MEGJEGYZÉSEK A GYŰRŰ CENTRUMÁRÓL

Írta: SZENDREI JÁNOS

Legyen R egy (asszociatív) gyűrű, amelynek elemeit latin kisbetűkkel jelöljük. Az R gyűrű C(R) centrumán azoknak a $c(\varepsilon R)$ elemeknek a halmazát értjük, amelyekre $cr=rc$ teljesül az R bármely r elemére. Könnyen belátható, hogy C(R) az R-nek részgyűrűje, de általában nem ideálja.

Csoportok esetén ugyanakkor a csoport centruma a csoportnak mindig normálosztója is. Ez, s azok a tények, amelyek szerint a csoport centrumának megfelelő fogalom a gyűrűknél a gyűrű annulláló ideálja, azt mutatják, hogy a gyűrű centruma más szerepet tölt be a gyűrűelméletben, mint a csoport centruma a csoportelméletben. A gyűrű bizonyos centrumelemei ugyanakkor fontos szerepet játszanak számos vizsgálatban. Például a gyűrűk PEIRCE-féle felbontásában felhasználjuk azt a tényt, hogy a gyűrű valamely ideáljának az egységeleme, ami nem szükségképpen egységeleme magának a gyűrűnek, a gyűrű centrumának is eleme.

Az alábbiakban azt a kérdést vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett ideál a gyűrű centruma, továbbá azt, hogy milyen összefüggés van az R gyűrű C(R) centruma és az R gyűrű egy tetszőleges I ideáljának a C(I) centruma között.

Felhasználjuk a következő fogalmat is. Az R gyűrűben az $rs-sr$ (rs, ε R) különbségek által generált ideált az R gyűrű kommutátorideáljának nevezzük, K(R)-rel jelöljük.

Érvényes a következő tétel:

1. *tétel. Az* R *gyűrű* C(R) *centruma akkor és csak akkor ideálja* R-*nek, ha* C(R) *annullálja a* K(R) *kommutátorideált.*

Bizonyítás. Legyen C(R) ideálja R-nek, s legyen $c \varepsilon C(R)$. Ekkor az R gyűrű bármely r, s elemére $c(rs)=(cr)s=s(cr)=(sc)r=c(rs)$ teljesül, mivel a $cr \varepsilon C(R)$. Innen $c(rs-sr)=(rs-sr)c=0$ adódik, ami azt jelenti, hogy C(R) minden eleme K(R)-nek anulláló eleme. Megfordítva, ha a C(R) minden c eleme K(R)-et anullálja, akkor c anullálja mindegyik kommutátort is, azaz

$$c(rs-sr)=O \quad (c \varepsilon C(R);\ r, s \varepsilon R).$$

Innen $(cr)s=s(cr)$ következik, ami azt jelenti, hogy $cr \varepsilon C(R)$, azaz C(R) az R gyűrűnek ideálja. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A gyűrű kommutativitásának egy elegendő feltételét adja meg a következő tétel:

2. *tétel. Ha az* R *gyűrű centruma ideál, és a centrumnak legalább egy, zérustól különböző eleme nem zérusosztó* R-*ben, akkor az* R *gyűrű kommutatív.*

Bizonyítás. Legyen c a C(R) centrumnak olyan eleme, amely a tételbeli követelményeket kielégíti. Ha C(R) ideál, akkor — amint előbb láttuk — teljesül a

$c(rs-sr)=0$ egyenlőség minden r, s (ε R) elemre. A feltevés miatt innen $rs=sr$ következik, ami éppen a bizonyítandó állítást jelenti.

A 2. tétel a következőképpen is megfogalmazható:

2'. tétel. Ha R *nem kommutativ gyűrű, és* C(R) *ideál, akkor* C(R) *minden elem zérusosztó* R-*ben.*

Legyen I az R gyűrűnek egy kétoldali ideálja. Most a C(R) és a C(I) közötti kapcsolatot vizsgáljuk meg. Érvényes a következő tétel:

3. tétel. Ha az I *ideál* C(I) *centrumának egy* c *eleme nem zérusosztó* I-*ben, akkor* c *benne van* C(R)-*ben.*

Bizonyítás. Legyen r az R gyűrű egy tetszőleges eleme és c a tételben szereplő elem. Mivel $rc \varepsilon$ I, és $c \varepsilon$ C(I), azért $(rc)cc=c(rc)$. Innen $(rc)c=(cr)c$, azaz $(rc-cr)=c$ adódik, ahonnan a feltevés szerint $rc-cr=0$, azaz $cr=rc$ következik. Ez éppen azt jelenti, hogy c az R-nek is centrumeleme, ami bizonyítandó volt.

A 3. tétel egyszerű következményeként kapjuk az alábbi állítást:

4. tétel. Ha az I *ideál kommutatív zérusosztómentes gyűrű, akkor az* R *gyűrű centruma tartalmazza* I-*t.*

Hasonlóan bizonyítható be a következő tétel is:

5. tétel. Ha az I *ideál kommutatív és* $I^2=I$, *akkor az* R *gyűrű centruma tartalmazza* I-*t.*

Bizonyítás. Az $I^2=I$ feltevés miatt elegendő azt bizonyítani, hogy $(ab)r=r(ab)$ teljesül az R minden r elemére, ahol $a, b \varepsilon$ I. Ez az állítás pedig az

$$(ab)r=a(br)=(br)a=b(ra)=(ra)b=r(ab).$$

egyenlőségekből közvetlenül leolvasható.

A 3—5. tételek a gyűrűk SCHREIER-féle bővítéseire vonatkozóan a következőképpen fogalmazhatók meg:

3'. tétel. Ha az R *gyűrű centrumának egy eleme nem zérusosztó, akkor ez az elem benne van az* R *gyűrű bármely Schreier-féle bővítésének a centrumában.*

4'. tétel. Ha R *kommutatív zérusosztómentes gyűrű, akkor az* R *bármely* SCHREIER-*féle bővítésének centruma tartalmazza* R-*et.*

5'. tétel. Ha R *kommutatív gyűrű és* $R^2=R$, *akkor az* R *bármely* SCHREIER-*féle bővítésének centruma tartalmazza* R-*et.*

IRODALOM

[1] RÉDEI, L.; Algebra, Budapest, 1954.

[2] SZENDREI, J.: On rings admitting only direct extensions, Publicationes Math. Debrecen, 3 (1953), 180—182.

[3] Van der WAERDEN, B. L.; Moderne Algebra, Berlin, 1940.

ЗАМЕЧАНИЯ О ЦЕНТРЕ КОЛЕЦ

Я. Сендреи

Как известно, центр кольца с некоторой точки зрения играет другую роль, как центр группы. В настоящей заметке излагаются между прочим следующие вопросы: При каких условиях будет центр кольца идеалом и какие взаимосвязи можно установить между центром кольца и центром произвольного идеала этого кольца.

BEMERKUNGEN ÜBER DAS ZENTRUM VON RINGEN

Von

J. Szendrei

Es ist bekannt, dass das Zentrum von Ringen nicht eine solche Rolle spielt, wie das Zentrum in der Gruppentheorie. In dieser Note wird das Zentrum des Ringes untersucht, und unter anderen werden die folgenden Probleme betrachtet: Unter welchen Bedingungen ist das Zentrum ein Ideal des Ringes, ferner was für Zusammenhänge stehen zwischen dem Zentrum des Ringes und dem Zentrum eines Ideals von demselben Ringe.