TRANSZLÁCIÓK A GYŰRŰKONSTRUKCIÓKBAN

Írta: SZENDREI JÁNOS

1. A transzlációk fontos szerepet játszanak a félcsoportelméletben. Különösen fontos a szerepük a CLIFFORD-féle bővítéseknél, amelyeknek problémáját a szerző oldotta meg teljes általánosságban 1962-ben megjelent dolgozatában [4]. A transzlációk vizsgálatával a gyűrűelméletben jóval korábban foglalkoztak, de mivel ott additív tulajdonságokat is ki kell elégíteni, inkább az endomorfizmusok oldaláról vizsgálták azokat. M. PETRICH [1] alatti dolgozatában a félcsoportok transzlációinak vizsgálatától jut el a transzlációknak a gyűrűk, az algebrák és a parciálisan rendezett algebrai rendszerek transzlációinak tárgyalásához. Különösen fontos szerepet kapnak a transzlációk az ún. ideálbővítéseknél, amelyekhez tartozik félcsoportok esetén a CLIFFORD-féle bővítés, gyűrűknél pedig az EVERETT-féle bővítés.

Jelen dolgozatunkban két gyűrűből, ezek transzlációinak felhasználásával alkotott gyűrűkkel foglalkozunk, amely speciális esetként több említésre érdemes konstrukciót tartalmaz. Ennél általánosabb gyűrűkonstrukcióval [2] alatti dolgozatomban foglalkoztam.

2. Legyen R gyűrű, amelynek elemei $0, a, b, \ldots$, ahol 0 a zéruselemet jelöli. az R gyűrű bal (jobb) transzlációján értjük az R önmagába való olyan $a \to \alpha_1 a$ $(a \to a\alpha_2)$ egyértelmű leképezését, amelyre

$$\alpha_1(ab)=(\alpha_1 a)b \qquad ((ab)\alpha_2=a(b\alpha_2))$$

teljesül. Az R gyűrű bitranszlációjának nevezzük az R olyan bal és jobb transzlációjából álló $\alpha^*=(\alpha_1, \alpha_2)$ rendezett párt, azaz az

$$\alpha^*\colon\ a \to \alpha^* a = \alpha_1 a, \qquad a \to a\alpha^* = a\alpha_2$$

leképezéspárt, amelyre

$$a(\alpha^* b)=(a\alpha^*)b,$$

azaz

$$a(\alpha_1 b)=(a\alpha_2)b$$

teljesül.

Az R gyűrű bitranszlációinak halmazát jelölje $\Omega(R)$, amelyben összeadást és szorzást a következőképpen definiálunk:

$$\alpha^*+\beta^*\colon a \to (\alpha^*+\beta^*)a = \alpha^* a+\beta^* a, \qquad a \to a(\alpha^*+\beta^*) = a\alpha^*+a\beta^*,$$

$$\alpha^*\beta^*\colon a \to \alpha^*\beta^* a = \alpha^*(\beta^* a), \qquad a \to a(\alpha^*\beta^*) = (a\alpha^*)\beta^*.$$

Könnyű belátni, hogy $\Omega(R)$ gyűrűt alkot.

Ha r az R gyűrű egy rögzített eleme, akkor az

$$\alpha\colon a_r \to ra = \alpha_r a, \qquad a \to ar = a\alpha_r$$

leképezéspár az R-nek egy bitranszlációja, s ezt belső bitranszlációnak nevezzük.

Az R belső bitranszlációinak a halmazát jelölje $B(R)$, amiről könnyű belátni, hogy az $\Omega(R)$-nek ideálja. Az R gyűrű α^*, β^* bitranszlációját permutábilisnek nevezzük, ha

$$(\alpha^* a)\beta^* = \alpha^*(a\beta^*).$$

Bitranszlációk egy halmazát permutábilisnek mondjuk, ha annak bármely két eleme felcserélhető, azaz permutábilis. Ismert, hogy az R gyűrű minden permutábilis bitranszláció-gyűrűje része egy maximális permutábilis bitranszláció-gyűrűnek.

3. Legyen P egy másik gyűrű, amelynek elemei o, α, β, ... A P gyűrűt képezzük le az R gyűrű egy permutabilis bitranszláció-gyűrűjébe az

$$\alpha \to \alpha^*$$

hozzárendeléssel, és legyen $[\alpha, \beta]$ és $\{\alpha, \beta\}$ a $P\times P$ halmazon értelmezett R-beli függvény azzal a kikötéssel, hogy

$$[\alpha, \text{o}] = [\text{o}, \alpha] = \{\alpha, \text{o}\} = \{\text{o}, \alpha\} = 0.$$

Tekintsük továbbá az R gyűrűnek egy $a \to a^*$ leképezését a P egy permutabilis bitranszláció-gyűrűjébe és legyen $[a, b]$, $\{a, b\}$ az $R\times R$ halmazon értelmezett P-beli olyan függvény, amely kielégíti az

$$[a, 0] = [0, a] = \{a, 0\} = \{0, a\} = \text{o}$$

feltételeket.

Az $R\times P$ halmazban definiáljuk az összeadást és a szorzást a következő módon:

$$(a, \alpha)+(b, \beta) = (a+b+[\alpha, \beta], \{a, b\}+\alpha+\beta),$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab+a\beta^*+\alpha^* b+\{\alpha, \beta\}, \{a, b\}+\alpha b^*+\alpha^*\beta+\alpha\beta).$$

Könnyen belátható, hogy a fenti műveletek a [ ], { } függvényeket meghatározzák.

Látható az is a fentiekből, hogy a tekintett két gyűrű a tárgyalásban szimmetrikus szerepet tölt be, ezért az egyikre vonatkozó állítások a másikra is érvényesek; s ha egy igaz állítást kifejező formulában a latin és a görög betűket felcseréljük, ismét igaz állítást kifejező formulához jutunk. Az ilyen formulákat egymás duálisainak nevezzük. A duális formulapárok közül elegendő csak az egyiket felírni.

Érvényes a következő állítás:

Az $R\times P$ halmaz a fentebb definiált műveletek szerint akkor és csakis akkor alkot gyűrűt, ha érvényesek a következő azonosságok és ezek duálisai:

(K) $\qquad [\alpha, \beta] = [\beta, \alpha],$

(A_1^+) $\qquad [\alpha, \beta]+[\alpha+\beta, \gamma] = [\alpha, \beta+\gamma]+(\beta, \gamma],$

(A_2^+) $\qquad [[a, b], \gamma] = 0,$

(A_1) $\qquad a\{b, c\}^* = \{a, b\}^* c,$

(A_2) $\qquad \alpha^*\{\beta, \gamma\}+\{\alpha, \beta\gamma\} = \{\alpha, \beta\}\gamma^*+\{\alpha\beta, \gamma\},$

(A_3) $\qquad a(\beta c^*)^* = (a^*\beta)^* c,$

(A_4) $\qquad \{\alpha, b^*\gamma\} = \{\alpha b^*, \gamma\},$

(A_5) $\qquad a(b^*\gamma)^* = \{\{a, b\}, \gamma\}, \quad (\alpha b^*)^* c = \{\alpha, \{b, c\}\},$

(A_6) $\qquad \{a^*\beta, \gamma\} = a\{\beta, \gamma\}, \quad \{\alpha, \beta c^*\} = \{\alpha, \beta\} c,$

(D_1) $\qquad \alpha^*(b+c)+\{\alpha, [b, c]\} = \alpha^* b+\alpha^* c+[\alpha b^*, \alpha c^*],$

$\qquad (a+b)\gamma^*+\{[a, b], \gamma\} = a\gamma^* b\gamma^*+[a^*\gamma, b^*\gamma],$

(D_2) $\qquad a[\beta, \gamma] = [a^*\beta, a^*\gamma], \quad [\alpha, \beta]c = [\alpha c^*, \beta c^*],$

(D_3) $$\alpha^*[\beta, \gamma]+\{\alpha, \beta+\gamma\} = \{\alpha, \beta\}+\{\alpha, \gamma\}+[\alpha\beta, \alpha\gamma],$$
$$[\alpha, \beta]\gamma^*+\{\alpha+\beta, \gamma\} = \{\alpha, \gamma\}+\{\beta, \gamma\}+[\alpha\gamma, \beta\gamma],$$

(D_4) $$a[b, c]^* = [\{a, b\}, \{a, c\}], \qquad [a, b]^* c = [\{a, c\}, \{b, c\}],$$

(D_5) $$[\{a, b\}, a^*\beta] = [\{a, b\}, \alpha b^*] = \mathrm{o}, \qquad [\alpha\beta, a^*\beta] = [\alpha\beta, \alpha b^*] = 0.$$

A fenti állítás bizonyítása a gyűrűaxiómák alapján egyszerű számolással adódik.

4. A tekintett gyűrűkonstrukciónak néhány alkalmazását mutatjuk be.

a) Legyen

$$[a, b] = \{a, b\} = \mathrm{o}, \qquad [\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\} = 0,$$

és minden α-ra $\alpha^* = 0$. Ekkor a P gyűrűnek az R gyűrűvel való széteső Everett-féle bővítéséről van szó.

Megjegyezzük, hogy az Everett-féle bővítés általános esete is speciális esetenként adódik a [2]-ben tárgyalt gyűrűkonstrukciónak.

b) Ha $$[a, b] = \{a, b\} = \mathrm{o}, \; [\alpha, \beta] = \{\alpha, \beta\} = 0,$$

és ha P_0 illetve R_0 jelöli azoknak az elemeknek halmazát, amelyekhez tartozó transzlációk annullálják az R illetve P elemeit, akkor a gyűrűk Szép-féle bővítésének egy speciális esetét kapjuk.

c) Jelöljön most R és R_0 egy tetszőleges egységelemes gyűrűt, illetve egy zérógyűrűt, amelynek additív csoportja izomorf az R additív csoportjával. Az R_0 elemeit jelöljük a következőképpen: $0_0, a_0, b_0, \ldots$, s a kívánt izomorfizmust az $a \to a_0$ leképezés biztosítja. Legyen most

$$[a, b] = \{a, b\} = 0_0, \; [a_0, b_0[= 0,$$

további minden R -beli elemét az R zérustranszlációjára képezzünk le. A ténylegesen fellépő függvény és leképezések legyenek a következők:

$$\{a_0, b_0\} = -ab, \qquad a^* b_0 = (ab)_0, \qquad a_0 b^* = (ab)_0.$$

Ebben az esetben az $R \times R_0$ halmaz a definiált műveletek szerint egy gyűrűt alkot, amely izomorf az R feletti komplex gyűrűvel, s a megfelelő izomorfizmust az $(a, a_0) \to a+bi$ leképezés szolgáltatja.

Ha R speciálisan a valós számok teste, akkor a kapott gyűrű konstrukció izomorf a komplex számok testével.

Ha pedig R egy egységelemes komplex gyűrű az S gyűrű felett, R pedig az R modulusa feletti zérógyűrű, akkor tekintsük a következő definíciókat:

$$[a, b] = \{a, b\} = 0_0, \qquad a_0 b = a b_0 = 0,$$

$$[a_0, b_0] = 0, \qquad \{a_0, b_0\} = -ab, \qquad a^* b_0 = (ab)_0, \qquad a_0 b_0 = (ab)_0.$$

Az $R \times R_0$ halmaz a definiált műveletek szerint gyűrűt alkot, amely az S feletti kvaterniógyűrűvel izomorf, s az

$$\begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{a} \\ -\bar{\mathrm{b}} & \bar{\mathrm{b}} \end{pmatrix} \to (\mathrm{a}, \mathrm{b}_0)$$

leképezés szolgáltatja a megfelelő izomorfizmust.

d) Végül nyilvánvaló, hogy speciális esetként megkaphatjuk a két gyűrű direkt összegét is.

IRODALOM

[1] Petrich, M.: The translational hull in semigroups and rings, Semigroup Forum, 1 (1970), 283—360.

[4] Szendrei J.: Félcsoportok bővítéséről, Szegedi Tanárképző Főiskola Évkönyve, 1962, 243—248.

[2] Szendrei, J.: Über eine allgemeine Ringkonstruktion durch schiefes Produkt, Acta Sci. Math., 19 (1958), 63—76.

[3] Szendrei, J.: Über die Szépschen Ringerweiterungen, Acta Sci. Math., 21 (1960), 166—172.

ПОСТРОЕНИЕ КОЛЕЦ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕВОДЯЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Я. Сендреи

Переводящие отображения играют очень важную роль в теории полугрупп и в теории колец, особенно в теории пополнения полугрупп и колец. В этой работе из двух произвольных колец с помощью их переводящих отображений построим новое кольцо. Это построение содержит в себе как частный случай пополнение кольца по Everett-у, некоторые случаи пополнения колец по Szép-у, кроме того построение комплексного кольца над кольцом с единицей и кольца кватернионов и конечно прямую сумму двух колец.

TRANSLATIONEN IN RINGKONSTRUKTIONEN

J. Szendrei

Die Translationen spielen eine wichtige Rolle in der Halbgruppentheorie und auch in der Ringtheorie, insbesonders in Erweiterungstheorie von Halbgruppen und von Ringen. In dieser Arbeit wird eine Ringkonstruktion mit Hilfe der Translationen von zwei Ringen angegeben. Als Spezialfälle dieser Ringkonstruktion können die Everettschen Erweiterungen, die speziellen Szépschen Ringerweiterungen, die Konstruktion der komplexen Ringe und Quaternionenringe über einem Ring mit Einselement und natürlich die direkte Summe von zwei Ringen betrachtet werden.