A FÉLCSOPORTOK EGY ÚJ RADIKÁJÁRÓL

Írta: SZENDREI JÁNOS

1. Jelöljön S egy olyan multiplikatív félcsoportot, amelyiknek van K magja. Egy S félcsoport magján értjük az S összes ideáljainak a metszetét, amennyiben az létezik.

A félcsoportelméletben — a gyűrűelmélethez hasonlóan — a különböző radikálfogalmak a félcsoport valamilyen szempont szerinti irregularitásait tükrözik. Ilyen szerepe van a félcsoportokban bevezetett SCHWARZ-féle $R(S)$ nilpotens radikálnak, a CLIFFORD-féle $R^*(S)$ nil radikálnak, a MCCOY-féle $M(S)$ radikálnak, a komplett prim $C(S)$ radikálnak stb.

Az említett radikálok közötti kapcsolatokat maggal rendelkező félcsoport esetében JIANG LUH [2] dolgozata tárja fel. Általánosan érvényes a következő tartalmazási reláció:

$$R(S) \subseteqq M(S) \subseteqq R^*(S) \subseteqq C(S).$$

Ismert, hogy ha S kommutatív, akkor ezek a radikálfogalmak mind egybeesnek. JIANG LUH említett dolgozatában további feltételeket is ad, amelyeknél a fenti radikálfogalmak közül kettő egyenlő.

FUCHS László [1] alatti dolgozatában gyűrűk esetén egy új radikálfogalmat vezet be, amit zéroid radikálnak nevez. Jelölje egy tetszőleges A gyűrű esetén $R(A)$ a nilpotens radikált, $R(A)$ a nil radikált, $M(A)$ a MCCOY-féle radikált és $Z(A)$ a FUCHS-féle zéroid radikált, akkor igaz a következő tartalmazási reláció:

$$R(A) \subseteqq M(A) \subseteqq R^*(A) \subseteqq Z(A).$$

A jelen dolgozatban maggal rendelkező félcsoportok esetén értelmezzük a gyűrűelméletben bevezetett FUCHS-féle radikál analogonját s erre vonatkozóan bebizonyítunk néhány állítást.

2. A K maggal rendelkező S félcsoport z_b elemét *bal zérusosztó*nak nevezzük, ha van olyan $u(\notin K)$ eleme S-nek, amelyre $z_b u \in K$ teljesül. Hasonlóan értelmezzük a jobb zérusosztó fogalmát. Az S félcsoportnak egy elemét zérusosztónak nevezzük, ha az egyidejűleg bal és jobb zérusosztó is. Az S félcsoportnak az I ideálját *bal (jobb) zérusosztó ideálnak* mondjuk, ha I minden eleme bal (jobb) zérusosztó. Az S félcsoport összes bal (jobb) zérusosztó ideáljainak $Z_b(Z_j)$ egyesítése is bal (jobb) zérusosztó ideál.

Könnyen belátható a következő állítás:

$Z_b(Z_j)$ maximális bal (jobb) zérusosztó ideálja, s ebből következően prim ideálja S-nek.

Elegendő azt bizonyítani, hogy Z_b prim ideál, azaz ha valahányszor a C, D ideálokra $CD \subseteqq Z_b$ teljesül, akkor mindannyiszor $C \subseteqq Z_b$ vagy $D \subseteqq Z_b$ teljesül. Ez az állítás ekvivalens azzal, hogy ha $C \nsubseteq Z_b$ és $D \nsubseteq Z_b$, akkor $CD \nsubseteq Z_b$. Tegyük fel, hogy $CD \subseteqq Z_b$. Ekkor van olyan $c \in C$ és $d \in D$ elem, amelyek nem bal zérusosztók, de cd bal zérusosztó, azaz van olyan $u(\notin K)$ elem, hogy $cdu \in K$. Ha $du \in K$, akkor $d \in Z_b$, ha pedig $du \notin K$, akkor $c \in Z_b$, ami mindkét esetben ellentmondást jelent. Ezért igaz az állítás.

Definíció. *Maggal rendelkező S félcsoport z-radikálján értjük a $Z(S) = Z_b \cap Z_j$ metszetet.*

A fenti állításból következik, hogy a z-radikál prim ideálok metszete.

A z-radikálnak a többi radikállal való kapcsolatára mutat rá a következő állítás:

1. *tétel.* Érvényes a következő tartalmazási viszony:

$$R(S) \subseteqq M(S) \subseteqq R^*(S) \subseteqq Z(S).$$

Bizonyítás. Az első két tartalmazási reláció JIANG LUH [2] dolgozatából ismert, itt azonban egy másik bizonyítást adunk. Amint ismert, a MCOY-féle $M(S)$ radikál a K magot tartalmazó összes prim ideálok metszete. Ha N egy nilpotens ideál, azaz ha $N^n \subseteqq K$ teljesül valamilyen n természetes számra, akkor a K-t tartalmazó mindegyik prim ideálra $N^n \subseteqq P$ teljesül. Innen $N \subseteqq P$ adódik, amiből az $R(S) \subseteqq M(S)$ következik. A második tartalmazási reláció a következőképpen látható be. Legyen $s(\notin K)$ olyan elem, amelyiknek egyik hatványa sincs K-ban. Könnyen igazolható, hogy egy olyan Q maximális ideál, amely s egyetlen hatványát sem tartalmazza, prim ideál. Egy ilyen ideált valódi módon tartalmazó Q^* ideál már tartalmazza s-nek valamely hatványát, azaz Q^* tartalmaz nem nilpotens elemet. A Q-t valódi módon tartalmazó két ideálnak a szorzata sem lehet benne Q-ban, tehát Q^* nem prim ideál. A K-t tartalmazó prim ideálok metszete tehát csak nilpotens elemeket tartalmaz, ennélfogva $M(S) \subseteqq R^*(S)$. Végül az $R(S) \subseteqq Z(S)$ tartalmazási reláció abból adódik, hogy minden nilpotens elem bal és jobb zérusosztó, hiszen ha $n(\geqq 2)$ az a legkisebb természetes szám, melyre $a^n \in K$, akkor $a \cdot a^{n-1} = a^{n-1} \cdot a \in K$ és $a^{n-1} \notin K$, tehát $a \in Z(S)$. (Az $n=1$ esetén triviális az állítás.) Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A z-radikálnak a $C(S)$ komplett prim radikállal való kapcsolata nyitott kérdés.

A radikálokkal szemben általában azt a követelményt is szokás támasztani, hogy a szerintük képezett faktorfélcsoport radikálja a zérus legyen. JIANG LUH [2] dolgozatából ismert, hogy ez a követelmény a MCCOY-féle $M(S)$ és a $C(S)$ komplett prim radikálra teljesül, de a SCHWARZ-féle $R(S)$ és a CLIFFORD-féle $R^*(S)$ radikálra nem.

A z-radikálra is csak a következő állítást tudjuk bebizonyítani:

2. *tétel.* A z-radikál szerinti faktorfélcsoport CLIFFORD-féle radikálja zérus, azaz $R^*(S/Z(S)) = \bar{0}$.

Bizonyítás. Legyen R^* az $S/Z(S)$ CLIFFORD-féle radikálja, azaz az $S/Z(S)$ összes nil ideáljainak az egyesítése. R^*-nak minden eleme nilpotens, azaz minden egyes $c(\in R^*)$ elemhez van olyan legkisebb természetes $n = n(c)$ szám, amelyre $c^n = \bar{0}$ Innen $c^n = c \cdot c^{n-1} = c^{n-1} \cdot c = \bar{0}$ alapján adódik, hogy $c^n \in Z(S)$, de $c^{n-1} \notin Z(S)$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $u(\in K)$ elem, amelyre $c^n u = c \cdot c^{n-1} u \in K$. Itt $c^{n-1} u \notin K$, azért $c \in Z(S)$, tehát $S/Z(S)$ CLIFFORD-féle radikáljának minden eleme benne van $Z(S)$-ben. Ezért igaz a tétel.

3. A bal zérusosztó fogalmat általánosíthatjuk úgy, hogy K helyett az S tetszőleges I ideálját vesszük, s ebben az esetben az I-re vonatkozó bal zérusosztóról beszélhetünk.

G. THIERRIN [4] nyomán tetszőleges S félcsoportnak egy B ideálját *reflektívnek* nevezzük, ha $xy \in B(x \in S, y \in S)$ fennállásából $yx \in B$ következik.

Érvényes a következő állítás, amely részben szerepel JIANG LUH [3] dolgozatában.

3. *tétel.* Ha az S félcsoport B ideálja reflektív, akkor a B-re vonatkozó bal zérusosztók jobb zérusosztók, tehát zérusosztók, és a B-re vonatkozó zérusosztók halmaza komplett prim ideált alkot.

Bizonyítás. Legyen $z \in B$-re vonatkozó bal zérusosztó, azaz létezik olyan $u \notin B$ elem, amelyre $zu \in B$. Mivel B reflektív, azért $uz \in B$, tehát z jobb zérusosztó is, ennélfogva minden bal (jobb) zérusosztó zérusosztó. Legyen Z a B-re vonatkozó összes zérusosztók halmaza. Könnyen belátható, hogy Z félcsoport. Legyen $z \in Z$, ekkor van olyan $u(\notin B)$ elem, amelyre $zu, uz \in B$, ezért tetszőleges $s(\in S)$ elem esetén a zs és az sz elemhez is található olyan elem, mégpedig $u(\notin B)$, amelyre $u(zs)=(uz)s \in B$, ezért $(zs)u \in B$, és hasonlóan $(sz)u=s(zu) \in B$, ezért $u(sz) \in B$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy $SZ \subseteq Z$, $ZS \subseteq Z$, tehát Z ideálja S-nek. Tegyük fel most, hogy $ab \in Z$, azaz van olyan $u(\notin B)$, amelyre $abu \in B$. Innen, ha $bu \notin B$, akkor $a \in Z$, ha pedig $bu \in B$, akkor $b \in Z$ következik, ami azt jelenti, hogy Z komplett prim ideál.

Következmény. A reflektív maggal rendelkező S félcsoport zérusosztóinak halmaza komplett prim ideált alkot s ez éppen az S félcsoport z-radikálja.

Reflektív mag esetén igaz a 3. tétel élesítése:

4. *tétel.* Ha az S félcsoport K magja reflektív, akkor $Z(S/Z(S))=\bar{0}$.

Bizonyítás. Legyen $z \in Z(S/Z(S))$, azaz van olyan $u \neq \bar{0}$, $v \neq \bar{0}$ elem, amelyre $zu, vz=\bar{0}$, azaz $zu, vz \in Z(S)$, ahol $u, v \notin Z(S)$. Innen $z \in Z(S)$ következik. Ennélfogva igaz a tétel.

IRODALOM

[1] FUCHS L.: On a new type of radical, Acta Sci. Math. 26 (1955), 43—53.

[2] JIANG LUH: On the concepts of radical of semigroup having kernel, Portugaliae Math. 19 (1960), 188—198.

[3] JIANG LUH: On reflective ideals of a ring and of a semigroup, Portugaliae Math. 20 (1961), 120—125.

[4] G. THIERRIN: Contribution a la theorie des anneaux et des demi-groupes, Commen. Math. Helv. 32 (1957), 93—112.

ОБ ОДНОМ НОВОМ РАДИКАЛЕ ПОЛУГРУПП

Я. Сендреи

Для произвольной полугруппы S с ядром ведётся новое понятие радикала Z(S), аналогичное зероид-радикала Фукса [1]. Для полугруппы S пусть R(S), M(S) и R*(S) обозначает соответственно радикалы Шварца, Мак Койа и Клифорда. Между прочим имеют место следующие утверждения: 1. $R(S) \subseteq M(S) \subseteq R^*(S) \subseteq Z(S)$. 2. $R(S/Z(S))=\bar{0}$. 3. Если ядро полугруппы S рефлективно (в смысле Тьеррена [4]), то $Z(S/Z(S))=\bar{0}$.

ÜBER EINEN NEUEN RADIKAL DER HALBGRUPPEN

Von
J. Szendrei

Es sei S eine Halbgruppe mit dem Kern K. Ein Element z wird ein Linksnullteiler genannt, wenn es $zv \in K$ mit $v \notin K$ gilt. Ein Ideal I von S heisst lz-Ideal, wenn jedes Element in I Linksnullteiler ist. Die Vereinigung von allen lz-Idealen ist ein maximales lz-Ideal Z_b in S. Ähnlicherweise kann Z_j für Rechstnullteiler eingeführt werden. Der z-Radikal Z(S) von S mit dem Kern K ist als $Z_b \cap Z_j$ definiert. Wenn R(S), M(S), R*(S) bezeichnen den Schwarzschen, McCoyschen bzw. Cliffordschen Radikal von S, dann gilt: $R(S) \subseteq M(S) \subseteq R^*(S) \subseteq Z(S)$. Es wird bewiesen, dass $R^*(S/Z(S)=\bar{0}$, und wenn K im Sinne von Thierrin reflektiv ist, dann $Z(S/Z(S))=\bar{0}$ gilt.