A KOMPLEX SZÁMOK ÉS A KVATERNIÓK EGY KONSTRUKCIÓJA

Írta: SZENDREI JÁNOS

1. Ismeretes, hogy a komplex számokat a valós számok testéből, a kvaterniókat pedig a komplex számok testéből (vagy közvetlenül a valós számok testéből) kiindulva konstruálhatjuk meg [2]. A következő, jól ismert konstrukció hasonló vonásokat mutat.

Legyen R a valós számok teste, K a komplex számok teste, Q pedig a kvaterniótest. Az R fölötti 2×2 típusú teljes mátrixgyűrűnek az

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \tag{1}$$

alakú elemei egy résztestet alkotnak, amely izomorf K-val. A K fölötti 2×2 típusú teljes mátrixgyűrűnek az

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{2}$$

alakú elemei egy rész-ferdetestet alkotnak, amely izomorf Q-val. (Itt $\bar{\alpha}$ az α komplex szám konjugáltját jelenti.) Mivel egy valós szám konjugáltja önmaga, azért az (1) alatti mátrixok felfoghatók a (2) speciális eseteiként.

2. Az alábbiakban egy olyan általános gyűrűbővítési konstrukciót adunk, amely közös általánosításként tartalmazza a komplex számok testének és a kvaterniótestnek a megadását. Megjegyezzük, hogy az itt szereplő konstrukciónak további általánosításai lehetségesek [3].

Legyen $R=\{0, a, b, \ldots\}$, $P=\{o, \alpha, \beta, \ldots\}$ két tetszőleges gyűrű. Jelölje $R*P$ az R és a P elemeiből képezett rendezett elempárok halmazát. $R*P$-ben összeadást és szorzást a következőképpen definiálunk:

$$(a, \alpha)+(b, \beta) = (a+b, \alpha+\beta), \tag{3}$$

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab+[\alpha, \beta], \alpha^b+{}^a\beta+\alpha\beta), \tag{4}$$

ahol $[\alpha, \beta](\in R)$, α^b, ${}^a\beta(\in P)$ olyan kétváltozós függvények, amelyekre

$$[\alpha, o] = [o, \alpha] = 0, \tag{5}$$

$$o^a = \alpha^0 = {}^a o = {}^0\alpha = 0. \tag{6}$$

Az $R*P$ halmaz a (3)—(4) műveletek szerint akkor, és csak akkor alkot gyűrűt, ha teljesülnek az alábbi feltételek:

$$\alpha^{[\beta,\gamma]} = {}^{[\alpha,\beta]}\gamma, \tag{7}$$

$$[\alpha, \beta\gamma] = [\alpha\beta, \gamma], \tag{8}$$

$$\alpha({}^{b}\gamma) = (\alpha^{b})\gamma, \tag{9}$$

$${}^{a}(\beta^{c}) = ({}^{a}\beta)^{c}, \tag{10}$$

$$[\alpha, {}^{b}\gamma] = [\alpha^{b}, \gamma]. \tag{11}$$

$$\alpha(\beta^{c}) = (\alpha\beta)^{c}, \qquad ({}^{a}\beta)\gamma = {}^{a}(\beta\gamma), \tag{12}$$

$$(\alpha^{b})^{c} = \alpha^{bc}, \qquad {}^{a}({}^{b}\gamma) = {}^{ab}\gamma, \tag{13}$$

$$[{}^{a}\beta, \gamma] = a[\beta, \gamma], \qquad [\alpha, \beta^{c}] = [\alpha, \beta]c, \tag{14}$$

$$[\alpha, \beta+\gamma] = [\alpha, \beta]+[\alpha, \gamma], \qquad [\alpha+\beta, \gamma] = [\alpha, \gamma]+[\beta, \gamma], \tag{15}$$

$${}^{a}(\beta+\gamma) = {}^{a}\beta+{}^{a}\gamma, \qquad (\alpha+\beta)^{c} = \alpha^{c}+\beta^{c}, \tag{16}$$

$$\alpha^{b+c} = \alpha^{b}+\alpha^{c}, \qquad {}^{a+b}\gamma = {}^{a}\gamma+{}^{b}\gamma. \tag{17}$$

A tétel bizonyítása a műveleti tulajdonságok belátásán alapul. Könnyen igazolható, hogy (7)—(14) feltételek a szorzás asszociativitását, a (15)—(17) feltételek pedig a disztributivitását biztosítják.

3. Legyen R egységelemes gyűrű, R_0 pedig jelentse az R gyűrű R^+ modulusa feletti zérógyűrűt (azaz azt a gyűrűt, amelynek modulusa R^+ és bármely két elem szorzata zérus). Az R_0 elemeit a $0_0, a_0, b_0, \dots$ betűk jelölik, s az $r \to r_0$ leképezés az R^+-nak a R_0^+-ra való izomorf leképezését adja.

Vegyük a most tekintett R és R_0 gyűrűből képezett (a, b_0) rendezett elempárok $R*R_0$ halmazát, amelyben az $[a_0, b_0]$, a_{b_0}, a_0^b függvényeket a következőképpen definiáljuk:

$$[a_0, b_0] = -ab, \quad {}^{a}b_0=(ab)_0, \quad a_0^b=(ab)_0. \tag{18}$$

Belátható, hogy a (18)-ban definiált függvényekre teljesülnek a (7)—(17) feltételek, ezért a most vizsgált $R*R_0$ halmaz gyűrűt alkot. Az így kapott gyűrű az R egységelemes gyűrű fölötti $\bar{R}$ komplex gyűrűvel izomorf, s a megfelelő izomorfizmust a következő leképezés adja:

$$a+bi \to (a, b_0).$$

Jelölje az $\bar{R}$ egységelemes komplex gyűrű elemeit $0, \alpha, \beta, \dots$.

Ha most az $\bar{R}$-nak tekintjük az előbbiekhez hasonlóan az $\bar{R}^+$ modulusát, s $\bar{R}_0$ jelöli az $\bar{R}^+$ fölötti zérógyűrűt, akkor az $\bar{R}*\bar{R}_0$ halmaz is gyűrűt alkot a (3), (4) műveletek szerint, feltéve, hogy az $[\alpha_0, \beta_0]$, ${}^{\alpha}\beta_0$, α_0^{β} függvényeket a következőképpen értelmezzük:

$$[\alpha_0, \beta_0] = -\alpha\bar{\beta}, \quad {}^{\alpha}\beta_0 = (\alpha\beta)_0, \quad \alpha_0^{\beta} = (\alpha\bar{\beta})_0,$$

ahol a felülvonás a konjugáltat jelöli. Az így kapott $\bar{R}*\bar{R}_0$ izomorf az R fölötti $\bar{R}$ kvaterniógyűrűvel.

Ha speciálisan R helyett a valós számok testét választjuk, akkor $\bar{R}$ a komplex számok testével izomorf, $\bar{\bar{R}}$ pedig a kvaterniótesttel.

4. A fentiekben vázolt gyűrűkonstrukció tartalmazza a gyűrűk közönséges (Dorroh-féle) egységelemes bővítését is, mégpedig abban az esetben, ha R az egész számok gyűrűje, P pedig tetszőleges (nem egységelemes) gyűrű.

IRODALOM

[1] Dorroh, J. L.: Concerning adjunction to algebras, Bulletin of the American Math. Society, 38, 85—88, 1932.

[2] Rédei L.: Algebra I. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1954.

[3] Szendrei, J.: Über eine allgemeine Ringkonstruktion durch schiefes Produkt. Acta Sci. Math. 21, 63—76, 1958.

ОБ ОДНОЙ КОНСТРУКЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И КВАТЕРНИОНОВ

Я. Сендреи

Множество R и P упорядоченных пар элементов колец R и P образует кольцо по действиям (3)—(4) тогда и только тогда, если выполнены условия (5)—(17). Полученное таким образом кольцо R и P в частном случает даёт конструкцию комплексно колъца над кольцом с единицей а также и кольца кватернионов. Тем самым получаем новый способ задания поля комплексных чисел и кольца кватернионов.

ÜBER EINE NEUE KONSTRUKTION DER KOMPLEXEN ZAHLEN UND QUATERNIONEN

J. Szendrei

Die Menge $R*P$ der geordneten Paare von der Form (a, α) $(a \in R,\ \alpha \in P)$ bildet einen Ring nach dem Definitionen (3)—(4) dann und nur dann, wenn die Gleichungen (5)—(17) erfüllt sind. Dieser Ringkonstruktion enthält als Spezialfälle die Konstruktion der komplexen Ringe und die der Quaternionenringe über einem Ring mit Einselement. Auf diese Weise bekommt man eine neue Konstruktion des Körpers der komplexen Zahlen und des Quaternionenkörpers.