PÁRONKÉNT KITÉRŐ HÁROM EGYENES HÁROMSZÖG-METSZETE

Írta: MISKOLCZI JÓZSEF

1. Ismert az a tény, hogy egy háromoldalú hasáb mindig metszhető adott háromszöghöz hasonló háromszögben [2], [5].

Vizsgáljuk meg a problémát általánosabban. Legyen három egyenes páronként kitérő. Az olyan A, B, C ponthármast, melyre $A\in a$, $B\in b$, $C\in c$, az a, b, c páronként kitérő három egyenes háromszög-metszetének nevezzük.

A következőkben megmutatjuk, hogy *páronként kitérő három egyenes mindig metszehető adott háromszöghöz hasonló háromszögben; a metszést Monge-féle projekcióban végrehajtjuk.*

Végül rámutatunk arra, hogy a megoldás során alkalmazott szerkesztési módszer olyan esetben is alkalmazható, ha az egyenesek nem kitérőek.

2. Előbb bebizonyítjuk a következő állítást:

Változzon a Φ alakzat önmagához hasonlóan úgy, hogy egy O pontja fix maradjon. Ha ekkor a Φ alakzat egy P pontja egy g görbét ír le, akkor az alakzat minden más Q ($\not\equiv O$) pontja g-hez hasonló $\bar{g}$ görbét ír le.

Bizonyítás. Legyen Φ kezdeti és Φ' pedig egy másik tetszőleges helyzet. Jelölje P' a P pont; Q' a Q pont Φ'-beli helyzetét. Mivel $\Phi\sim\Phi'$ és O fix, következik, hogy $POQ\triangle\sim P'OQ'\triangle$. Ezért $POQ\sphericalangle=P'OQ\sphericalangle'$ és $\dfrac{OP'}{OP}=\dfrac{OQ'}{OQ}$. Könnyen belátható hogy $\varepsilon(OPQ)$ sík az $\varepsilon'(OP'Q')$ síkba egy O-ra illeszkedő tengely körüli forgással átvihető, mégpedig úgy, hogy QOP szögtartomány a $Q'OP'$ szögtartományt fedje. Forgassuk ugyanis az $\varepsilon(OPQ)$ síkot előbb $\pi(OQQ')$ síkra merőleges és O-n átmenő t_1 tengely körül QOQ' szöggel; ekkor QO illeszkedik $Q'O$-ra és ε sík ε_1 helyzetbe kerül. Majd az ε_1 síkot $t_2(Q'O)$ tengely körül úgy forgatjuk az ε' síkba, hogy a t_2 a befejezett forgás után a P és P' pontot ne válassza el. A jelzett elforgatás után a $QOP\sphericalangle=Q'OP'\sphericalangle$ szögegyenlőség miatt a két szögtartomány kölcsönös fedésbe kerül. Ismeretes viszont [1], hogy két egymást metsző tengelyű elforgatás eredménye egyetlen elforgatás, melynek tengelye áthalad az előző két tengely metszéspontján. Így a P-ből a P'-be és a Q-ból a Q'-be egy és ugyanazon O-n áthaladó t tengelyű forgás és $k=\dfrac{OP'}{OP}\left(=\dfrac{OQ'}{OQ}\right)$ arányú nyújtás révén jutunk. Mivel a P pont pályáját ugyanaz a pörgettyűmozgás és k arányú nyújtás hozza létre, mint a Q pályáját, ezért a két pályagörbe hasonló egymáshoz.

3. Tekintsünk egy ABC háromszöget. Rögzítsük ennek a C csúcspontját. Néhány speciális helyzettől eltekintve létrehozható az ABC háromszögnek olyan önmagához hasonló változása, amelynek során az A csúcs egy kitűzött a egyenesen, a B csúcs pedig egy C pontra illeszkedő ε síkban mozog.

Ez a következőképpen látható be. Megmutatjuk, hogy az a egyenes egy tetszőleges A' pontjához általában szerkeszthető az ABC háromszöghöz olyan hasonló

$A'B'C'$ háromszög, melynek C' csúcsa azonos C-vel, B' csúcsa pedig illeszkedik az ε síkra. Ezzel lényegében állításunk helyességét bizonyítjuk, ugyanis az előzőekben megmutattuk, hogy e háromszög helyzetekhez hozzárendelhető egy pörgettyűmozgás és ugyanazon k arányú nyújtásból álló összetett mozgás, ami viszont a háromszög önmagához hasonló változását hozza létre. S mivel az A' csúcs az a egyenesen mozog, ezért a 2. pontban megfogalmazott állítást figyelembe véve B' pontok halmaza is egyenes.

A megfelelő szerkesztést az alábbi lépésekben végezzük.

$A'C$ tengelyű, C csúcsú és γ félnyílásszögű forgáskúp messe e', illetve e^* félegyenesekben; az $A'C$ tengelyű, A' csúcsú és α félnyílásszögű forgáskúp pedig egy l kúpszeletben az ε síkot. (Az α, illetve a γ az ABC háromszög A, illetve B csúcsánál fekvő szöget jelöli.) Az e'-nek, illetve e^*-nak az l-lel való metszéspontjait jelöljük B'-vel, illetve B^*-gal. Nyilván $A'B'C'\triangle \sim ABC\triangle$ és $A'B^*C'\triangle \sim ABC\triangle$. Az A' csúcsból tekintve az egyik háromszög körüljárása megegyezik az ABC háromszög A-ból tekintett körüljárásával.

4. Rátérünk a kitűzött feladat megoldására. Jelölje $A_0B_0C_0$ az adott háromszöget, a, b, c a páronként kitérő egyeneshármast, ABC az előírt feltételek szerinti metszetet. Tekintsünk a c egyenesen egy C pontot. Válasszuk ezt a metszet egyik csúcsának. Az előrebocsájtottak szerint a B csúcsot a következő módon keressük fel: felveszünk két olyan $A_1B_1C_1$ és $A_2B_2C_2$ háromszöget, melyekre teljesül, hogy $C_1, C_2 \equiv C$, $A_1, A_2 \in a$, $B_1, B_2 \in \varepsilon(bC)$, $A_0B_0C_0$ háromszöghöz hasonlóak és egyező körüljárásúak. A B csúcsot az $e(B_1B_2) \cap b$ metszet adja. Az A csúcs kitűzése a BC oldal ismeretében nem okoz különösebb problémát.

A szerkesztés lépései:

1. a, b, c felvétele.
2. $A_1B_1C_1$ háromszög szerkesztése $C_1 \equiv C$ választás mellett.
   a) $A_1 | A_1 \in a$.
   b) C_1 csúcsú $a_1(C_1A_1)$ tengelyű γ félnyílásszögű kúp szerkesztése. E kúpot jelölje Φ_k.
   c) $o_1 | o_1 = (\Phi_k \cap \varepsilon(bC))$.
   d) $B_1 | (B_1 \in \varepsilon) \wedge (A_1B_1C_1 \triangle \sim A_0B_0C_0 \triangle)$.

Megjegyzés. Ha Φ_k és ε közös része két alkotó, akkor o_1 jelölje a kettő közül azt, melynek választása révén — A_1-ből nézve — az $A_1B_1C_1$ háromszög körüljárása megegyezik $A_0B_0C_0$ körüljárásával.

3. $A_2B_2C_2\triangle$ szerkesztése az $A_1B_1C_1\triangle$-höz hasonlóan.
4. $B | B = (e(B_1B_2) \cap b)$.
5. $A | (A \in a) \wedge (ABC\triangle \sim A_0B_0C_0\triangle)$.

A szerkesztés kivitelezését MONGE-féle projekcióban — $\pi_1 \equiv \varepsilon(bC)$, $x \ni C$ választás mellett — a transzformáció és főállásba való elfordítás módszerét alkalmazva hajtjuk végre (1. ábra).

A közölt megoldást, illetve szerkesztést végiggondolva könnyen látható, hogy a kitűzött feladatnak, a háromszög egyik csúcsának szabad választása miatt mindig van megoldása. Sőt végtelen sok megoldás lép fel.

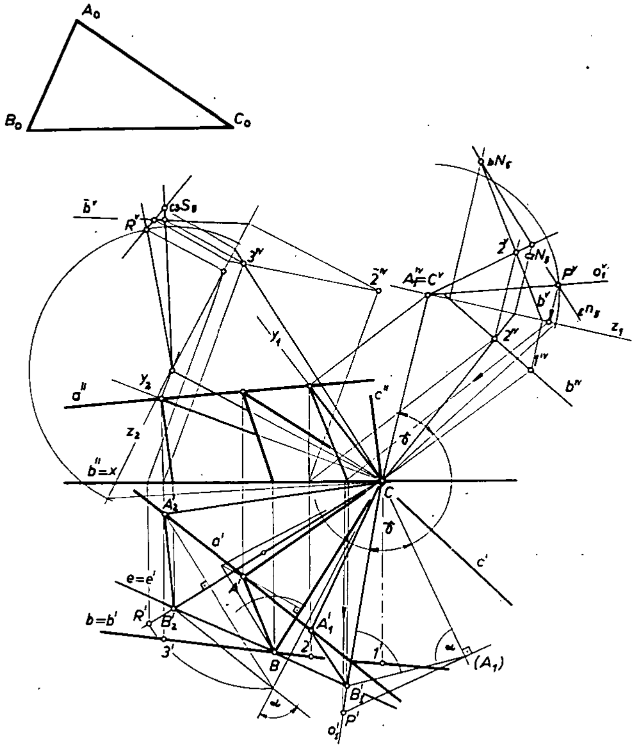
Befejezésül megemlítjük, hogy a háromszög-metszet megfelelő értelmezése mellett könnyen bizonyítható az alábbi állítás:

Ha az a, b, c egyenesek

a) nem illeszkednek egy pontra, vagy

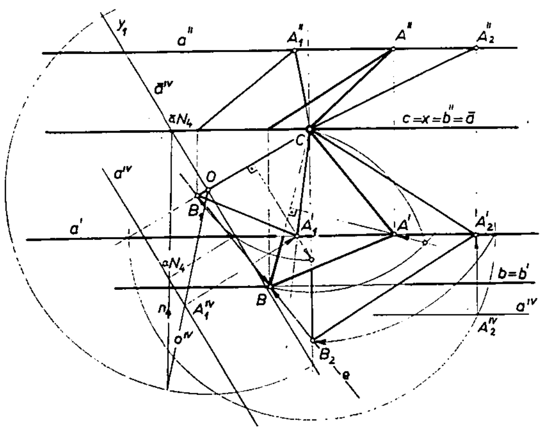
b) egy pontra illeszkednek és egysíkúak,

akkor az a, b, c egyeneshármas mindig metszhető adott háromszöghöz hasonló háromszögben.



1. ábra

A fenti eljárás ebben az esetben is alkalmas a megfelelő háromszögmetszet szerkesztésére. Pl. a 2. ábrán nem egysíkú párhuzamos egyeneshármas szabályos háromszögben való metszése látható.



2. ábra

IRODALOM

[1] HAJÓS GY.: Differenciálgeometria I., Tankönyvkiadó, 1961.
[2] KÁRTESZI F.: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1957.
[3] JAGLOM, I. M.: Geometricseszkije preobrazovanyija I., Moszkva, 1956.
[4] MOLNÁR E.: Elemi matematika II., Tankönyvkiadó, 1968.
[5] ZIGÁNY F.: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1964.

ТРЕУГОЛНОЕ СЕЧЕНИЕ ТРЁХ ПОПАРНО СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Йо. Мишкольци

Доказывается, что три попарно некомпланарные прямые всегда можнопересекать каиой нибудь плоскостью так, чтобы в пересечении получился треуголник, подобный заранее заданному треуголнику. Сечение построено по проекциям *Монжв.* В заключении показано, что приведенный метод решения задачи применим и в случае не скрещивающихся прямых.

DREIECKS-KREUZUNG DREIER PAARWEISE AUSWEICHENDER GERADEN

J. Miskolczi

Der Verfasser zeigt, dass drei parrweise ausweichende Gerade stets in einem, dem gegebenen Dreieck ähnlichen, Dreieck schneidbar sind. Die Schneidung vollzieht er in der Monge'schon Projektion und weist schliesslich darauf hin, dass die bei der Lösung benutzte Konstruktionsmethode auch in Fällen anwendbar ist, wo die Geraden nicht ausweichen.