PÁRONKÉNT KITÉRŐ NÉGY EGYENES PARALELOGRAMMA METSZETE

Írta: MISKOLCZI JÓZSEF

Ismert az a tény, hogy az egy pontra illeszkedő a, b, c, d nem komplanáris sugárnégyes mindig metszhető paralelogrammában [2].

Vizsgáljuk meg a problémát általánosabban. Legyen a négy egyenes páronként kitérő. Ha van olyan A, B, C, D pontnégyes, hogy $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$ és az $ABCD$ négyszög paralelogramma, akkor azt mondjuk, hogy az a, b, c, d páronként kitérő egyenesek metszhetők paralelogrammában.

A következőkben szükséges és elégséges feltételét adjuk annak, hogy páronként kitérő négy egyenes metszhető legyen paralelogrammában; megmutatjuk továbbá, hogy a metszetek száma általában végtelen; végül belátjuk, ha bármely két kitérő egyeneshez tartozó normáltranszverzális nem egyező állású a másik két kitérő egyeneshez tartozó normáltranszverzálissal, akkor a paralelogramma metszetek halmaza három osztályba sorolható, és a minimális kerületű paralelogramma megszerkeszthető.

Jelölje n a normáltranszverzális egyenest, $\bar{n}$ pedig a normáltranszverzális szakaszt (illetve annak hosszát). Bebizonyítjuk a következő állítást:

A) Két kitérő egyeneshez végtelen sok adott $\bar{t}(>\bar{n})$ hosszúságú transzverzális-szakasz tartozik. Ezen szakaszok végpontjainak halmazát az $\underline{a}$ egyenesen az $A_1A = AA_2$, a $\underline{b}$ egyenesen a $B_1B = BB_2$ szakaszok pontjai alkotják, ahol

$$A = (n \cap a), \quad B = (n \cap b), \text{ és } A_1A_2 = B_1B_2 = \frac{2\sqrt{\bar{t}^2 - \bar{n}^2}}{\sin \varphi} \quad (\varphi = a,b\sphericalangle).$$

Bizonyítás. Jelölje a két kitérő egyenest $\underline{a}$ és $\underline{b}$. Vegyük azt az α és β síkot, melyekre $\alpha \ni a$, $\beta \ni b$ és $\alpha \| \beta$. Majd tekintsük azt a Φ egyenes körkúpot, melynek alkotója $\bar{t}$ hosszúságú, csúcsa illeszkedik az egyik síkra, alapköre pedig a másik síkra. E kúp alkotója eltolható párhuzamosan úgy, hogy az az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ kitérő egyenesek transzverzálisa legyen.

Legyen AB $(A \in \alpha,\ B \in \beta)$ a Φ kúp egy tetszőleges alkotója. Az eltolás kivitelezése a következőképpen is történhet:

1. $B' | B' \in b$,
2. $e | e \| AB$ és $e \ni B'$,
3. $b_1 | b_1 \| b$ és $b_1 \ni (e \cap \alpha)$,
4. $A'' | A'' = (b_1 \cap a)$,
5. $A''B'' | A''B'' \| e$ és $B'' \in b$.

Így $A''B''$ éppen a $\bar{t}$ hosszúságú transzverzális.

Megjegyzés. Természetesen egyetlen eltolással is elérhető, hogy az AB szakasz az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ kitérő egyenesek transzverzálisa legyen.

Jelölje $\{A_j\}$ az $\underline{a}$ egyenes azon pontjainak halmazát, melyekhez tartozik adott $\bar{t}$ hosszúságú transzverzális. $\{A_j\}$-t a következőképpen határozhatjuk meg. Tekintsük a β síkot és azon az $\underline{a}$ egyenes $\underline{a}'$ merőleges vetületét. Legyen B_j^* a β síknak olyan pontja, amelyre $A_jB_j^*=\bar{t}$. Az $A_jB_j^*$ szakasz merőleges vetülete a β síkon $\bar{r}$ hosszúságú, ahol $\bar{r}$ az említett Φ kúp alapkörének sugara. Az $\underline{a}'$ egyenes azon pontjai keresendők, melyek legfeljebb $\bar{r}$ távolságra vannak a $\underline{b}$ egyenestől. Ezek a pontok az $\underline{a}'$ egyenes egy $A_1'A_2'$ szakaszát adják, amelyet az $\underline{a}$ egyenesre merőlegesen visszavetítve kapjuk az A_1A_2 szakaszt. Nyilván az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ egyenes szerepe felcserélhető. Végül, az elmondottakból *A*) állításban szereplő képlet közvetlenül nyerhető.

Könnyen belátható a következő állítás:

B) Ha négy, páronként kitérő egyenes közül valamelyik kettőhöz tartozó normáltranszverzális párhuzamos a másik kettőhöz tartozó normáltranszverzálissal, akkor bármely kettőhöz tartozó normáltranszverzális párhuzamos a másik kettőhöz tartozó normáltranszverzálissal.

Bebizonyítjuk a következő tételt:

1. *tétel.* Az a, b, c, d páronként kitérő egyenesek akkor és csak akkor metszhetők paralelogrammában, ha vagy

a) valamelyik kettőhöz tartozó normáltranszverzális nem egyező állású a másik kettőhöz tartozó normáltranszverzálissal, vagy

b) valamelyik kettőhöz tartozó normáltranszverzális-szakasz egyező állású és egyenlő hosszú a másik kettőhöz tartozó normáltranszverzális szakasszal.

Bizonyítás. A feltétel szükséges. Tegyük fel, hogy van paralelogramma metszet, s legyen ennek két szemköztes oldala $\bar{t}_{ab}$, illetve $\bar{t}_{cd}$. Már az A) állításnál láttuk, hogy a $\bar{t}_{ab}$-hez tartozik egy derékszögű háromszög, melynek átfogója a $\bar{t}_{ab}$, két befogója pedig az $\bar{n}_{ab}$, illetve $\bar{r}_{ab}$ állásával és nagyságával egyezik meg. A szóban forgó derékszögű háromszöget a Φ kúp egyik alkotója, sugara és magasságvonala alkotja. Hasonlóan a $\bar{t}_{cd}$-hez is tartozik egy derékszögű háromszög. Két eset lehetséges: vagy n_{ab} egyező állása n_{cd}-vel, vagy n_{ab} nem egyező állása n_{cd}-vel. Az első esetben a $\bar{t}_{ab}$-hez és a $\bar{t}_{cd}$-hez tartozó derékszögű háromszögek nyilvánvalóan egybevágóak. Ez pedig azt jelenti, hogy az $\bar{n}_{ab}$ egyező állású és egyenlő hosszú az $\bar{n}_{cd}$-vel. Ekkor tehát teljesül a tétel b) feltétele. A második eset pedig az a) feltétellel azonos.

A feltétel elégséges. a) Legyenek α, β, γ, δ olyan síkok, melyekre

$$\alpha \ni a, \quad \beta \ni b \text{ és } \alpha \parallel \beta$$

$$\gamma \ni c, \quad \delta \ni d \text{ és } \gamma \parallel \delta.$$

Jelölje α, γ síkok metszésvonalát $m_{\alpha\gamma}$, ennek egy tetszőleges pontját P, a β, δ síkok metszésvonalát $m_{\beta\delta}$, ennek egy tetszőleges pontját Q. (Az $m_{\alpha\gamma}$, $m_{\beta\delta}$ metszésvonalak létezését az első feltétel biztosítja.) Az A) állítás bizonyításánál láttuk, hogy a PQ szakasz ($P\in\alpha$, $Q\in\beta$) eltolható úgy, hogy a P végpontja az $\underline{a}$ egyenesre, Q végpontja pedig a $\underline{b}$ egyenesre kerüljön. De a PQ szakasz — mivel $P\in\gamma$, $Q\in\delta$ — ugyancsak eltolható úgy is, hogy a $P\in c$ és $Q\in d$ fennálljon. A $P'Q'P''Q''$ négyszög paralelogramma. (Az eltolt PQ szakasz $\underline{a}$, $\underline{b}$, illetve $\underline{c}$, $\underline{d}$-re illeszkedő végpontjait jelöli a P', Q', illetve a P'', Q''.)

b) Ha a tétel második feltétele teljesül, akkor a paralelogramma metszet létezése nyilvánvaló.

A most bebizonyított tétel alapján mondhatjuk, hogy négy páronként kitérő egyenes általában metszhető paralelogrammában, hiszen paralelogramma metszet akkor és csak akkor nem létezik, ha a normáltranszverzális szakaszok egyező állásúak és különböző hosszúak.

2. *tétel.* Ha az $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$ négy olyan páronként kitérő egyenes, hogy bármely kettőhöz tartozó normáltranszverzális nem egyező állású a másik kettőhöz tartozó normáltranszverzálissal, akkor

a) végtelen sok paralelogramma metszet van,

b) a paralelogramma metszetek halmaza három osztályba sorolható — és

c) az egy osztályba sorolt paralelogramma metszetek között meghatározható a minimális kerületű.

Bizonyítás. a) Ha figyelembe vesszük, hogy az előző tétel bizonyításánál $P \in m_{\alpha\gamma}$, $Q \in m_{\beta\delta}$, de egyébként P is Q is tetszőleges pontok, akkor ebből már következik állításunk helyessége.

b) A PQ szakaszok eltolásával létrejött paralelogramma metszethalmazra jellemző, hogy minden elemének van egy olyan oldala, mely párhuzamos a $\pi = (m_{\alpha\gamma} \| m_{\beta\delta})$ síkkal. Jelölje H_π a leképezés során létrejött paralelogrammák halmazából a különböző paralelogrammák halmazát.

Ha $m_{\alpha\delta}$ és $m_{\beta\gamma}$ metszésvonalakat tekintjük, és a H_π halmaz létrehozásánál alkalmazott gondolatmenetet követjük, akkor egy újabb paralelogramma metszet halmazhoz jutunk, mely halmaz minden elemére jellemző, hogy van olyan oldala, mely párhuzamos a $\bar{\varrho} = (m_{\alpha\delta} \| m_{\beta\gamma})$ síkkal. Az utóbbi leképezés során létrejött paralelogrammák halmazából a különböző paralelogrammák halmazát jelöljük $H_{\bar{\varrho}}$-val.

A H_π minden elemének és csak azokhoz nyilván eljuthatunk úgy is, hogy például $m_{\beta\delta}$ egyenesen rögzítünk egy Q pontot, az $m_{\alpha\gamma}$ egyenesen pedig végigfuttatjuk a P_i pontot, majd az így kapott QP_i szakaszokat rendre eltoljuk az $\underline{a}$, $\underline{b}$, illetve a $\underline{c}$, $\underline{d}$ kitérő egyenesekre.

Hasonlóan generálható a $H_{\bar{\varrho}}$ paralelogramma halmaz is. Indirekt módon könnyen belátható, hogy az összes olyan paralelogramma metszetből alkotott halmaz, melyben két szemköztes oldal az $\underline{a}$, $\underline{b}$, illetve a $\underline{c}$, $\underline{d}$ kitérő egyeneseken nyugszik, és a $H_\pi \cup H_{\bar{\varrho}}$ halmaz egy-egyértelműen képezhető le egymásra.

Ezek után vegyük az $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ síkokat, melyekre teljesül, hogy

$$\alpha_1 \ni a,\ \gamma_1 \ni c \text{ és } \alpha_1 \| \gamma_1$$

$$\beta_1 \ni b,\ \delta_1 \ni d \text{ és } \beta_1 \| \delta_1.$$

Az $\alpha_1 \cap \beta_1$; $\alpha_1 \cap \delta_1$; $\gamma_1 \cap \beta_1$; $\gamma_1 \cap \delta_1$ egyenesek egy négyoldalú prizmát feszítenek ki, jelöljük ezt Σ_1-val. A szemköztes élekhez tartozó síkok — a fentiekhez hasonlóan — két paralelogramma halmazt generálnak. Megmutatható, hogy az egyik a H_π-vel azonos. (Azt a síkot, amely H_π-t generálja, jelölje $\bar{\pi}$.) A másik paralelogramma halmazt jelöljük H_σ-val, a generáló síkot pedig σ-val.

Végül tekintsük az $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ síkokat, melyekre:

$$\alpha_2 \ni a,\ \delta_2 \ni d \text{ és } \alpha_2 \| \delta_2$$

$$\beta_2 \ni b,\ \gamma_2 \ni c \text{ és } \beta_2 \| \gamma_2.$$

Az eddigiek alapján most már itt is könnyen belátható, hogy $\alpha_2 \cap \beta_2$; $\alpha_2 \cap \gamma_2$; $\delta_2 \cap \beta_2$; $\delta_2 \cap \gamma_2$ egyenesek olyan Σ_2 négyoldalú prizmát feszítenek ki, melynél az egyik szemköztes élpárhoz tartozó ϱ sík generálja a H_ϱ halmazt, mely a már ismert $H_{\bar{\varrho}}$ halmazzal azonos, míg a másik élpár meghatározta $\bar{\sigma}$ sík pedig a $H_{\bar{\varrho}}$ paralelogramma halmazt, mely a H_σ halmazzal azonos.

Így a paralelogramma metszetek származtatási módjának bemutatásával megmutattuk, hogy — a tételbeli feltétel mellett — a paralelogramma metszetek halmaza három osztályba sorolható: H_π-be, H_ϱ-ba, és H_σ-ba. Ugyanazon H_π-osztályhoz jutunk, ha akár π, akár $\bar{\pi}$ sík segítségével osztályozunk. Hasonló mondható a H_ϱ és a H_σ osztályokba való sorolásról.

c) A H_π halmaznak vegyük két tetszőleges elemét $p_{\pi 1}$-et és $p_{\pi 2}$-t, majd a π síkban ezen elemeknek megfelelő Q_π tartójú szakaszokat: $P_{\pi 1}Q_\pi$; $P_{\pi 2}Q_\pi$-t. E szakaszokat tartó egyeneseket jelölje rendre e_1, e_2. Hasonlóan vegyük a $\bar{\pi}$ síkban is a $Q_{\bar{\pi}}$ tartójú $P_{\bar{\pi}1}Q_{\bar{\pi}}$, $P_{\bar{\pi}2}Q_{\bar{\pi}}$ szakaszokat, illetve ezeket tartó $\bar{e}_1$ és $\bar{e}_2$ egyeneseket. (A $Q_{\bar{\pi}}$ pont a Σ_1 prizma $\bar{\pi}$ síkot meghatározó szemköztes élei egyikére illeszkedik, jelöljük ezt $m_{\bar{\pi}\gamma 1}$-gyel. A $P_{\bar{\pi}1}$, $P_{\bar{\pi}2}$ pontok pedig a másik élre esnek. Jelöljük ezen utóbbi élt $m_{\bar{\pi}\alpha 1}$-gyel.)

Ezek után tekintsük azt a $P_{\pi 1}\to P_{\bar{\pi}1}$, $P_{\pi 2}\to P_{\bar{\pi}2}$, $Q_\pi\to Q_{\bar{\pi}}$ kikötésekkel meghatározott Ψ affinitást, mely a π síkot a $\bar{\pi}$ síkba viszi át. A $P_{\pi i}$ és $P_{\bar{\pi}i}$ legyen két tetszőleges megfelelő pontpár.

Bebizonyítjuk, hogy a $P_{\pi i}Q_\pi$ és a $P_{\bar{\pi}i}Q_{\bar{\pi}}$ szakasz ugyanazon $p_{\pi i}$ paralelogrammához tartozik.

Toljuk el ugyanis a $P_{\pi 1}Q_\pi$, $P_{\pi 2}Q_\pi$, $P_{\pi i}Q_\pi$ szakaszokat rendre az $\underline{a}$, $\underline{b}$, illetve a $\underline{c}$, $\underline{d}$ kitérő egyenesekre úgy, hogy a $P_{\pi 1}$, $P_{\pi 2}$, $P_{\pi i}$ végpontok az α, illetve γ síkban mozogjanak. A pálya ilyen speciális megválasztása a szakaszok végső helyzetét nem befolyásolja, így közvetlenül leolvashatjuk:

$$
(1)\qquad \begin{aligned}(P_{\pi 1}P_{\pi 2}P_{\pi i}) &= (P'_{\pi 1}P'_{\pi 2}P'_{\pi i})\\ (P_{\pi 1}P_{\pi 2}P_{\pi i}) &= (P''_{\pi 1}P''_{\pi 2}P''_{\pi i})\end{aligned}
$$

ahonnan

$$
(P'_{\pi 1}P'_{\pi 2}P'_{\pi i}) = (P''_{\pi 1}P''_{\pi 2}P''_{\pi i})
$$

A következő lépésben az eltolt szakaszok által meghatározott p_1, p_2, p_i paralelogrammák $P'_{\pi 1}P''_{\pi 1}$, $P'_{\pi 2}P''_{\pi 2}$, $P'_{\pi i}P''_{\pi i}$ oldalainak vegyük a $\bar{\pi}$ síkon levő megfelelőit, a $P_{\bar{\pi}1}Q_{\bar{\pi}}$, $P_{\bar{\pi}2}Q_{\bar{\pi}}$, $P^*_{\bar{\pi}i}Q_{\bar{\pi}}$ szakaszokat. Az előzőhöz hasonló gondolatmenetet követve (csak most a végpontok $\bar{\pi}$ síkra való toláskor az α_1, illetve γ_1 síkban mozognak) igaz, hogy a $(P'_{\pi 1}P'_{\pi 2}P'_{\pi i}) = (P_{\bar{\pi}1}P_{\bar{\pi}2}P^*_{\bar{\pi}i})$.

Figyelembe véve az (1) alatti és a Ψ affinitás miatt fennálló $(P_{\pi 1}P_{\pi 2}P_{\pi i}) = (P_{\bar{\pi}1}P_{\bar{\pi}2}P_{\bar{\pi}i})$ egyenlőségeket, következik, hogy $P^*_{\bar{\pi}i}\equiv P_{\bar{\pi}i}$.

Megjegyzés. Tekinthettük volna a p_1, p_2, p_i paralelogrammáknak a $\underline{b}$, $\underline{d}$ egyenesekre támaszkodó oldalait, akkor is ugyanazon eredményhez jutottunk volna.

Így a Ψ affinitással egymáshoz rendelt $P_{\pi i}$, $P_{\bar{\pi}i}$ megfelelő pontpárok a Q_π, illetve $Q_{\bar{\pi}}$ pontokkal alkotott $P_{\pi i}Q_\pi$ és $P_{\bar{\pi}i}Q_{\bar{\pi}}$ szakaszok ugyanazon $p_{\pi i}$ paralelogrammákhoz tartoznak.

A π síkon $Q_\pi(e_1, e_2, e_3, \ldots)$ sugársort az $\alpha\cap\gamma = m_{\pi\alpha}$ $(= m_{\alpha\gamma})$ egyenes a $P_{\pi 1}$, $P_{\pi 2}$, $P_{\pi 3}$, ... pontsorban metszi. Ezen alakzatot a Ψ affinitás a $\bar{\pi}$ síkba, a $Q_{\bar{\pi}}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \ldots)$ képsugársorból az $m_{\bar{\pi}\alpha_1}$ képegyenes által kimetszett $P_{\bar{\pi}1}$, $P_{\bar{\pi}2}$, $P_{\bar{\pi}3}$, ... képpontsorba viszi át.

Tekintsük a két alakzat közül azt, amelyiknél a pontsor két tetszőleges elemének távolsága kisebb, mint a másik alakzat pontsorának megfelelő két elemének távolsága. Tegyük fel, hogy ez a $\bar{\pi}$ síkban levő alakzatnál teljesül. Ezek után szerkesszünk az $m_{\bar{\pi}\alpha_1}$ egyeneshez egy olyan $m'''_{\bar{\pi}\alpha_1}$ egyenest, hogy az $m_{\bar{\pi}\alpha_1}$ és $m'''_{\bar{\pi}\alpha_1}$ egyenesek pontsora $Q_{\bar{\pi}}$ pontra perspektív, a $P'''_{\bar{\pi}1}P'''_{\bar{\pi}2}$ szakasz hossza pedig a $P_{\pi 1}P_{\pi 2}$ szakasz hosszával egyenlő legyen. Majd az utóbb kapott alakzatot és a π síkban levőt mozgassuk el az alábbi követelményekkel:

A két alakzat kerüljön egy síkba;

A $P'''_{\bar{\pi}1}$ pont essék a $P_{\pi 1}$-re, a $P'''_{\bar{\pi}2}$ pedig a $P_{\pi 2}$-re;

Az elmozgatott $m_{\pi\alpha}$ és $m'''_{\bar{\pi}\alpha_1}$ egyenesek közös m képe válassza el a $Q_{\bar{\pi}}$ és Q_π-t. (Ugyanazon betűk jelöljék az elmozgatás után kapott alakzaton a képelemeket — az m kivételével — mint az elmozgatás előtt.)

A következőkben tekintsük az elmozgatás után létrejött új alakzatot. Erről leolvasható, hogy a H_π halmaz minimális kerületi paralelogrammáját a $Q_{\bar{\pi}}P_{\bar{\pi}0}$; $Q_\pi P_{\pi 0}$ szakaszok alkotják, ahol $P_{\pi 0}=(m \cap Q_{\bar{\pi}}Q_\pi)$; $P_{\bar{\pi}0}=(m_{\bar{\pi}\alpha 1} \cap Q_{\bar{\pi}}Q_\pi)$.

A H_ϱ és a H_σ halmazban hasonlóan adható meg a minimális kerületű paralelogramma.

IRODALOM

[1] HAJÓS GY: Bevezetés a Geometriába, Tankönyvkiadó, 1960.
[2] REIMAN I.: Elemi geometriai példatár, Tankönyvkiadó, 1963.

1. B'| B' ∈ b jelentése: B' pontot úgy vesszük fel, hogy B' illeszkedjék b-re.
2. Párhuzamos ill. egyező állású úgy értendő, mint [1]-ben.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЧЕТЫРЁХ ПОПАРНО УКЛОНЧИВЫХ ПРЯМЫХ, ЯВЛЯЮЩЕЕСЯ ПАРАЛЛЕЛОГРАММОМ

Й. Мишколци

Задается необходимое и достаточное условие для того, чтобы четыре попарно уклончивых прямых имели пересечение, являющееся параллелограммом. Если такое пересечение существует, то их число бесконечно много и из этих пересечений можно задавать пересечение с минимальным периметром.

ÜBER DIE PARALLELOGRAMMSCHNITTE VON VIER PAARWEISEN WINDSCHIEFEN GERADEN

Von

J. Miskolczi

In der vorliegenden Arbeit wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, dass vier paarweise windschiefe Geraden einen Parallelogrammschnitt haben sollen. Wenn solcher Parallelogrammschnitt existiert, dann gibt es undenlich viele. In diesem Fall kann die Parallelogramme mit dem minimalen Umfang angegeben sein.