A RACIONÁLIS SZÁMOK EFFEKTÍV MEGSZÁMLÁLHATÓSÁGÁRÓL

Írta: SZEDERKÉNYI ANTAL

Ebben a cikkben egy egyszerű bizonyítását adjuk annak az ismert tételnek, hogy a racionális számok halmaza effektíve ekvivalens a természetes számok N halmazával, azaz *effektíve megszámlálható.*

Mint ismeretes egy A halmaz *effektíve ekvivalens* egy B halmazzal akkor és csak akkor, ha meg tudunk állapítani egy kölcsönösen egyértelmű leképezést az adott A és B halmaz között.

Az általánosan használt ekvivalencia és az effektív ekvivalencia közötti különbség az, hogy míg az előbbinél csak az egyértelműség *létezését* követeljük meg, addig az utóbbinál effektíve *meg kell tudnunk állapitani* az egy-egyértelmű leképezést.

A cikkben meg fogjuk adni az egynél kisebb pozitív racionális számoknak egy sorozatba rendezését rekurzióval, amiből könnyen következik egy olyan leképezés megadása, amely minden természetes számhoz kölcsönösen és egyértelműen hozzárendel egy racionális számot és minden racionális szám fellép kép gyanánt.

I. Legyen r_0 olyan racionális szám, amelyre $0<r_0<1$. Legyen továbbá a_1 a legkisebb olyan természetes szám, amelyre

$$r_1 = r_0 - \frac{1}{a_1} \geqq 0.$$

Ha $r_1 \neq 0$, akkor jelölje a_2 a legkisebb olyan természetes számot, amelyre

$$r_2 = r_1 - \frac{1}{a_2} \geqq 0.$$

Ha $r_2 \neq 0$, akkor a_3 hasonló tulajdonságú, mint a_2, stb.

Így racionális számoknak egy $\{r_n\}$ csökkenő sorozatát, valamint természetes számoknak egy $\{a_n\}$ növekvő sorozatát kapjuk.

Bizonyítjuk a következő lemmát:

1. Lemma. Az r_n sorozat véges sok zérustól különböző tagból áll, azaz van olyan n, hogy $r_n=0$.

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban egy s racionális szám számlálóját $\bar{s}$-sal jelöljük.

Legyen

$$r_0 = \frac{a}{b} \ (a, b \in N; \ (a, b) = 1 \ .$$

Ekkor

$$r_1 = \frac{a}{b} - \frac{1}{a_1} = \frac{aa_1 - b}{ba_1};$$

$$r_2 = \frac{\bar r_1}{ba_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{\bar r_1 a_2 - ba_1}{ba_1 a_2};$$

$$\vdots$$

$$r_n = \frac{\bar r_{n-1}}{ba_1a_2\dots a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{\bar r_{n-1}a_n - ba_1a_2\dots a_{n-1}}{ba_1a_2\dots a_n};$$

$$\vdots$$

Nyilvánvalóan $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, valamint igaz, hogy $\bar r_n \geqq 0$. Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ számok tulajdonsága folytán:

$$r_{n-1} = \frac{\bar r_{n-1}}{ba_1\dots a_{n-1}} < \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Ebből

$$\bar r_{n-1}a_n - \bar r_{n-1} < ba_1\dots a_{n-1},$$

azaz

$$\bar r_n = \bar r_{n-1}a_n - ba_1\dots a_{n-1} < \bar r_{n-1} \qquad (n=1, 2, \dots).$$

Tehát kapjuk, hogy

$$a > \bar r_1 > \bar r_2 > \dots \geqq 0.$$

Mivel itt nemnegatív egészek egy szigorúan csökkenő sorozatát kapjuk, ezért ezek száma véges, legfeljebb a. Tehát legfeljebb a lépés után 0 különbséget kapunk. Q. e. d.

A lemmából és az r_n sorozat konstrukciójából következik, hogy

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n},$$

azaz az r racionális számot különböző törzstörtek (1 számlálójú törtek) összegeként állíthatjuk elő.

Megjegyzés. A racionális számok törzstörtek összegeként való előállításával már az ókori egyiptomiak is foglalkoztak. A RHYND-papíruszon elég sok törtnek megtalálható ilyen előállítása. Némelynek egy ilyen konstrukcióból adódó felbontása van adva, míg másoknak más.

2. Lemma. Az előző konstrukcióban előálló $a_1, a_2, \dots, a_n$ véges sorozatra teljesülnek az

$$a_1 > 1 \quad \text{és az} \quad a_{k+1} > a_k(a_k - 1) \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

egyenlőtlenségek.

Bizonyítás. Nyilván

$$\frac{1}{a_k} \leqq r_{k-1} < \frac{1}{a_k - 1}.$$

Ebből

$$r_k = r_{k-1} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_k(a_k - 1)} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

következik.

Másrészt

$$\frac{1}{a_{k+1}} \leqq r_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

amiből végül

$$a_{k+1} > a_k(a_k - 1) \qquad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

következik.

Az $a_1 > 1$ egyenlőtlenség nyilvánvaló.

Bizonyítjuk a következőt:

1. Tétel. Bármely $0 < r < 1$ racionális szám egyértelműen bontható fel véges számú törzstört összegére, azaz

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

úgy, hogy

$$a_1 > 1, \quad a_k > (a_{k-1} - 1)a_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n)$$

teljesül.

Bizonyítás. A kívánt felbontás létezése következik az 1. és a 2. lemmából. Az egyértelműséget indirekt úton bizonyítjuk. Legyen

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_m},$$

ahol

$$a_1 > 1 \quad \text{és} \quad a_k > (a_{k-1} - 1)a_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n),$$

$$b_1 > 1 \quad \text{és} \quad b_l > (b_{l-1} - 1)b_{l-1} \qquad (l = 2, 3, \dots, m).$$

Feltételezhetjük, hogy $a_1 < b_1$. Ekkor felhasználva a b_l-ek tulajdonságát, a következőket kapjuk:

$$r = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_{m-1}} + \frac{1}{b_m} < \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_{m-1}} + \frac{1}{b_m} + \frac{1}{b_m(b_m - 1)} =$$

$$= \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_{m-1}} + \frac{1}{b_m - 1} \leqq \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_{m-2}} + \frac{1}{b_{m-1}} + \frac{1}{(b_{m-1} - 1)b_{m-1}} =$$

$$= \frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_{m-2}} + \frac{1}{b_{m-1} - 1} \leqq \dots \leqq \frac{1}{b_1 - 1} \leqq \frac{1}{a_1}.$$

Tehát kapjuk, hogy $r < \frac{1}{a_1} \leqq r$, ami ellentmondás.

2. Tétel. A $0 < r < 1$ racionális számhalmaz kölcsönösen egyértelműen leképezhető az összes olyan természetes számokból álló véges $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sorozatok M halmazára, amelyekre az

$$a_1 > 1 \quad \text{és} \quad a_k > (a_{k-1} - 1)a_{k-1} \qquad (k = 2, 3, \dots, n)$$

összefüggés teljesül.

Megjegyzés. Az ilyen tulajdonságú sorozatokat nevezzük „megengedett” sorozatoknak.

Bizonyítás. Tekintsük a racionális számoknak az 1. tételben szereplő egyértelmű felbontásukat, és rendeljük hozzá mindegyikhez a nevezőkben szereplő számok sorozatát. Nyilvánvalóan ez a hozzárendelés eleget tesz a tételben kívántaknak.

Megjegyzés. Az összes egynél nagyobb racionális számok halmaza ugyancsak leképezhető a „megengedett" sorozatok M halmazára. Ugyanis ha $r>1$, akkor $0<\frac{1}{r}<1$, és r-hez rendelve a reciprokához rendelte „megengedett" sorozatot szintén kölcsönösen egyértelmű, M-re történő leképezést kapunk. $r=1$-hez az (1) sorozatot rendelhetjük.

II. A következőkben a $0<r<1$ racionális számoknak egy $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ sorozatba való elrendezését adjuk meg az előző egyértelmű felbontás segítségével úgy, hogy minden ilyen racionális szám előfordul a sorozatban és mindegyik csak egyszer.

Előbb bizonyítunk néhány lemmát.

3. *Lemma. Legyen n egy természetes szám. Tekintsük azon m és d nemnegatív egész számokat, amelyekre*

$$(*)\qquad \begin{aligned} 1+2+\ldots+m < n &\leqq 1+2+\ldots+m+(m+1) \quad \text{és} \\ d &= n-(1+2+\ldots+m) \end{aligned}$$

teljesül. Ekkor $(*)$ *a természetes számok* N *halmaza és azon nemnegatív számokból álló párok* (m, d) *halmaza között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést állapít meg, amelyekre* $0<d\leqq m+1$.

Bizonyítás. Egy természetes számhoz nyilván egy m és d tartozik. Megfordítva, ha

$$(m_1, d_1)=(m_2, d_2) \quad \text{azaz} \quad m_1=m_2 \quad \text{és} \quad d_1=d_2,$$

akkor $(*)$-ból

$$n_1 = d_1+(1+2+\ldots+m_1) = d_2+(1+2+\ldots+m_2) = n_2$$

következik.

Ezenkívül

$$0<d=n-(1+2+\ldots+m)\leqq 1+2+\ldots+m+(m+1)-(1+2+\ldots+m)=m+1$$

teljesül. Legyen végül (m, d) olyan nemnegatív egész számokból álló számpár, amelyre

$$0<d\leqq m+1.$$

Ekkor az

$$n=(1+2+\ldots+m)+d$$

számhoz $(*)$ az adott m és d számokat rendeli. Pl. $1\to(0,1)$, $2\to(1,1)$, $3\to(1,2)$, $4\to(2,1)$ stb.

Legyen n természetes szám és (m, d) a $(*)$ által hozzárendelt számpár. Ekkor értelmezzük a τ és σ leképezéseket a következőképpen:

Definíció.

$$\left.\begin{aligned} \tau(n) &= d \\ \sigma(n) &= m+2-d \end{aligned}\right\} \quad \text{ha } m \text{ páratlan}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau(n) &= m+2-d \\ \sigma(n) &= d \end{aligned}\right\} \quad \text{ha } m \text{ páros,}$$

azaz

$$\tau = \tau(n) = \frac{1+(-1)^{m+1}}{2}d + \frac{1+(-1)^m}{2}(m+2-d),$$

$$\sigma = \sigma(n) = \frac{1+(-1)^m}{2}d + \frac{1+(-1)^{m+1}}{2}(m+2-d).$$

Nyilvánvalóan

$$\tau(n)+\sigma(n) = m+2.$$

4. Lemma. Legyen n természetes szám. Rendeljük hozzá n-hez a (τ, σ) *párt. Ekkor a természetes számok N halmazának kölcsönösen egyértelmű leképezését kapjuk a természetes számokból álló* (τ, σ) *számpárok olyan halmazára, amelyre* $\tau+\sigma = m+2$ *teljesül.*

Bizonyítás. A hozzárendelés nyilvánvalóan egyértelmű. Legyen megfordítva

$$(\tau_1, \sigma_1) = (\tau_2, \sigma_2), \quad \text{azaz} \quad \tau_1 = \tau_2, \ \sigma_1 = \sigma_2.$$

Ekkor

$$m_1+2 = \tau_1+\sigma_1 = \tau_2+\sigma_2 = m_2+2, \quad \text{azaz} \quad m_1 = m_2.$$

Továbbá $\tau_1 = \tau_2$-ből

$$m_1+2-d_1 = m_2+2-d_2, \quad \text{vagy} \quad d_1 = d_2$$

következik. Figyelembe véve $m_1 = m_2$-t, mindkét esetben kapjuk, hogy $d_1 = d_2$. Ebből $n_1 = n_2$ következik.

Legyen $\tau+\sigma$ páros. Ekkor m páros, azaz $\sigma = d$.

A $0 < d \leq m+1$ egyenlőtlenségből $0 < \sigma \leq \tau+\sigma-1$, azaz $1 \leq \tau$ következik. Tehát $1 \leq \sigma, \tau$. Ugyanezt kapjuk, ha $\tau+\sigma$ páratlan.

Végül legyen (τ, σ) egy természetes számpár. Ekkor az

$$m = \tau+\sigma-2,$$

$$d = \begin{cases} \sigma, & \text{ha } \tau+\sigma \text{ páros} \\ \tau, & \text{ha } \tau+\sigma \text{ páratlan} \end{cases}$$

pár által meghatározott n számhoz éppen (τ, σ)-t rendeli a τ és σ leképzés.

Legyen $0 < r < 1$ racionális szám és

$$r = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_l}$$

a „megengedett" előállítása. Ekkor vezessük be a következő jelölést:

$$\varrho(r) = a_l.$$

Definíció. Legyen r 0 és 1 közötti racionális szám, n pedig természetes szám Ekkor legyen

$$s^*(r, n) = r + \frac{1}{n+\varrho(r)[\varrho(r)-1]}.$$

Az utóbbi definícióból következik, hogy ha r „megengedett" előállítása

$$r=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_l},$$

akkor az s^* racionális számé

$$s^*=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_l}+\frac{1}{n+(a_l-1)a_l}$$

Nyilvánvalóan s^* legalább kéttagú (a „megengedett" előállításában legalább két törzstört szerepel).

5. Lemma. Egy legalább kéttagú s^* racionális számhoz kölcsönösen egyértelműen tartozik egy racionális számból és egy természetes számból álló (r, n) számpár úgy, hogy

$$s^*(r, n)=s^*.$$

Bizonyítás. Legyen s^* legalább kéttagú, azaz „megengedett" előállítása legyen

$$s^*=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_l}\quad(l\geq 2).$$

Ekkor az

$$r=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{l-1}},\qquad n=\varrho(s^*)-\varrho(r)[\varrho(r)-1]$$

számpárra teljesül, hogy

$$s^*(r, n)=s^*.$$

Könnyen belátható, hogy ha $(r_1, n_1)\neq(r_2, n_2)$, akkor $s_1^*\neq s_2^*$, és fordítva.

Definiáljuk sorozatok sorozatát rekurzióval a következőképpen:

Definíció.

$$a_n^{(1)}=\frac{1}{n+1}\qquad(n=1,2, \ldots),$$

$$a_n^{(k)}=s^*(a_{\tau(n)}^{(k-1)}, \sigma(n))\qquad(k=2, 3, \ldots).$$

3. Tétel. Az

$$r_n=a_{\sigma(n)}^{(\tau(n))}\qquad(n=1, 2, \ldots)$$

az összes $0<r<1$ racionális számnak egy ismétlődés nélküli sorozatba rendezése.

Bizonyítás. Nyilvánvalóan $0<r_n<1$ (teljes indukcióval igazolható). Az r_n n által egyértelműen meghatározott és $r_n\neq r_m$, ha $n\neq m$. Végül legyen $0<r<1$ és

$$r=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_l}$$

a „megengedett" előállítása.

Ha $l=1$, akkor

$$r = a^{(1)}_{a_1-1} = r_n ,$$

ahol n a_1-ből meghatározható.

Megjegyzés.

$$n = \frac{a_1^2 - 3a_1 + 4}{2}, \quad \text{ha } a_1 \text{ páratlan,}$$

$$n = \frac{a_1^2 - a_1}{2}, \quad \text{ha } a_1 \text{ páros.}$$

Ha $l > 1$, akkor feltételezve, hogy

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_{l-1}} = a_k^{(l-1)}$$

$$r = a_n^{(l)},$$

ahol a

$$\sigma(n) = a_l - a_{l-1}(a_{l-1} - 1), \qquad \tau(n) = k, \qquad \sigma(t) = n,\ \tau(t) = l$$

összefüggésekből t meghatározható, s így $r = r_t$.

Az eddig elmondottakat példán illusztrálva, határozzuk meg

1. r_{64}-t;

2. $r_n = \frac{9}{14}$-ből n-et.

Ad 1.

$$r_{64} = a^{(\tau(64))}_{\sigma(64)}$$

Az $1+2+\ldots+10 < 64 \leqq 1+2+\ldots+11$ egyenlőtlenségből $m=10$ és $d = 64 - 55 = 9$ és mivel m páros $\sigma = d = 9$, $\tau = m + 2 - d = 3$ következik.

Tehát

$$r_{64} = a_9^{(3)} = s^*(a^{(2)}_{\tau(9)}, \sigma(9)).$$

A $\tau(9) = 3$, $\sigma(9) = 2$ felhasználásával

$$r_{64} = s^*(a_3^{(2)}, 2).$$

De

$$a_3^{(2)}=s^*(a_{\tau(3)}^{(1)},\sigma(3))=s^*(a_2^{(1)},\ 1) \text{ és } a_2^{(1)}=\frac{1}{3}\,.$$

Megfelelő helyettesítéssel

$$a_3^{(2)}=s^*(\frac{1}{3},1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{1+3\cdot 2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\ ,$$

ezért

$$r_{64}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{2+7\cdot 6}=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{44}=\frac{461}{924}.$$

Ad 2.

$$\frac{9}{14}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4+2\cdot 1}=s^*(\frac{1}{2},4).$$

$\frac{1}{2}=a_1^{(1)}$ miatt $\frac{9}{14}=s^*(a_1^{(1)},4)$. Tehát $\tau(n')=1$ és $\sigma(n')=4$.

Ebből $m'=3$, $d'=1$. Azaz $n'=1+2+3+1=7$. És így

$$r_n=\frac{9}{14}=a_7^{(2)}\ .$$

A $\tau(n)=2$, $\sigma(n)=7$ értékekből $m=7$, $d=2$ ill. $n=1+2+\ldots+7+2=30$ következik. Tehát

$$r_{30}=\frac{9}{14}\,.$$

IRODALOM

[1] SIERPINSKI, W. : Cardinal and Ordinal Numbers, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe Warszawa, 1958., 36.
[2] WUSSING, H.: Mathematik in der Antike, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1962., 22.

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ СЧЁТНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

А. Седеркени

В этой работе при помощи рекурсии автор даёт эффективно последовательность, члены которой являются рациональными числами 0 и 1, и каждое из них только один раз встречается в последовательности.

Подобно этому можно ставить в последовттельность все рациональные числа. Это основано на том факте, что каждое r рациональные число между 0 и 1 можно разложить однозначно как сумму многих разных конечных дробей, имеющих одинаковые числители 1, сбывается

$$r=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

где $a_1 > 1$ и $a_{k+1} > a_k(a_k-1)$ $(k=1,\ldots, n-1)$

Пользуясь этим однозначным разложением автор конструирует последовательность при помощи диагонального процесса Кантора.

ÜBER DIE EFFEKTIVE ABZÄHLBARKEIT VON RATIONALEN ZAHLEN

Von

A. Szederkényi

In dieser Arbeit wird eine Folge $\{r_n\}$ mit einer Rekursionsformel angegeben, wobei r_n rationale Zahl mit $0<r_n<1$ ist und jede solche Zahl in der Folge genau einmal vorkommt. Alle rationalen Zahlen können auf ähnliche Weise in eine Folge geordnet werden. Der Grund dieser Tatsache liegt darin, dass jede rationale Zahl r $(0<r<1)$ sich in der Gestalt

$$r=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Summanden) darstellen lässt, wobei $a_1>1$ und $a_{k+1}>a_k(a_k-1)$ $(k=1,\ldots, n-1)$ erfüllt sind. Die Folge $\{r_n\}$ wird mit Anwendung diese eindeutigen Darstellung und mit Hilfe des Cantorschen Diagonalverfahrens konstruiert.