KOMMUTATÍV FÉLCSOPORT IDEÁLJAIRÓL

Írta: SZENDREI JÁNOS

Jelen dolgozatban a kommutatív egységelemes félcsoportok (más szóval kommutatív monoidok) olyan ideáljait vizsgáljuk, amelyeknek analógonjai a valós folytonos függvények gyűrűiben játszanak fontos szerepet [1].

Legyen S kommutatív egységelemes félcsoport. Vezessük be a következő szokásos jelölést:

$$S^0 = \begin{cases} S, \text{ ha } S\text{-nek van 0 zéruseleme és } |S|>1; \\ S \cup \{0\} \text{ egyébként, ahol minden } a\ (\in S)\text{-ra } 00=a0=0. \end{cases}$$

Az S^0-nak egy M ideálját *maximálisnak* nevezzük, ha egyrészt $M \neq S^0$, másrészt S^0 minden olyan I ideáljára, amelyre $M \subseteq A \subseteq S$ teljesül, akkor vagy $A=M$, vagy $A=S$ következik.

S^0-nak egy P ideálja *prímideál*, ha S/P részfélcsoportja S^0-nak.

Jelölje $\mathcal{M}$ az S^0 maximális ideáljainak halmazát. $M(a)$ legyen az a $(\in S^0)$ elemet tartalmazó maximális ideálok halmaza, $M(I)$ pedig az $I(\subset S^0)$ ideált tartalmazó maximális ideálok halmaza S^0-ban.

Az I ideált tartalmazó összes prímideálok metszetét az I ideál *radikál*jának nevezzük, és $R(I)$-vel jelöljük.

I és K ideálok esetén a $(K:I)$ *ideálhányados* azoknak az s $(\in S^0)$ elemeknek a halmaza, amelyekre $sI \subseteq K$. Az $(0:I)$ ideálhányados az I ideál *annullátora*, amit $A(I)$ jelöl.

G. MASON [3] dolgozatát követve bevezetjük a következő definíciót:

Az S^0 félcsoport egy I ideálját *z-ideálnak* nevezzük, ha valahányszor $M(a)= =M(b)$ és $b \in I$, mindannyiszor $a \in I$.

Könnyen belátható, hogy $M(a) \subseteq M(b)$ akkor és csak akkor, ha $M(a)=M(ab)$. Ennélfogva a z-ideál definíciójában az $M(a)=M(b)$ egyenlőség az $M(a) \supseteq M(b)$ tartalmazással helyettesíthető.

A z-ideál definíciójából nyilvánvaló, hogy S^0-nak minden maximális ideálja z-ideál, továbbá z-ideálok metszete is z-ideál.

Az S^0 összes maximális ideáljainak R_J metszete, ami az S^0 Jacobson-féle radikálja, szintén z-ideál [2]. Nyilvánvaló, hogy R_J benne van minden z-ideálban. Ezért a későbbiekben egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy $R_J=0$. Ellenkező esetben a z-ideálok vizsgálata szempontjából ugyanis az S^0/R_J faktorfélcsoportot tekinthetjük.

Ha egy z-ideál maximális ideálok metszete, akkor azt *erős z-ideálnak* hívjuk. Könnyen bebizonyítható a következő állítás:

1. állítás. I akkor és csak akkor erős z-ideál S^0-ban, ha S^0-nak K, L ideáljaira valahányszor $M(L) \supseteq M(K)$ és $K \subseteq I$, mindannyiszor $L \subseteq I$.

Az 1. állítás alapján közvetlenül belátható, hogy minden olyan aS^0 főideál, amely z-ideál, egyben erős z-ideál.

Közvetlenül a definíció alapján bebizonyíthatók a következő állítások:

2. állítás. Minden I ideál benne van egy legszűkebb I_z z-ideálban, mégpedig I_z az I-t tartalmazó z-ideálok metszete.

3. állítás. Minden I ideálra és n természetes számra $(I^n)_z = I_z$.

4. állítás. $I \subseteq R(I) \subseteq I_z$.

5. állítás. Minden z-ideál az őt tartalmazó maximális prímideálok metszete.

Érvényes a következő

6. tétel. Ha P az I z-ideált tartalmazó prímideálok között minimális, akkor P z-ideál.

Bizonyítás. A tételt kontrapozíciós bizonyítással látjuk be. Tegyük fel, hogy P az I z-ideált tartalmazó prímideál nem z-ideál. Ennélfogva van olyan $a \notin P$ és $b \in P$, hogy $M(a) \supseteq M(b)$. Legyen

$$T = S^0 / P \cup \{cb^n | c \notin P,\ n \in N\}.$$

Ez a T félcsoport és $T \cap I = \emptyset$, mert $cb^n \in I$ teljesüléséből $M(ca) \supseteq M(cb^n)$ miatt $ca \in I (\subseteq P)$ következne, ami lehetetlen P prímideál volta miatt. Ennélfogva létezik olyan $P'(\supseteq I)$ ideál, amely a $P' \cap T = \emptyset$ követelményre nézve maximális. Ez a P' nyilvánvalóan prímideál, továbbá $P \supset P'$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy P nem minimális. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

A 6. tételből adódik az alábbi

7. állítás. S^0 minimális ideáljai z-ideálok.

A most vizsgált félcsoportok esetében a *Neumann*-féle reguláris félcsoportok jellemzését adja a következő tétel:

8. tétel. Az S^0 félcsoportban ekvivalensek az alábbiak:
(I) Minden ideál erős z-ideál;
(II) Minden ideál z-ideál;
(III) Minden főideál z-ideál;
(IV) S^0 *Neumann*-féle reguláris félcsoport.

Bizonyítás. (I)⇒(II) és (II)⇒(III) triviális. (III)⇒(IV) így bizonyítható: Mivel minden I z-főideálra $I^2 = (I^2)_z = I_z = I$, azért bármely a ($\in S^0$) elemre $a^2R = aR$, azaz $axa = a$ megoldható. Végül (IV)⇒(I) így látható be: Reguláris félcsoportban minden ideál az őt tartalmazó maximális ideáloknak a metszete, azért igaz a következtetés.

9. tétel. Ha K z-ideál, akkor bármely I ideálra $(K:I)$ szintén z-ideál.

Bizonyítás. Ha $M(a) \supseteq M(b)$, ahol $bI \subseteq K$, akkor minden $i (\in I)$-re $M(ai) \supseteq M(bi)$. Ugyanakkor $bi \in K$, $ai \in K$ minden i-re, azért $a \in (K:I)$.

Következményként adódik az alábbi állítás:

10. állítás. $A(I)$ z-ideál.

Végül bebizonyítjuk a következő tételt:

11. tétel. Ha P prím ideál, akkor P vagy z-ideál, vagy a P-ben levő maximális z-ideálok prím z-ideálok.

Bizonyítás. Legyen T a P-ben levő z-ideálok halmaza. T-nek vannak maximális elemei (a Zorn lemma miatt), legyen például I ilyen. $I=P$ akkor és csak akkor, ha P prím z-ideál. Ha $I\subset P$, akkor van olyan Q minimális prímideál, amelyikre $I\subseteq \subseteq Q\subseteq P$. De $Q\neq P$, mert akkor Q z-ideál. Ennélfogva vagy $Q=I$, s ekkor I prímideál, vagy $I\subset Q$, ami lehetetlen az I maximális volta miatt.

IRODALOM

[1] L. Gillman and M. Jerison: Rings of Continuons Functions ,Van Nostrand, New York, 1960.

[2] Jiang Luh: On the concepts of radical of semigroup having kernel, Portugaliae Math., 19, 188—189, 1960.

[3] G Mason: z-Ideals and Prime Ideals, Journal of Algebra, 26, 280—297, 1973.

ÜBER DIE IDEALE VON KOMMUTATIVEN HALBGRUPPEN

J. Szendrei

In vorliegender Arbeit werden die z-Ideale und Primideale einer kommutativen Halbgruppe mit Eins- und Nullelement untersucht. Ähnliche und weitere Untersuchungen für kommutative Ringe mit Einselement wurden durch G. Mason [3] durchgeführt.

ОБ ИДЕАЛАХ КОММУТАТИВНОЙ ПОЛГРУППЫ

Я. Сендреи

В данной работе мы определяем понятие идеала — z в полгруппе S° с коммутативным модулем и нулевым элементом, поддобно тому, как в своей работе G. Mason [3] сделал в кольцах с коммутативным модулем. Мы исследуем связь полгруппы S° идеала — z и первичных идеалов (прим идеалов) и простые свойства этой связи.