ASSZOCIATÍV FÉLGYŰRŰK BI-IDEÁLJAIRÓL

Írta: SZENDREI JÁNOS

1. A félcsoportok és az asszociatív gyűrűk elméletében az ideáloknak, illetve a bal (jobb) oldali ideáloknak több általánosítását vezették be. Egyik ilyen általánosítás a bi-ideál fogalma, amelyet félcsoportokra először R. A. GOOD és D. R. HUGHES [1] vezetett be, majd LAJOS Sándor általánosított és vizsgált több dolgozatában [3, 4, 5]. Legutóbb LAJOS Sándor és SZÁSZ Ferenc associatív gyűrűk bi-ideáljaival foglalkozott a [6] alatti dolgozatban.

Jelen közleményben részben a fenti vizsgálatokat általánosítjuk asszociatív félgyűrűkre (ezek a bizonyítások a gyűrűk esetéről közvetlenül átvihetők), részben új eredményeket állapítunk meg.

2. *Félgyűrű*nek nevezzük az S halmazt, ha S-ben értelmezve van egy összeadás és egy szorzás, amely szerint $S(+)$ zéruselemes félmodulus, $S(\cdot)$ félcsoport és a szorzás az összeadásra nézve disztributív.

A S félgyűrűnek egy $T\subseteqq S$ részhalmazát *részfélgyűrű*nek nevezzük, ha T az S-ben értelmezett műveletek szerint félgyűrű. Az S-nek egy $R\subseteqq S$ zéruselemes részfélmodulusát *jobb oldali ideál*nak nevezzük, ha

(1) $$RS\subseteqq R.$$

Az L bal oldali ideál fogalmát hasonlóan definiáljuk. A kétoldali ideál egyidejűleg bal és jobb oldali ideál.

Legyen I az S félgyűrűnek kétoldali ideálja. Az s_1, s_2 $(\in S)$ elemeket *erősen kongruens*nek mondjuk modulo I, s ezt így jelöljük

(2) $$s_1\equiv s_2(\text{mod } I),$$

ha létezik olyan $i_1, i_2(\in I)$, hogy

$$s_1+i_1 = s_2+i_2.$$

Az $s_1, s_2(\in S)$ elemeket *gyengén kongruens*nek nevezzük modulo I, s ezt így jelöljük

(3) $$s_1[\equiv]s_2\ (\text{mod } I),$$

ha létezik olyan $i_1, i_2(\in I)$, s $(\in S)$, hogy

$$s_1+i_1+s = s_2+i_2+s$$

teljesül.

Könnyen belátható, hogy a most definiált mindkét kongruencia algebrai értelemben kongruenciareláció, azaz az osztályműveletek egyértelműen elvégezhetők. A (2), ill. (3) kongruencia szerinti faktorfélgyűrűt jelölje S/I, ill. $S[\,/\,]I$. Az $S[\,/\,]I$ faktorfélgyűrű az összeadás szerint reguláris félmodulus, azaz az összeadásra érvényes az egyszerűsítési szabály.

Legyen $\bar{I}=\{x\in S;\ x\equiv 0(\text{mod } I)\}$ és $\grave{I}=\{x\in S; x[\equiv]0(\text{mod } I)\}$. Nyilvánvaló, hogy $\bar{I}$ és $\hat{I}$ kétoldali ideál S-ben. Az I ideált *gyengén zárt*nak, illetve *erősen zárt*nak nevezzük, ha $I=\bar{I}$, illetve $I=\hat{I}$.

A $Z(S)=\hat{\{0\}}$ ideált *zéroid*nak nevezzük az S-ben, s ez az S minimális erősen zárt ideálja. (A fenti fogalmakat [2] alapján vezettük be.)

Legyen X, Y az S félgyűrűnek két tetszőleges részhalmaza, XY szorzaton az $xy(x\in X, y\in Y)$ szorzatok halmazával generált félgyűrűt értjük. Az S félgyűrűnek egy B részfélgyűrűjét *bi-ideál*nak nevezzük, ha

(4) $$BSB\subseteqq B$$

teljesül.

STEINFELD Ottó vezette be a kvaziideál fogalmát [7], amely szintén fontos speciális esete a bi-ideál fogalmának. Egy S-beli Q zéruselemes részfélmodulust kvánziideálnak nevezünk, ha

(5) $$QS\cap SQ\subseteqq Q$$

teljesül.

3. A bevezetett fogalmakkal kapcsolatban a következő egyszerű összefüggéseket állapíthatjuk meg:

a) Minden egyoldali ideál bi-ideál az S-ben.

b) Az S-ben egy bal oldali és egy jobb oldali ideál metszete bi-ideál.

c) Az S két kváziideáljának szorzata bi-ideál.

d) Az S bi-ideáljainak metszete szintén bi-ideálja az S-nek.

e) Az S egy I ideáljának és egy B bi-ideáljának a metszete I-nek bi-ideálja.

f) Ha T az S-nek tetszőleges részhalmaza, B pedig bi-ideálja, akkor BT és TB bi-ideálja S-nek.

g) Ha B az S-nek bi-ideálja és C a B-nek olyan bi-ideálja, amelyre $C^2=C$ teljesül, akkor C az S-nek bi-ideálja.

h) Ha T az S-nek egy tetszőleges részhalmaza, akkor a T által generált $T_{(1,1)}$ bi-ideál a következő alakú:

$$T_{(1,1)} = NT+NT^2+TAT,$$

ahol N a természetes számok halmaza.

i) Jelölje $\bar{S}$ az S részfélgyűrűinek a halmazát, S^* pedig az S bi-ideáljainak a halmazát. A részhalmazok szorzása szerint $\bar{S}$ és S^* félcsoport, továbbá S^* ideálja S-nek

A fenti állítások bizonyítása közvetlenül belátható.

Félgyűrűkre is érvényes a következő tétel:

1. tétel. Az S félgyűrűnek egy B nem üres részhalmaza akkor és csak akkor bi-ideál, ha B bal oldali (jobb oldali) ideálja az S egy jobb oldali (bal oldali) ideáljának.

Bizonyítás. Legyen B az S-nek bi-ideálja, s legyen J a B által generált jobboldali ideálja S-nek, azaz $J=(B+BS)$. B a J-nek bal oldali ideál, ugyanis

$$JB=(B+BS)B\subseteqq B^2+BSB\subseteqq B.$$

Megfordítva, ha J egy jobb oldali ideálja S-nek és B bal oldali ideálja J-nek, akkor

$$BSB\subseteqq (JS)B\subseteqq B,$$

ami bizonyítandó volt.

Az S fégyűrűt Neumann-féle *reguláris*nak, röviden regulárisnak nevezzük, ha az S minden elemére megoldható az $sxs=s$ egyenlet.

2. tétel. Reguláris félgyűrűben a kváziideál és a bi-ideál fogalma egybeesik.

Bizonyítás. Azt mutatjuk meg, hogy reguláris félgyűrű bármely T részfélgyűrűjére $TST=TS\cap ST$. Egyrészt nyilvánvaló, hogy

$$TST\subseteq TS\cap ST.$$

Másrészt a regularitás miatt minden a $(\in TS\cap ST)$ elemre az $axa=a$ megoldható S-ben és $xa\in ST$, azért $a=axa\in TS.ST\subseteq TST$. Innen pedig a

$$TS\cap ST\subseteq TST$$

következik. A kétirányú tartalmazásból következik az állítás.

A most bizonyított tételből és a c) állításból következik, hogy reguláris félgyűrűkben a kváziideálok szorzata is kvaziideál.

A félcsoport- és gyűrűelméletben ismert tételnek általánosítása a következő tétel, amelynek bizonyítása részben eltér a [6]-ban adott bizonyítástól.

3. tétel. Egy S félgyűrű esetében a következő feltételek ekvivalensek:

(I) S reguláris.

(II) $L\cap R=RL$ teljesül az S minden L bal oldali és R jobb oldali ideáljára.

(III) Minden a, b $(\in S)$ elempárra

$$(a)_r\cap(b)_l=(a)_r(b)_l$$

teljesül, ahol $(a)_r$, ill. $(a)_l$ az a által generált jobb oldali, ill. bal oldali ideált jelöli.

(IV) Minden $a(\in S)$ elemre teljesül

$$(a)_r\cap(a)_l=(a)_r(a)_l.$$

(V) Minden $a(\in S)$ elemre teljesül

$$(a)_{(1,1)}=(a)_r(a)_l.$$

(VI) Minden $a\in(S)$ elemre igaz

$$(a)_{(1,1)}=aSa.$$

(VII) Az S minden B bi-ideáljára teljesül

$$BSB=B.$$

(VIII) Az S minden Q kvaziideáljára teljesül

$$QSQ=Q.$$

Bizonyítás. (I)-ből így következik (II): Az $L\cap S\supseteq RL$ nyilvánvaló. A regularitásból következik, hogy ha $a\in L\cap R$, akkor az $a=axa\in RL$, tehát $L\cap R\subseteq RL$. Ezzel az állítást beláttuk. (II)-ből (III), és ebből (IV) triviálisan következik. (IV)-ből a b) tulajdonság alapján következik (V), ugyanis az $(a)_r\cap(a)_l$ bi-ideál lévén, szükségképpen megegyezik $(a)_{(1,1)}$-gyel. (V)-ben az egyenlőség két oldalán álló kifejezésekre teljesül a következő:

$$aSa\subseteq(a)_{(1,1)},\qquad (a)_r(a)_l\subseteq aSa,$$

ahonnan (VI) következik. Tegyük fel most (VI) igaz voltát. Mivel $BSB\subseteq B$ minden B bi-ideálra teljesül, ezért elég azt megmutatni, hogy (VI)-ból $B\subseteq BSB$ következik. Legyen $a\in B$. (VI) miatt van olyan $s(\in S)$, hogy $a=asa$, ahonnan a BSB következik.

Ezzel (VII)-et igazoltuk. A 2. tétel alapján (VII)-ből következik (VIII). Az utóbbiból az (I)-et a következőképpen láthatjuk be. Mivel minden kváziideál egy bal és egy jobb oldali ideál metszete, azért mindegyik a ($\in S$) elem felírható

$$a = ka+sa = la+as'$$

alakban, ahol k, l alkalmas természetes számok, és s, s' alkalmas elemei az S-nek. Ezért (VIII) feltevése miatt

$$a = (la+as')s^*(ka+sa) \qquad (s^* \in S),$$

ahonnan minden $a(\in S)$ elemre az $a=axa$ egyenlet megoldhatósága következik. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

Végül bizonyítjuk a következő tételt:

4. tétel. Egy S félgyűrűnek akkor és csak akkor nincs valódi bi-ideálja, ha S vagy prímrendű zérusfélgyűrű (azaz bármely két elemének szorzata zérus), vagy prímrendű zéroidfélgyűrű, vagy fél-ferdetest.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S-nek nincs valódi bi-ideálja. Ekkor S-nek nincs valódi egyoldali ideálja. Legyen $\bar{R}(S)$ az S Jacobson-féle radikálja [2]. A feltevés miatt $\bar{R}(S)$ vagy maga az S, vagy 0. Ha $S=\bar{R}(S)$, azaz S radikálgyűrű, akkor most [2] szerint az S minden s elemére és minden t természetes számra $s^t \in Z(S)$. Aszerint, hogy az $S=\bar{R}(S)\supset Z(S)=0$, illetve $S=\bar{R}(S)=Z(S)$, az S vagy zérus félgyűrű vagy zéroid-félgyűrű, s mindkét esetben szükségképpen prímrendű. Ha pedig $\bar{R}(S)=$ $=0$, akkor [2] eredménye miatt $Z(S)=0$. Ekkor az $S[/]\{0\}$ faktor-félgyűrű beágyazható egy S^* gyűrűbe, amelynek Jacobson-féle radikálja 0, ezért a gyűrűelméletből következik, hogy S^* ferdetest. Innen pedig következik az állítás.

A feltétel elegendősége közvetlenül belátható. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük.

IRODALOM

[1] R. A. Good and D. R. Hughes, Associated groups for a semigroup, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 624—625.

[2] K. Lizuka, On the Jacobson radical of a semiring, Tohoku math. Journal., II. Ser. 11 (1959), 409—421.

[3] S. Lajos, A félcsoportok ideálelméletéhez, Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl., 11 (1961), 57—66.

[4] S. Lajos, On quasiideals for regular ring, Proc. Japan Acad., 38 (1962), 210—211.

[5] S. Lajos, On the bi-ideals in semigroups, Proc. Japan Acad., 45 (1969), 710—712.

[6] S. Lajos and F. Szász, Bi-ideals in associative rings, Proc. Japan Acad., 46 (1970), 117—118; továbbá a Közgazdaságtudományi Egyetem Kiadványa, DM 70—4 (1970).

[7] O. Steinfeld, On ideal-quotients and prime ideals, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 4 (1953), 289—298.

О БИ-ИДЕАЛАХ АССОЦИАТИВНЫХ ПОЛУКРУГОВ

Я. Сендреи

В данной работе мы обобщаем результаты [6] статьи на ассоциативные полукруги. Регулярные полукруги характеризуем, доказательства этого отчасти новые. В конце мы говорим о структуре полукругов, не имевших настоящих идеалов-би.

ON BI-IDEALS IN ASSOCIATIVE SEMIRINGS

J. Szendrei

In this note the results in [6] will be generalised for associative semirings, among others the regular semirinsg are characterised (this proof is however something new), finally the structure of semirings without proper bi-ideals is treated.