másik definíciója is megadható [6]. Jelölje $\mathfrak{L}$ a Φ félcsoport összes önmagába való

$$A\colon\ {}^A\alpha\to\alpha=a_1\alpha,\quad \alpha\to\alpha^A=a_2\alpha$$

$A=(a_1, a_2)$ leképezéspárjait. $\mathfrak{L}$-ben szorzást a leképezések egymás utáni végrehajtásával értelmezzük, azaz ha $A=(a_1, a_2)$, $B=(b_1, b_2)$ a két leképezéspár, akkor legyen

$$AB=(a_1b_1,\ b_2a_2).$$

Most is bevezetjük a következő jelölést:

$$\mathfrak{L}^\circ=\begin{cases} \mathfrak{L}, \text{ ha } \mathfrak{L}\text{-nek van } \mathcal{O} \text{ eleme és } |\mathfrak{L}|>1, \\ \mathfrak{L}\cup\mathcal{O} \text{ egyébként, ahol } \mathcal{O}\mathcal{O}=A\mathcal{O}=\mathcal{O}A=\mathcal{O} \ (A\in\mathfrak{L}). \end{cases}$$

(Itt is megjegyezzük, hogy $\mathfrak{L}$-nek akkor és csakis akkor van $\mathcal{O}$ zéruseleme, ha Φ-nek van 0 eleme.)

Tekintsük a $\mathbf{K}=\mathfrak{L}^\circ\setminus\mathcal{O}\cup\Phi$ halmazt, amelyben egy $*$ műveletet a következőképpen értelmezünk:

$$A*B=\begin{cases} AB, & \text{ha } AB\neq\mathcal{O}, \\ 0(\in\Phi), & \text{ha } AB=\mathcal{O}, \end{cases}$$

$$A*\alpha={}^A\alpha,\quad \alpha*A=\alpha^A,$$

$$\alpha*\beta=\alpha\beta,$$

s legyen

$${}^O\alpha=\alpha^O=0\ (\in\Phi).$$

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{K}$ gruppoidot alkot.

2. Definíció. *A Φ félcsoport holomorfjain értjük a Φ-nek a* $\mathbf{K}=\mathfrak{L}^\circ\setminus\mathcal{O}\cup\Phi$ *gruppoidbeli idealizátorait, azaz K-nak azokat a maximális félcsoportjait, amelyek Φ-t ideálként tartalmazzák.*

A K-nak, egy a Φ-t tartalmazó S részhalmaza akkor és csakis akkor félcsoport, ha S-ben a $*$ művelet asszociatív, azaz

(10) $(A*B)*C=A*(B*C)$, azaz $(AB)C=\begin{cases}A(BC), & \text{ha } ABC\neq\Theta,\\ 0=0\ (\in\Phi), & \text{ha } ABC=\Theta,\end{cases}$

(11) $(A*B)*\gamma=A*(B*\gamma)$, azaz ${}^{A}({}^{B}\gamma)=\begin{cases}{}^{AB}\gamma, & \text{ha } AB\neq\Theta,\\ 0, & \text{ha } AB=\Theta,\end{cases}$

(12) $(A*\beta)*C=A*(\beta*C)$, azaz $({}^{A}\beta)^{C}={}^{A}(\beta^{C})$,

(13) $(\alpha*B)*C=\alpha*(B*C)$, azaz $(\alpha^{B})^{C}=\begin{cases}(\alpha^{B})^{C}, & \text{ha } BC\neq\Theta,\\ 0 & \text{ha } BC=\Theta,\end{cases}$

(14) $(\alpha*\beta)*C=\alpha*(\beta*C)$, azaz $(\alpha\beta)^{C}==\alpha(\beta^{C})$,

(15) $(\alpha*B)*\gamma=\alpha*(B*\gamma)$, azaz $(\alpha^{B})\gamma=\alpha({}^{B}\gamma)$,

(16) $(A*\beta)*\gamma=A*(\beta*\gamma)$, azaz $({}^{A}\beta)\gamma={}^{A}(\beta\gamma)$,

(17) $(\alpha*\beta)*\gamma=\alpha*(\beta*\gamma)$, azaz $(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$.

Látható, hogy (10) és (17) mindig igaz K-ban. (16) és (14) azt fejezi ki, hogy a leképezések bal és jobb transzlációkból álló párok. (15) és (12) pedig azt jelenti, hogy a tekintetbe jövő leképezések barátságos bitranszlációk. Végül (11) és (13) a leképezések szorzatát jelenti. Jelöljük $\mathcal{C}$-vel a S-ben fellépő barátságos bitranszlációk félcsoportját. Legyen $\mathcal{C}^{\circ}=\mathcal{C}\cup\Theta$. Világos a fentiekből, hogy S a Φ félcsoportnak a $\mathcal{C}^{\circ}$ zéruselemes félcsoporttal való CLIFFORD-féle bővítése. Mindezek alapján igaz a következő állítás:

A Φ félcsoport holomorfjainak 1. definíciója ekvivalens a 2. definícióval.

Egy Φ félcsoport holomorfjainak száma tehát a maximális barátságos bitranszláció-félcsoportok számával egyezik meg. A 3. tétel alapján igaz a következő

5. Tétel. *A Φ félcsoportnak egyetlen holomorfja van, ha*

a) *a Φ félcsoportnak van legalább egy (jobb oldali) reguláris eleme;*

a_1) *Φ gyengén reduktív;*

b) $\Phi=\Phi^2$;

b_1) *Φ-nek van bal (jobb) egységeleme;*

b_2) *Φ minden eleme idempotens;*

b_3) *Φ NEUMANN-féle reguláris félcsoport.*

Érdekességként állapítjuk meg, hogy az egységelemes félcsoportoknak (itt is, mint a gyűrűknél) a lehető legegyszerűbb szerkezetű a holomorfja, mégpedig jelen esetben a következő alakú:

$$\mathbf{H}=\mathcal{B}^{\circ}_{\Phi}\setminus\Theta\cup\Phi\approx\Phi^{\circ}\setminus\Theta\cup\Phi.$$

4. Most a karakterisztikus részfélcsoport fogalmát vezetjük be.

Definíció. *Egy Φ félcsoport valamely Ψ részfélcsoportját karakterisztikusnak nevezzük, ha Ψ a Φ bármely Clifford-féle bővítésben ideál.*

Érvényes a következő tétel:

6. Tétel. *A Φ félcsoport Ψ részfélcsoportja akkor és csakis akkor karakterisztikus, ha Φ minden A bitranszlációjára*

(18) $${}^{A}\psi,\ \psi^{A}\in\Psi(\psi\in\Psi)$$

teljesül.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy Ψ karakterisztikus részfélcsoportja Φ-nek. Legyen A egy tetszőleges bitranszlációja Φ-nek. Mivel A benne van legalább egy

$\mathcal{C}$ barátságos bitranszláció-félcsoportban (sőt, mint tudjuk, egy maximális ugyanilyenben is), azért A eleme a Φ-nek $\mathcal{C}^{\circ}$-sal való $\mathbf{E}=\mathcal{C}^{\circ}\setminus\mathcal{O}\cup\Phi$ CLIFFORD-féle bővítésének. Az E-beli $*$ művelet értelmezése szerint

$$^{A}\psi = A*\psi\in\Psi,\quad \psi^{A} = \psi*A\in\Psi,$$

mivel Ψ a feltevés szerint E-nek is ideálja.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a Ψ részfélcsoportra (18) teljesül. Minthogy φ bármely CLIFFORD-féle bővítésének egy tetszőleges a eleme φ-nek egy A bitranszlációját indukálja, speciálisan

$$\psi\to \mathrm{a}*\psi={}^{A}\psi,\quad \psi\to\psi*\mathrm{a}=\psi^{A},$$

azért a (18) feltétel teljesülése most azt jelenti, hogy

$$\mathrm{a}*\psi,\quad \psi*\mathrm{a}\in\Psi,$$

azaz Ψ a φ bármely CLIFFORD-féle bővítésében ideál. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Az előbbi bizonyítás módosításával nyerhető a következő kritérium:

7. tétel. *A Φ félcsoport Ψ részfélcsoportja akkor és csakis akkor karakterisztikus, ha Ψ a Φ minden holomorfjának ideálja.*

Az I., II. állítás, valamint az 5. és 7. tétel figyelembe vételével kapjuk az alábbi tételt:

8. tétel. *Az egységelemes félcsoportnak minden részfélcsoportja karakterisztikus.*

IRODALOM

[1] CLIFFORD, A. H., Extension of semigroups, Transaction of the Amer. Math. Soc. 68 (1950), 165—173.

[2] CLIFFORD, A. H.—PRESTON, G. B., The Algebraic Theory of Semigroups, 1961.

[3] CROISOT, R., Holomorphies d'un semi-groupe, Comptes Rendus, 227 (1948), 1134—1136.

[4] VAN LEEUWEN, L. C. A., On the holomorphs of a ring, Nederl. Acad. Wat. Proc., ser. A, 61 (1958), 162—169.

[5] RÉDEI, L., Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5 (1954), 169—195.

[6] SZENDREI, J., Eine neue Definition des Holomorphes der Gruppe und der Holomorphe des Ringes, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 5 (1954), 195—197.

[7] SZENDREI, J., Zur Holomorphentheorie der Ringe, Publ. Math. Debrecen 4 (1955—56), 450—454.

[8] SZENDREI, J., Félcsoportok bővítéseiről, Szegedi Tanárképző Főiskola Évkönyve, 1962. 243—248.

[9] WEINERT, H. J.—EILHAUER, R., Zur Holomorphentheorie der Ringe, Acta Sci. Math. 24 (1963), 28—33.

О ГОЛОМОРФАХ ПОЛУГРУПП

Я. Сендреи

Целью настоящей работы является перенесение теории голоморфов колец в теорию полугрупп. Теория голоморфов полугрупп может быть построена в тесной аналогии с теорией голоморфов колец. Автор определяет характеристические подполугруппы как подполугруппы, являющиеся идеалами во всяком клифордовом расширении подполугруппы. В статье доказываются некоторые теоремы в связи с голоморфами и характеристическими подполугруппами полугрупп.

ÜBER DIE HOLOMORPHE DER HALBGRUPPE

Von

J. SZENDREI

In dieser Arbeit wird der Begriff der Holomorphe einer Halbgruppe eingeführt. Als Hilfsmittel, die Bitranslationen und die CLIFFORDschen Erweiterungen einer Halbgruppe spielen eine wichtige Rolle. Ferner werden die charakteristischen Unterhalbgruppen definiert und einige Sätze über die Holomorphe und charakteristische Unterhalbgruppen bewiesen.