KÉT VÉKONY LENCSE HELYETTESÍTŐ LENCSÉJÉNEK PROBLÉMÁJA

Írta: BOR PÁL és KOVÁCS LÁSZLÓ

Optikai eszközeink elvileg néhány képalkotó elemből állnak, amelyek közt majdnem mindig található optikai lencse is. A gyakorlatban az egyes lencséket a különféle lencsehibák kiküszöbölése végett többnyire két vagy több lencsével helyettesítik. Noha ez a gyakorlat, a lencserendszer képalkotásának számítással való követését — annak megállapítását, hogy adott feltételek mellett milyen képet kapunk, illetőleg kívánt képet milyen feltételek mellett nyerünk — nagyon megkönnyítené, ha a lencserendszert képalkotás szempontjából vele teljesen azonos értékű egyetlen lencseként vehetnénk figyelembe. Lényegében ezt tesszük, amikor a szórólencsét fókusztávolságának megmérése céljából ismert gyújtótávolságú gyűjtőlencsével kombináljuk, s a kapott lencserendszer fókusztávolságát megmérve következtetünk az ismeretlen fókusztávolságra.

Ezzel kapcsolatban felvetődik a kérdés: vajon egy lencserendszer képalkotás szempontjából helyettesíthető-e vele minden esetben teljesen egyenértékű egyetlen lencsével? Ezt a problémát — tudomásunk szerint, s később érthetővé váló ok miatt — az irodalom nem vizsgálja.

Jelen dolgozatunkban a kérdést kissé leszűkített, de több lencsére is könnyen általánosítható formában a következőképpen fogalmazzuk meg: *két koaxiális vékony lencse az előttük levő tárgyról képet ad; hova, milyen fókusztávolságú vékony „helyettesítő" lencsét kell helyeznünk, hogy az az adott tárgyról az előbbi kép helyén ugyanolyan állású, nagyítású és természetű képet hozzon létre, amilyet a két lencse alkotott róla.*

Mivel a felvetett problémában a rendszer lencséinek fókusztávolsága és egymástól mért távolsága, továbbá az előttük levő tárgy távolsága, s ennek megfelelően az alkotott kép is a legkülönfélébb lehet, a sokféle lehetőség egységes tárgyalása érdekében célszerű a tárgy, a kép, a tárgy-, kép- és fókusztávolság, valamint a nagyítás fogalmának olyan általános meghatározása, amely mindenféle képalkotás esetén érvényben marad, s a szóban forgó értékeket olyan előjelekkel adja meg, amilyenekkel a lencsetörvényekben szerepeltetni kell őket.

Ismeretes, hogy a vékony lencsét úgy tekinthetjük, mintha egyetlen sík törőfelületen hozna létre törést. Ezt a „lencsesíkot" — amely egyúttal a lencsét is reprezentálja — a továbbiakban L-lel jelöljük.

Képalkotáskor a fényenergia a lencse „előtti" térből a lencse „mögötti" térbe halad. Önkényesen pozitívnak vesszük az optikai főtengelynek azt az irányát, amely az előbbi térrészből az utóbbi felé mutat (az ábrákon $+ \rightarrow$ jellel jelölve). A képalkotási törvényekben szereplő távolságokat is irányított szakaszoknak tekintjük; értékük pozitív, ha az általunk választott pozitív irányba mutatnak — ellenkező esetben negatív értékűek.

A lencse előtti tárgy egy P pontjából a lencsére divergens sugárnyaláb érkezik. P e nyaláb sugarainak közös pontja. Általában egy P tárgypont olyan pont, amely a lencsére érkező valamely sugárnyaláb sugarainak (vagy meghosszabbításainak) közös pontja. Ha P a lencse előtt van, reális, ha a lencse mögött van, virtuális a tárgypont.

Valamely P tárgypontnak P' a lencse által alkotott képpontja, ha P' a P-t meghatározó sugárnyaláb lencsét elhagyó sugarainak (vagy meghosszabbításainak) közös pontja. Ha P' a lencse előtt van virtuális, ha a lencse mögött, reális a képpont.

t tárgytávolságon a P tárgypont és a lencse L síkja közötti távolságot értjük, amelyet a lencse felé irányított szakasznak tekintünk $t = PL$. Ha $t > 0$, reális, ha $t < 0$, virtuális a tárgypont.

k képtávolságon a lencse L síkja és a P' képpont közötti távolságot értjük, amelyet a képpont felé irányított szakasznak tekintünk: $k = LP'$. Ha $k > 0$, reális, ha $k < 0$, virtuális a képpont.

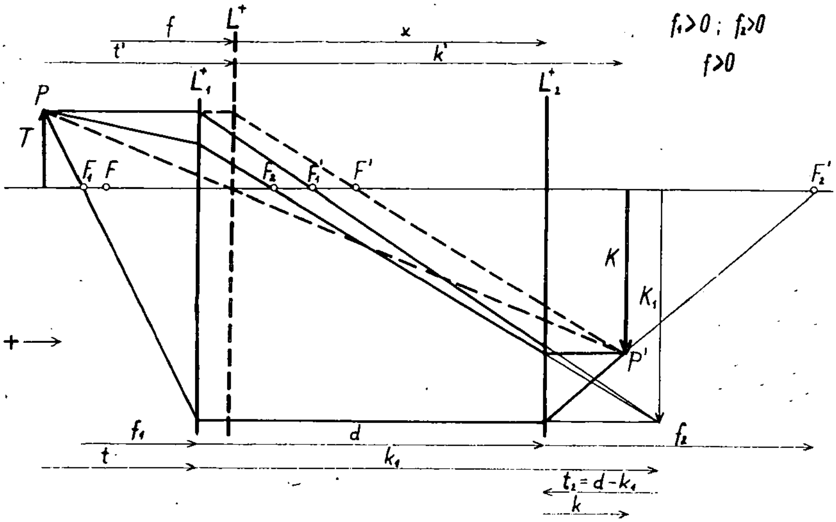
A lencse F' hátsó fókuszán a lencse előtt levő végtelen távoli tengelypont képét értjük. A lencse f fókusztávolsága a lencse síkja és hátsó fókusza közötti távolság, amelyet a hátsó fókusz felé irányított szakasznak tekintünk: $f = LF'$. Gyűjtőlencsénél $f > 0$, szórólencsénél $f < 0$; ez utóbbinál tehát az F' „hátsó" fókusz a lencse előtt van.

A lencse F első fókuszán azt az optikai főtengelyen levő tárgypontot értjük, amelynek képe a végtelenben van. Ismeretes, hogy ha a lencse két oldalán ugyanaz az optikai közeg van, mindkét fókusz segítségével ugyanaz a fókusztávolság definiálható: $f = LF' = FL$.

A következőkben csak olyan tárgyra szorítkozunk, amely az optikai főtengelyre merőleges síkban van. A tárgyon felvett T irányított szakasz képe K ugyancsak irányított szakasz. T irányítását (amely merőleges az optikai főtengelyre) önkényesen mindig pozitívnak vesszük. K irányítása lehet T-jével egyező, s ellentétes is (egyenes állású, illetőleg fordított állású kép; pozitív, illetőleg negatív nagyítás).

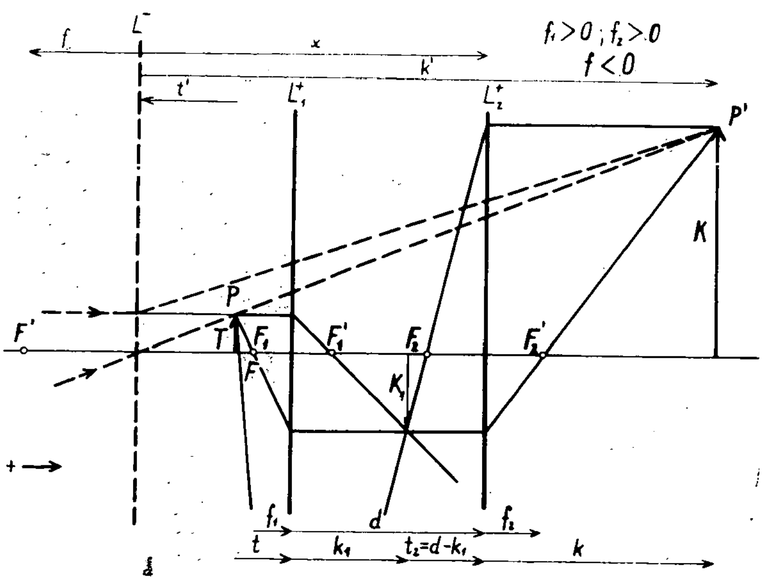
A felsorolt meghatározásokat szem előtt tartva a problémánkban szereplő rendszer lencséinek, valamint a helyettesítő lencsének képalkotását egészen általánosan és egységesen tárgyalhatjuk — függetlenül attól, milyenek az egyes lencsék, milyen távol vannak egymástól, hol van a tárgy előttük, s végül hova, milyen helyettesítő lencsét kell helyeznünk. Csupán arra az egyszerű geometriai tényre kell még hivatkoznunk, hogy ha A, B és C egy egyenesen van, akkor $AB = AC + CB$ — legyen C akár A és B között, akár rajtuk kívül.

Ezek előrebocsátása tárgyalásmódunk világossá tételéhez kellett. A vizsgálandó képalkotási viszonyoknak, valamint előjelkonvenciónak és a szakaszfelbontás alkalmazásának, általában az előrebocsátottak szemléletessé tételére néhány tipikus esetet feltüntető ábrát is közlünk (1—5. ábrák). Ezek azt is illusztrálják majd — a matematikai tárgyalással egybevetve — hogy fejtegetéseink a legkülönfélébb lencsekombinációkra is érvényesek. Keressük meg most már a helyettesítő lencsét.



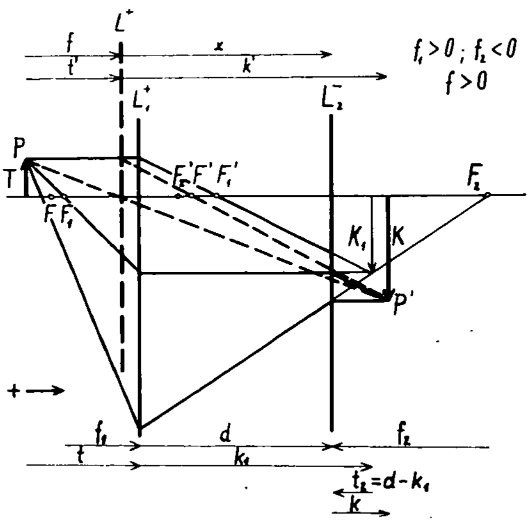
f
L⁺
x
t'
k'
f₁>0 ; f₂>0
f>0
P
L₁⁺
L₂⁺
T
F₁
F
F₂
F₁'
F'
F₂'
K
K₁
P'
+ →
f₁
d
f₂
t
k₁
t₂ = d - k₁
k

1. ábra.



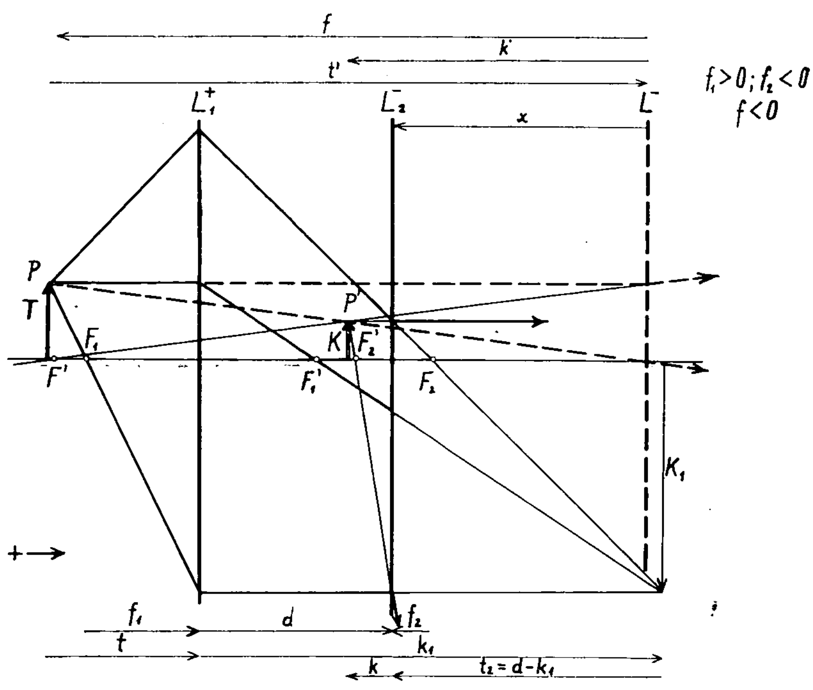
f
L⁻
x
f₁>0 ; f₂>0
k'
f<0
t'
L₁⁺
L₂⁺
P'
K
P
F'
T
F₁
F₁'
F₂
F₂'
F
K₁
+ →
f₁
d
f₂
t
k₁
t₂=d-k₁
k

2. ábra.



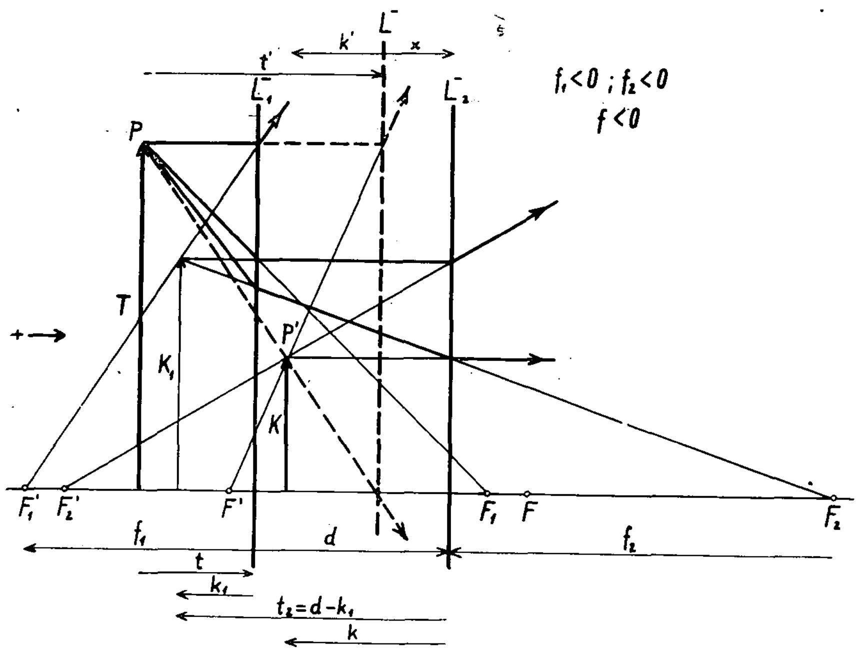
L⁺
f
t'
x
k'
f₁>0 ; f₂<0
f>0
L₁⁺
L₂⁻
P
T
F₂' F' F₁'
F₂
F F₁
K₁
K
P'
+→
f₁
d
f₂
t
k₁
t₂=d-k₁
k

3. ábra.



f
k'
t'
f₁>0; f₂<0
f<0
L₁⁺
L₂⁻
L⁻
x
P
T
P'
K
F₂'
F₁
F'
F₁'
F₂
K₁
+→
f₁
d
f₂
t
k₁
k
t₂=d-k₁

4. ábra.



5. ábra.

Legyen az f_1 fókusztávolságú L_1 lencse előtt t távolságra a T tárgy. L_1 alkotta K_1 képének képtávolsága (a távolságtörvényből kifejezve):

$$k_1 = \frac{tf_1}{t-f_1}, \tag{1}$$

míg nagyítása (a közismert nagyítási képlet alapján):

$$N_1 = \frac{f_1}{f_1-t}. \tag{2}$$

Legyen L_1 mögött d távolságra koaxiálisan elhelyezve az f_2 fókusztávolságú L_2 vékony lencse. d-t L_1-től L_2 felé irányított szakasznak vesszük: $d=L_1L_2$. Az L_1 lencse alkotta K_1 kép L_2-re nézve olyan tárgy, amelynek tárgytávolsága:

$$t_2 = K_1L_2 = K_1L_1 + L_1L_2 = -k_1+d. \tag{3}$$

A K_1-ről az L_2 alkotta K kép képtávolsága (a távolságtörvény szerint, majd (3) és (1) felhasználásával):

$$k = \frac{t_2f_2}{t_2-f_2} = \frac{(d-k_1)f_2}{d-k_1-f_2} = \frac{\left(d-\dfrac{tf_1}{t-f_1}\right)f_2}{d-\dfrac{tf_1}{t-f_1}-f_2},$$

$$k = \frac{tf_2(d-f_1)-df_1f_2}{t(d-f_1-f_2)+f_1f_2-df_1}, \tag{4}$$

míg nagyítása:

$$N_2 = \frac{f_2}{f_2 - t_2}.$$

K-nak az eredeti T tárgyhoz viszonyított nagyítása:

$$N = N_1 N_2 = \frac{f_1 f_2}{(f_1 - t)(f_2 - t_2)},$$

vagy (3) és (1) felhasználásával:

$$N = \frac{f_1 f_2}{t(d - f_1 - f_2) + f_1 f_2 - d f_1}. \tag{5}$$

Kérdés most már: mekkora f fókusztávolságú legyen az L helyettesítő lencse, s hova helyezzük? Jelölje L és L_2 távolságát x, amelyet L_2 felé irányított szakasznak tekintünk: $x = LL_2$.

Mivel a helyettesítő lencse T-ről K helyén ad képet, L-re nézve a tárgytávolság:

$$t' = TL = TL_1 + L_1 L_2 + L_2 L = t + d - x,$$

míg a képtávolság:

$$k' = LK = LL_2 + L_2 K = x + k.$$

Az L alkotta kép N nagyítású, ezért

$$N = -\frac{k'}{t'} = -\frac{x + k}{t + d - x},$$

ahonnan

$$x = \frac{Nt + Nd + k}{N - 1}. \tag{6}$$

A távolságtörvényből viszont

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{t + d - x} + \frac{1}{x + k},$$

amelybe x (6) alatti értékét helyettesítve, L dioptriájára

$$\frac{1}{f} = -\frac{(N-1)^2}{Nt + Nd + Nk} \tag{7}$$

adódik.

Kérdés: k és N t-vel kifejezett értékét [(4), (5)] x, illetőleg $1/f$ kifejezésébe helyettesítve, a lehetséges egyszerűsítések után sem esik-e ki a t? A válasz, nem esik ki. A helyettesítés utáni törtek egyszerűsíthetetlenségét belátni nagyon nehéz, ezért vizsgáljuk meg x, illetőleg $1/f$ értékét először a $t \to \infty$ másodszor a $t = 0$ estben.

Az első esetben (4) és (5) alapján könnyű belátni, hogy

$$\lim_{t\to\infty} N = 0, \tag{8}$$

$$\lim_{t\to\infty} Nt = \frac{f_1 f_2}{d-f_1-f_2}, \tag{9}$$

$$\lim_{t\to\infty} k = \frac{f_2(d-f_1)}{d-f_1-f_2}. \tag{10}$$

Ezért

$$\lim_{t\to\infty} x = \frac{f_2 d}{f_1+f_2-d} \tag{11}$$

és

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{f} = \frac{f_1+f_2-d}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{d}{f_1 f_2}. \tag{12}$$

A második esetben:

$$x\Big|_{t=0} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{f}\Big|_{t=0} = \frac{1}{f_2} \tag{14}$$

(11)-et (13)-mal, (12)-t (14)-gyel egybevetve megállapíthatjuk, hogy x és $1/f$ valóban függ t-től: ha t változik, más lesz x és $1/f$ értéke is.

Meggondolásaink alapján a következőket állapíthatjuk meg:

1. Ha adva két koaxiális vékony lencse, s előttük egy tárgy, akkor *mindig található olyan vékony helyettesítő lencse, amely az adott tárgyról ugyanott ugyanolyan állású, nagyítású és természetű képet hoz létre, mint ahol amilyet a két lencse alkotott.* A helyettesítő lencse helyét és fókusztávolságát a (6), illetőleg a (7) egyenlet határozza meg. A tárgyalás nagyon általános voltából következően nem meglepő, hogy a helyettesítő lencse lehet a tárgy előtt is; akkor rá nézve a tárgy virtuálisnak tekintendő (2. ábra).

2. *Nincs olyan helyettesítő lencse, amely bármilyen* helyzetű tárgy esetében ugyanolyan képet produkálna, mint a lencserendszer (kivéve a $d=0$ esetet, amikor is $1/f=1/f_1+1/f_2$ és $x=0$). A lencserendszer tárgyalását tehát nem lehet egyszerűsíteni egyetlen vékony helyettesítő lencse felvételével. Nyilván ezért alakult ki az a gyakorlat, hogy a lencserendszereket fősíkjaikkal és fókuszaikkal jellemzik, s „idealizált sugármenetek" felvételével vizsgálják a képalkotást — még ha ezeknek a sugaraknak többnyire csak nagyon kevés is a közük a fénysugarakhoz.

3. *A két koaviális lencséből álló lencserendszert fókuszállás szempontjából a jól ismert* (11) *és* (12) *egyenletekkel jellemzett lencse helyettesíti — de csakis fókuszálás szempontjából* (tehát, ha $t=\infty$). A helyettesítő lencse azonban az előtte véges távolságban levő tárgyról már más képet ad, mint a lencserendszer. Ez, a figyelmet sokszor elkerülő s nem eléggé hangsúlyozott körülmény volt vizsgálataink elsődleges indítéka.

4. *Fogalomáltalánosításunk, előjelkonvenciónk és a szakaszfelbontás alkalmazása a többszörös képalkotás tárgyalását a szemlélettől elvonatkoztathatóvá, ezért nagyon általánossá, de egyúttal egyszerűvé is teszi.*

5. Ha a meggondolásainkban szereplő mennyiségek valamelyike matematikai szempontból értelmetlenné válik, mert nevezője nulla (és számlálója nem az), fizikai szempontból nem okoz nehézséget. Fizikai szempontból ugyanis az ilyen relációknak, hogy $k=\infty$, $f=\infty$ stb. van értelme. Ha pl. a (10)-ben szereplő $d-f_1-f_2=0$, az azt jelenti, hogy a végtelen távoli tárgy képe a végtelenben keletkezik, ami az ilyen „teleszkóprendszerű" lencséknél épp a való helyzet. Tárgyalásmódunk ilyen értelemben is általános érvényűnek tekinthető.

6. *Felvetett problémánk szerkesztéssel is mindig megoldható.* A közölt ábrák mutatják, hogy a helyettesítő lencse optikai középpontját a T és K megfelelő pontjait (P, P') összekötő egyenes metszi ki a lencsék közös optikai főtengelyéből — összhangban azzal a ténnyel, hogy a vékony lencse optikai középpontján irányváltozás nélkül halad át a sugár.

A helyettesítő lencse fókuszát a P tárgypontból az optikai főtengellyel párhuzamosan induló és az L síkon P' felé törő sugárnak az optikai főtengellyel alkotott metszéspontja adja. Amikor T L-re nézve virtuális tárgynak számít, e szerkesztő sugár szerepét a P felé az optikai főtengellyel párhuzamosan haladó sugár veszi át (2. ábra).

IRODALOM

Bárány N.: Optikai műszerek. Nehézipari Kiadó, Budapest, 1953.

Bergmann, L., Schaefer, Cl.: Lehrbuch der Experimentalphysik, Band III. Berlin, 1959.

Pohl, R., W.: Einführung in die Optik. Berlin, 1940.

Rhorer L.: Physika. Budapest, 1922.

Westphal, W.: Physik. Berlin, 1939.

ПРОБЛЕМА ЛИНЗЫ ЗАМЕЩАЮЩЕЙ ДВУХ ТОНКИХ ЛИНЗ

П. Бор и Л. Ковач

С таким обобщением понятий, находящихся законах создания изображения, которое сделает возможным счисление с управленными гранями целостно и всеобщее можно рассматривать создание изображения двух коаксиальных линз — независимо от тех многих возможностей, где находится предмет, каковы линзы и каково их растояние. Доказуемое, что в случае предмета, имеющего постоянное положение, всегда даётся такое замещающая линза, которая создаёт с предмета такое же изображение того же увеличивание и характера, которое создается с двумя линзами. С изменением позиции предмета изменяются и место и фокусное расстояние замещающей линзы. Общеизвестные специальные случаи легко дедуцировать из всеобщего.

DAS PROBLEM DER SUBSTITUTIONSLINSE ZWEIER DÜNNER LINSEN

Von

P. Bor und *L. Kovács*

Mit einer Verallgemeinerung der in der Bildgestaltung angeführten Begriffe, welche das Rechnen mit gelenkten Strecken ermöglicht, kann die Bildgestaltung zwei koaxialer dünner Linsen einheitlich und allgemein erörtert werden — unabhängig von den vielen Möglichkeiten, wo der Gegenstand sich befindet, welcherart die Linsen sind und welche Entfernung sie haben. Es lässt sich erweisen, dass es im Falle eines in einer gegbenen Lage befindlichen Gegenstandes stets eine solche Ersatzlinse gibt, welche von dem Gegenstand ein Bild in der gleichen Position, Vergörsserung und Natur zustandebringt, wie es die beiden Linsen von ihm bilden. Veränderung der Lage des Gegenstandes aber hat auch eine Veränderung der Fokusdistanz und des Platzes der Substitutionslinse zur Folge. Die bekannten speziellen Fälle sind aus dem allgemeinen leicht deduzierbar.