AZ ÍTÉLETKALKULUS EGY ÚJ DIAGRAMJA

Írta: SZENDREI JÁNOS

Bevezetés

Egy n-változós logikai művelet olyan n-változás függvényt jelent, amelynek értelmezési tartománya és értékkészlete is az [i, h] kételemű halmaz. Más szóval egy n-változós logikai művelet az i és h elemek n-tagú ismétléses variációihoz (amelyeknek a száma 2^n) hozzárendeli az i és h elemeknek egy 2^n tagú ismétléses variációját. Eszerint az n-változós logikai műveletek száma 2^{2^n}.

A következő speciális esetek játszanak fontos szerepet:

(1) $$f^{(i)}(p_1, p_2, \ldots, p_n) \equiv i,$$

(2) $$f^{(h)}(p_1, p_2, \ldots, p_n) \equiv h,$$

(3) $$f^{(k)}(p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_n) \equiv p_k \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

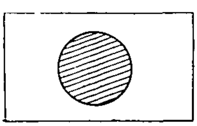
Ez utóbbiak szerint maguk az ítéletek is mint speciális n-változós függvények szerepelnek.

Az ítéletkalkulusban a leggyakrabban használt logikai műveletek a következők: negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció, ekvivalencia. Ezek definíciói rendre a következő:

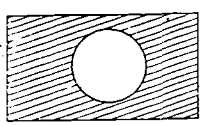
p_1	$\neg p_1$
i	h
h	i

p_1	p_2	$p_1 \wedge p_2$	$p_1 \vee p_2$	$p_1 \to p_2$	$p_1 \leftrightarrow p_2$
i	i	i	i	i	i
h	i	h	i	i	h
h	h	h	h	i	i
i	h	h	i	h	h

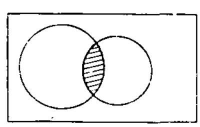
Logikai műveletek szemléletésére, de ítéletkalkulusbeli kifejezések logikai értékének meghatározására is használatosak az ún. VENN-féle diagramok [1, 4]. A felsorolt logikai műveletek VENN-féle diagramjai a következők:



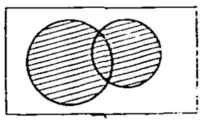
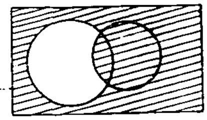
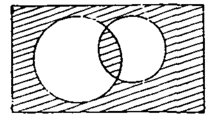
p_1



$\neg p_1$

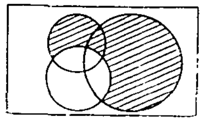


$p_1 \wedge p_2$

$p_1 \vee p_2$ $\qquad$ $p_1 \rightarrow p_2$ $\qquad$ $p_1 \leftrightarrow p_2$

A $[(p_1 \vee \neg p_2) \vee p_3] \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_3)$ kifejezés VENN-féle diagramja az előbbiek alapján a következő:



Amilyen szemléletesek a VENN-diagramok két, s bizonyos esetekben még három ítélet esetén, olyan nehézkesen tekinthetők át, ha több ítéletről van szó. Az előbbi VENN-féle diagram elkészítése is már elég nehézkes. Megkönnyíti természetesen a VENN-féle diagram elkészítését az a tény, hogy a

(4) $$p_1 \rightarrow p_2 \equiv \neg p_1 \vee p_2,$$

(5) $$p_1 \leftrightarrow p_2 \equiv (\neg p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_2 \vee p_1)$$

azonosságok felhasználásával az implikációt és az ekvivalenciát kifejezhetjük a negáció, konjunkció, valamint a diszjunkció segítségével. Látható, hogy VENN-diagramokkal a logikai műveletek elvégzése is sok nehézségbe ütközik három vagy annál több ítélet esetén.

Az n-változós logikai műveletek VENN-féle diagramjainak elkészítéséhez tehát az alaptéglalapot 2^n részre kell felosztani, s ezen résztartományok közül azokat besatírozni, amelyeken a logikai függvény értéke i, azaz igaz. $n \geqq 3$ esetén az alaptéglalap felosztása általában nehezen tekinthető át, s két, ugyanolyan változós VENN-féle diagramban annak az áttekintése is nehézségbe ütközik, hogy ugyanazok a résztartományok vannak-e besatírozva, vagy nem.

A logikai műveleteket szokás n-dimenziós kockákkal is ábrázolni [3], azonban ez az ábrázolás is legfeljebb három változós logikai műveletek esetén szemléletes és tekinthető át könnyen.

Ítéletek ábrázolása diagramokkal

Az alábbiakban — RANDOLPH [2] alatti eredményét felhasználva és módosítva — a logikai műveleteknek jól áttekinthető és könnyen kezelhető diagramjait tárgyaljuk. Logikai műveletek mellett használhatók ezek a diagramok halmazelméleti műveletek esetén is.

Az egyváltozós logikai műveletek esetén osszuk fel a síkot egy „függőleges" tengellyel két részre. A jobb oldali részhez rendeljük az i, a bal oldali részhez a h logikai értéket. Az alapséma tehát a következő:

h | i

Az egyváltozós $f(p_1)$ logikai műveletek diagramját úgy kapjuk, hogy a két félsík közül abba, amelyiken a logikai függvény értéke i, egy köröcskét rajzolunk. Az egyváltozós logikai műveletek, s azok diagramjai a következők:

p_1	$f(p_1) \equiv i$
i	i
h	i

p_1	$f(p_1) \equiv p_1$
i	i
h	h

p_1	$f(p_1) \equiv \neg p_1$
i	h
h	i

p_1	$f(p_1) \equiv h$
i	h
h	h

$$\begin{array}{c|c} o & o \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & o \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} o & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \end{array}$$

A kétváltozós logikai műveletek diagramjait úgy kapjuk, hogy az előbb már kettéosztott síkot egy „vízszintes" tengellyel négy részre osztjuk. A jobb oldali síknegyedekben az első változó i, a bal oldaliakban h, a felső síknegyedekben a második változó i, az alsókban h. Az alapséma tehát a következő:

$$\begin{array}{c|c} h\,i & i\,i \\ \hline h\,h & i\,h \end{array}$$

A kétváltozós $f(p_1, p_2)$ logikai műveletek diagramjait úgy készíthetjük el, hogy azokba a negyedekbe, amelyekben az $f(p_1, p_2)$ értéke i, egy köröcskét rajzolunk. A kétváltozós logikai műveletek, s azok diagramjai rendre a következők:

p_1	p_2	$\equiv i$	$p_1 \to p_2$	$p_1 \vee p_2$	$p_2 \to p_1$	$\neg(p_1 \wedge p_2)$	p_2	$p_1 \leftrightarrow p_2$	p_1
i	i	i	i	i	i	h	i	i	i
h	i	i	i	i	h	i	i	h	h
h	h	i	i	h	i	i	h	i	h
i	h	i	h	i	i	i	h	h	i

p_1	p_2	$\neg p_1$	$\neg(p_1 \leftrightarrow p_2)$	$\neg p_2$	$p_1 \wedge p_2$	$\neg(p_2 \to p_1)$	$\neg(p_1 \vee p_2)$	$\neg(p_1 \to p_2)$	$\equiv h$
i	i	h	h	h	i	h	h	h	h
h	i	i	i	h	h	i	h	h	h
h	h	i	h	i	h	h	i	h	h
i	h	h	i	i	h	h	h	i	h

$$\underset{\equiv i}{\begin{array}{c|c} o & o \\ \hline o & o \end{array}} \quad \underset{p_1 \to p_2}{\begin{array}{c|c} o & o \\ \hline o & \end{array}} \quad \underset{p_1 \vee p_2}{\begin{array}{c|c} o & o \\ \hline & o \end{array}} \quad \underset{p_2 \to p_1}{\begin{array}{c|c} & o \\ \hline o & o \end{array}} \quad \underset{\neg(p_1 \wedge p_2)}{\begin{array}{c|c} o & \\ \hline o & o \end{array}} \quad \underset{p_2}{\begin{array}{c|c} o & o \\ \hline & \end{array}} \quad \underset{p_1 \leftrightarrow p_2}{\begin{array}{c|c} & o \\ \hline o & \end{array}} \quad \underset{p_1}{\begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o \end{array}}$$

$$\underset{\neg p_1}{\begin{array}{c|c} o & \\ \hline o & \end{array}} \quad \underset{\neg(p_1 \leftrightarrow p_2)}{\begin{array}{c|c} o & \\ \hline & o \end{array}} \quad \underset{\neg p_2}{\begin{array}{c|c} & \\ \hline o & o \end{array}} \quad \underset{p_1 \wedge p_2}{\begin{array}{c|c} & o \\ \hline & \end{array}} \quad \underset{\neg(p_2 \to p_1)}{\begin{array}{c|c} o & \\ \hline & \end{array}} \quad \underset{\neg(p_1 \vee p_2)}{\begin{array}{c|c} & \\ \hline o & \end{array}} \quad \underset{\neg(p_1 \to p_2)}{\begin{array}{c|c} & \\ \hline & o \end{array}} \quad \underset{\equiv h}{\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}}$$

A háromváltozós logikai műveletek diagramjainak az alapsémáját a kétváltozós műveletek alapsémájából úgy készítjük, hogy minden egyes síknegyedet egy „függőleges" tengellyel kettéosztunk, s az így kapott részek öröklik a negyedek logikai változóit, azaz

$$\begin{array}{c|c|c|c} h\,i & h\,i & i\,i & i\,i \\ \hline h\,h & h\,h & i\,h & i\,h \end{array}$$

s ezekhez harmadik változóként i, illetve h kerül aszerint, hogy az új „függőleges" tengelyek jobb, illetve bal oldalán vannak:

h i h	h i i	i i h	i i i
h h h	h h i	i h h	i h i

A háromváltozós logikai műveletek diagramjait ezek után úgy készítjük el, hogy azokba a síkrészekbe rajzolunk köröcskét, amelyekben a logikai függvény értéke i. A lehetséges $2^{2^3}=256$ háromváltozós logikai művelet közül példaként a következőket tekintsük:

			o
			o

$p_1 \wedge p_3$

			o
o	o	o	o

$p_2 \to p_3$

	o		o
o	o		o

$(p_1 \vee p_2) \to p_3$

A négyváltozós logikai műveletekhez is előbb az alapsémát készítjük el. A háromváltozós alapséma minden egyes síkrészét „vízszintes" tengellyel kettéosztjuk:

h i h	h i i	i i h	i i i
h i h	h i i	i i h	i i i
h h h	h h i	i h h	i h i
h h h	h h i	i h h	i h i

Ezekhez negyedik változóként az utóbbi tengelyek felett i-t, alattuk h-t írva, kapjuk a négyváltozós logikai műveletek alapsémáját:

h i h i	h i i i	i i h i	i i i i
h i h h	h i i h	i i h h	i i i h
h h h i	h h i i	i h h i	i h i i
h h h h	h h i h	i h h h	i h i h

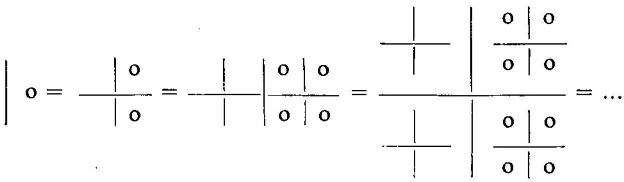
A négyváltozós logikai műveletek diagramját úgy készítjük el, hogy a síknak azokba a részeibe, ahol a négyváltozós logikai függvény igaz, egy-egy köröcskét rajzolunk. Például:

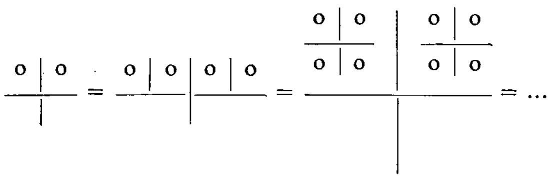
o			o
o		o	
		o	
o			

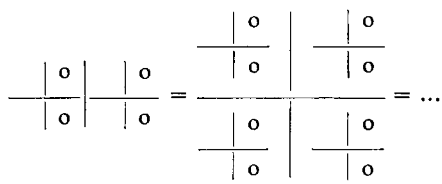
A négyváltozós diagramok száma 65 536.

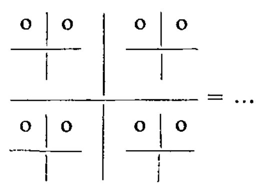
Az elmondottak után már könnyen látható, hogy az (n+1)-változós logikai műveletek diagramjaihoz is előbb az (n+1)-változós alapsémát kel elkészíteni. Ez a következőképpen történik, feltéve, hogy az n-változós alapséma már ismert: Az n-változós alapséma minden egyes részét osszuk további két részre egy „függőleges", illetve „vízszintes" tengellyel, aszerint, hogy n páros, illetve páratlan. Minden egyes részben az első n helyen az i, h elemeknek a kettéosztás előtti n tagú variációi állnak, s (n+1)-edik helyre az új tengely jobb oldalán, illetve fölé i-t írunk, a bal oldalán, illetve alatta pedig h-t. $({}^{n}+1)$-változó slogikai műveletek diagramjait úgy készítjük el, hogy az (n+1)-változós alapsémának azon részeibe írunk egy-egy köröcskét, amelyekben a függvény értéke i.

A logikai műveletek definícióiból [3] alapján nyilvánvaló, hogy magukat az ítéleteket a következő diagramokkal ábrázolhatjuk:

p_1: 

p_2: 

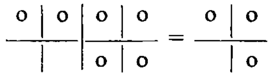
p_3: 

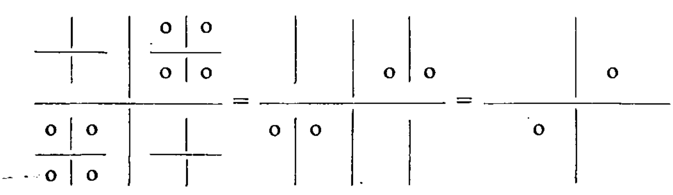
p_4: 

⋮

Általában is igaz, hogy ugyanannak a műveletnek az n-változós diagramjáról az (n+1)-változós diagramjára való áttérésnél a köröcskék kettéosztódnak. Ezt a diagram *bővítésének* nevezzük.

Bizonyos esetekben viszont (n+1)-változós diagramot helyettesíthetünk n-változós diagrammal. Ezt a diagram *egyszerűsítésének* nevezzük. Például:

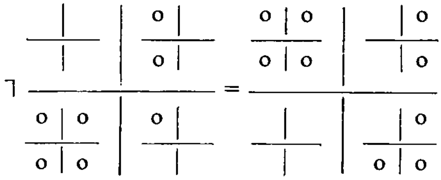




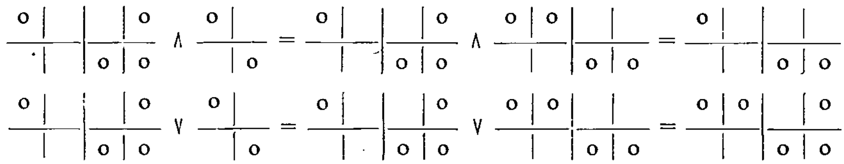
Logikai műveletek végzése diagramokkal

Az ismertetett diagramokkal igen egyszerűen végezhetjük el a negáció, a konjukció és a diszjunkció műveletét.

Egy ítélet negációjának diagramját úgy készítjük el, hogy a megfelelő alapséma azon részeibe írunk köröcskéket, amelyek az ítéletnél üresek voltak, más szóval képezzük a diagram komplementer diagramját. Például:

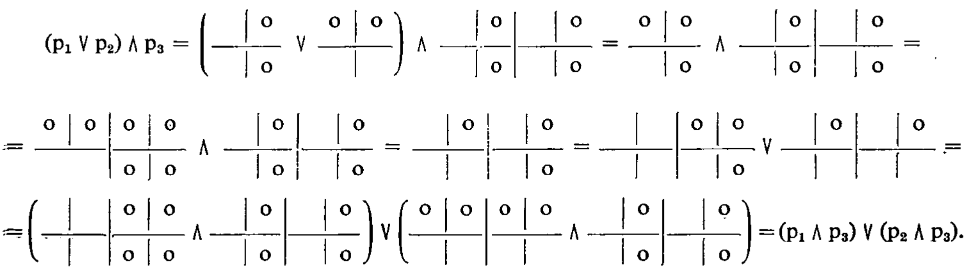


A két ítélet konjukcióját (diszjunkcióját) úgy képezzük, hogy a két ítélet diagramját azonos változós diagrammá bővítjük és a két diagram közös részét, azaz metszetét (egyesítettjét) képezzük. Például:



Az implikációt és az ekvivalenciát (4) és (5) szerint kifejezzük negáció, konjunkció és diszkonjunkció segítségével.

Azonosságok helyességét is könnyen igazolhatjuk ezekkel a diagramokkal. Példaként a következő azonosságot említjük:



Az ítéletkalkulus következtetésmódjai

Az ítéletkalkulus következményfogalma szerint a Q ítélet akkor és csak akkor következménye a P ítéletnek, jelekben:

$$P \rightarrow Q, \quad \text{vagy} \quad \frac{P}{Q},$$

ha a $P \rightarrow Q$ implikáció, azaz a $\neg P \vee Q$ diszjunkció azonosan igaz. Ennek felhasználásával a diagramokkal könnyen bizonyíthatjuk egy-egy ítéletkalkulusbeli következtetésmód helyes vagy helytelen voltát.

A

$$\frac{\begin{array}{c}P \to Q\\ P\end{array}}{Q}$$

következtetésmód a „modus ponens", amelynek helyességét a

$$[(P \to Q) \wedge P] = \neg [(P \to Q) \wedge P] \vee P$$

azonosság alapján a következő diagramok segítségével is beláthatjuk:

$$\neg\left[\left(\begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o\end{array} \to \begin{array}{c|c} o & o \\ \hline & \end{array}\right) \wedge \begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o\end{array}\right] \vee \begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o\end{array} = \neg\left(\begin{array}{c|c} o & o \\ \hline o & \end{array} \wedge \begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o\end{array}\right) \vee \begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o\end{array} =$$

$$\neg \begin{array}{c|c} & o \\ \hline & \end{array} \vee \begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o\end{array} = \begin{array}{c|c} o & \\ \hline o & o\end{array} \vee \begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o\end{array} = \begin{array}{c|c} o & o \\ \hline o & o\end{array}$$

A diagramok segítségével egy következtetésmód helyessége a következőképpen belátható. Elkészítjük külön a P premissza és külön a Q konkluzió diagramját. Q akkor és csak akkor következménye P-nek, ha Q diagramján legalább azokban a részekben van köröcske, amely részekben a P diagramján is van. Ennek felhasználásával például a „modus tollendo ponens" következtetésmód, azaz a

$$\frac{\begin{array}{c}P \vee Q\\ \neg P\end{array}}{Q}$$

következtetésmód így látható be:

$$\frac{(P \vee Q) \wedge \neg P = \left(\begin{array}{c|c} & o \\ \hline & o\end{array} \vee \begin{array}{c|c} o & o \\ \hline & \end{array}\right) \wedge \begin{array}{c|c} o & \\ \hline o & \end{array} = \begin{array}{c|c} o & o \\ \hline & o\end{array} \wedge \begin{array}{c|c} o & \\ \hline o & \end{array} = \begin{array}{c|c} o & \\ \hline & \end{array}}{Q = \begin{array}{c|c} o & o \\ \hline & \end{array}}$$

Megjegyzés: A bevezetett diagramok az ítéletkalkulusban játszott szerepük mellett jól felhasználhatók oktatási célra is. Ez esetben célszerű a diagramokat átlátszó, négyzet alakú, műanyaglapokon elkészíteni úgy, hogy a köröcskék (vagy körgyűrűk) belső köre furat legyen. Az ilyen négyzetek egymásra helyezésével olvashatjuk le a két diagram egyesítettjét, illetve metszetét.

IRODALOM

[1] Kemény—Snell—Thompson; Finite Mathematics, New York, 1957.

[2] Randolph, J. F.; Cross—Examining Propositional Calculus and Set Operations, Amer. Math. Monthly, 72 (1965), 117—127.

[3] Varga T.; Matematikai logika, Budapest, 1961.

[4] Whitesitt, J. E.; Boolean Algebra and its Applications, London, 1961.

НОВАЯ ДИАГРАММА ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Я. Сендреи

В исчислении высказываний употребляются разные диагранммы, но эти диаграммы в случае действий многих переменных грамоздкие. Введенные здесь новые диаграммы наглядны и в случае нескольких высказываний, они дают возможность наглядно вычислить негацию, конъюнкцию и дизъюнкцию высказываний и позволяют установить правила импликации исчисления высказываний. Естественно, эти диаграммы используемые и для наглядного пояснения и выполнения теоретико-множественных действий.

ÜBER EIN NEUES DIAGRAMM DES AUSSAGENKALKÜLS

Von

J. Szendrei

In dem Aussagenkalkül wurden verschiedene Diagramme eingeführt, aber diese sind im allgemeinen für mehreren Variablen kompliziert. Diese neuen Diagramme sind anschaulich, und für mehrere Aussagen, für Operationen von Aussagen, ferner auch Schlussfolgerungen gut anwendbar. Ausserdem leisten diese Diagramme gute Dienste auch der Mengentheorie, insbesondere für die Mengenoperationen.