MEGJEGYZÉSEK A FÉLGYŰRŰK BŐVÍTÉSEIHEZ

SZENDREI JÁNOS

1. A gyűrű olyan $(R; +, \cdot)$ kétműveletes algebrai struktúra, amelyben az R nem üres halmaz, a $+$ művelet kommutatív, asszociatív és invertálható, a $\cdot$ művelet asszociatív és a $+$ műveletre nézve mindkét oldalról disztributív. A gyűrűnek többféle általánosítását szokás tárgyalni, amelyek úgy jönnek létre, hogy az említett követelmények közül egyet vagy többet elhagyunk, ill. enyhítünk. Ha a $+$ művelettől nem követeljük meg a kommutativitást és az invertálhatóságot, akkor a félgyűrű fogalmához jutunk. Más szóval az $(S; +, \cdot)$ kétműveletes algebrai struktúra félgyűrű, ha S nem üres halmaz és ebben mindkét művelet asszociatív (azaz $(S; +)$ és $(S; \cdot)$ félcspoort), és a $\cdot$ művelet a $+$ műveletre nézve mindkét oldalról disztributív.

Félgyűrűt alkot a természetes számok halmaza az összeadásra és a szorzásra nézve, s itt mindkét művelet kommutatív. A 0-nál nagyobb egész együtthatós polinomok halmaza is félgyűrűt alkot az összeadás és a szorzás szerint.

Ha az $(S; +, \cdot)$ félgyűrűben az $(S; +)$ félcsoportnak van 0^+ neutrális eleme, akkor ezt a félgyűrű additív zéruselemének nevezzük. Az $(S; +, \cdot)$ félgyűrűnek a 0 multiplikatív zéruseleme, ha minden $s(\in S)$ elemre $s0=0s=0$ teljesül. Megjegyezzük, hogy általában az additív zéruselem nem multiplikatív zéruselem. Ha azonban az összeadás kancellatív, azaz $a+c=b+c$ fennállásából $a=b$ következik, akkor a disztributivitás miatt az additív zéruselem egyben multiplikatív zéruselem is.

Az $(S; \cdot)$ félcsoport jobb oldali egységelemét a félgyűrű jobb egységelemének nevezzük. Hasonlóan értelmezhető a félgyűrű bal egységeleme, ill. az egységeleme is.

Az alábbiakban a félgyűrűk transzlációit, bitranszlációit vizsgáljuk, s ezek segítségével egy félgyűrű-konstrukciót adunk meg. WEINERT és GRIEPENTROG [3] dolgozatának 1. és 2. tételében elegendő feltételt ad egy félgyűrű-konstrukcióra. Ebben a dolgozatban megmutatjuk, hogy ez a feltétel szükséges és elegendő feltétel ahhoz, hogy a tárgyalt konstrukció félgyűrű legyen. Bevezetjük a félgyűrű holomorfjainak a fogalmát, amely a RÉDEI [2] által bevezetett gyűrűk holomorfjainak általánosítása. A félcsoportok holomorfjaival a [2] dolgozat foglalkozik. Végül a félgyűrűk egységelemes bővítéseivel foglalkozunk, új bizonyítást adva a [3] dolgozat 3. tételére.

2. Az $(S; +, \cdot)$ félgyűrű elemei legyenek $s, t, \ldots$ Az S önmagába való

$$\alpha: S \to S \ (s \to \alpha s)$$

leképezéseinek halmazát jelölje $M=M(S)$. A továbbiakban fontos szerepet játszanak az $(S; +)$ *endomorfizmusai,* azaz az olyan

$$\eta: S \to S \ (s \to \eta s)$$

leképezések, amelyekre

$$\eta(s+t) = \eta s + \eta t$$

teljesül. Az $(S; +)$ összes endomorfizmusainak halmazát jelölje $E=E(S)$. Nyilvánvaló, hogy $E \subseteq M$.

Az $(S; \cdot)$ félcsoportnak pedig azokra a

$$\lambda: S \to S \ (s \to \lambda s)$$

leképezéseire lesz szükségünk, amelyekre

$$\lambda(st) = (\lambda s)t$$

teljesül. Ezek az $(S; \cdot)$ félcsoport bal *transzlációi*, amiknek a halmazát $\Lambda=\Lambda(S)$ jelöli. Az $(S; \cdot)$ félcsoportnak a

$$\lambda_a: S \to S \ (s \to \lambda_a s := as)$$

alakú leképezéseit belső bal transzlációknak nevezzük. Ezek halmazát $\Lambda_i=\Lambda_i(S)$ jelöli. Nyilvánvalóan teljesül a következő:

$$\Lambda_i \subseteq \Lambda \subseteq M.$$

Az $(S; \cdot)$ félcsoportnak az olyan

$$\varrho: S \to S \ (s \to \varrho s)$$

leképezései, amelyekre

$$\varrho(st) = s(\varrho t)$$

teljesül, az $(S; \cdot)$ jobb transzlációi. Ezek halmazát $P=P(S)$ jelöli. A

$$\varrho_a: S \to S \ (s \to \varrho_a s := sa)$$

leképzések a belső jobb transzlációk, amiknek a halmazát $P_i=P_i(S)$ jelöli. Most is igaz a következő:

$$P_i \subseteq P \subseteq M.$$

Megjegyezzük, hogy az S-nek önmagára való identikus leképezése, amit ι jelöl, nyilvánvalóan eleme Λ-nak, P-nak és M-nek is. Az $\iota \in \Lambda_i$, ill. $\iota \in \Lambda_i$ pontosan akkor teljesül, ha $(S; \cdot)$-nek van bal, ill. jobb egységeleme.

Az $(S; +, \cdot)$ félgyűrű önmagába való összes leképzéseinek M halmazában az összeadást és a szorzást a következő módon definiáljuk:

$$(\alpha+\beta)s := \alpha s+\beta s, \tag{1}$$

$$(\alpha\beta)s := \alpha(\beta s). \tag{2}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy az $(M; +, \cdot)$ kétműveletes algebrai struktúrában mindkét művelet asszociatív (azaz $(M; +)$ és $(M; \cdot)$ félcsoport), továbbá a jobb oldali disztributivitás teljesül, de a bal oldali általában nem. Az $(M; +, \cdot)$ tehát álltalában nem félgyűrű. Hasonló igaz a $(\Lambda; +, \cdot)$ és $(P; +, \cdot)$ struktúrára is. A $(\Lambda_i; +, \cdot)$ és a $(P_i; +, \cdot)$ azonban, amint az könnyen ellenőrizhető, félgyűrű.

Könnyen belátható, hogy $\lambda_{st}=\lambda_s \lambda_t$ és $\varrho_{st}=\varrho_t \varrho_s$. Ennélfogva a

$$\varphi: s \to \Lambda_i \ (s \to \lambda_s), \text{ ill. } \psi: s \to P_i \ (s \to \varrho_s)$$

leképezés az $(S; +, \cdot)$ félgyűrűnek a $(\Lambda_i; +, \cdot)$ félgyűrűre való homomorf, ill. a $(P_i; +, \cdot)$ félgyűrűre való antihomomorf leképezése. Ez utóbbi miatt célszerű bizonyos esetekben az $(M; \cdot)$ félcsoport $(M; \circ)$ duálisát tekinteni, ami azt jelenti,

hogy M-ben a $\circ$ műveletet a következőképpen értelmezzük: $\alpha \circ \beta := \beta\alpha$. Ekkor a ψ leképezés az $(S; +, \cdot)$ félgyűrűnek a $(P_i; +, \circ)$ félgyűrűre való homorf leképezése. Természetesen, az $(M; +, \circ)$ struktúra az $(M; +, \cdot)$ struktúrának duálisa, s így balról disztributív.

3. Tekintsük az $M \cup S$ egyesítési halmazt, ahol $M \cap S = \emptyset$, és az S-ben, ill. M-ben értelmezett műveleteket kiegészítjük a „vegyes" elemek összeadásával és szorzásával az alábbi módon:

$$\alpha + s := \alpha + \lambda_s, \qquad s + \alpha := \lambda_s + \alpha, \tag{3}$$

$$\alpha \cdot s := \alpha s, \qquad s \cdot \alpha := \lambda_s \alpha. \tag{4}$$

Az így kapott $(M \cup S; +, \cdot)$ struktúrának, amely általában nem félgyűrű, olyan $(M^* \cup S; +, \cdot)$ részstruktúráit keressük, amelyek félgyűrűk.

Érvényes a következő

1. tétel. *Az $(M \cup S; +, \cdot)$ struktúrának egy $(M^* \cup S; =, \cdot)$ részstruktúrája, ahol $M^* \neq \emptyset$, pontosan akkor félgyűrű, ha $(M^*; +, \cdot)$ olyan részfélgyűrűje az $(M; +, \cdot)$ struktúrának, amelyre*

$$\Lambda_i \subseteqq M^* \subseteqq \Lambda \cap E = \Lambda_E.$$

Továbbá, S az $M^* \cup S$-nek olyan bal ideálja, amelyre igaz a következő:

$$x \cdot y \in S, x, y\ M^* \cup S \Rightarrow y \in S.$$

Bizonyítás. Legyen $(M^* \cup S; +, \cdot)$ félgyűrű. Ekkor (1) és (2) miatt M^* a két műveletre nézve zárt, s így $(M^*; +, \cdot)$ szintén félgyűrű. A (3) és a (4) alatti műveletek értelmezése miatt pedig $\Lambda_i \subseteqq M^*$. A szorzás asszociativitása alapján

$$\alpha(st) = \alpha \cdot (st) = (\alpha \cdot s)t = (\alpha s)t \quad (\alpha \in M)$$

s ezért M minden eleme bal transzlláció. A disztributivitás miatt

$$\alpha(s+t) = \alpha \cdot (s+t) = \alpha \cdot s + \alpha \cdot t = \alpha s + \alpha t \quad (\alpha \in M)$$

alapján következik, hogy M^* minden eleme endomorfizmus. Ezekből adódik, hogy

$$M^* \subseteqq \Lambda \cap E = \Lambda_E.$$

Az állítás megfordításához elegendő a vegyes elemekre belátni az asszociativitást és a disztributivitást. Az összeadás disztributivitása nyilvánvaló. A szorzás asszociativitása $\lambda_{\alpha s} = \alpha\lambda_s$ teljesüléséből és abból adódik, hogy M^* elemei bal transzlációk. A disztributivitás pedig abból következik, hogy M^* elemei endomorfizmusok és $\lambda_{s+t} = \lambda_s + \lambda_t$ teljesül.

A tétel utolsó állítása a szorzás definíciójából nyilvánvaló. Ezzel az 1. tételt bebizonyítottuk.

Az 1. tételből egyszerűen adódnak az alábbi következmények:

I. $(M^* \cup S; +)$ akkor és csak akkor kommutatív, ha $(S; +)$ is az.

II. Az $(M^* \cup S$ félgyűrű additív zéruseleme — feltéve, hogy létezik — az S félgyűrűnek is additív zéruseleme.

III. Az S félgyűrű multiplikatív bal (jobb) zéruseleme amennyiben van, az $M^* \cup S$ félgyűrűnek is ugyanilyen eleme.

IV. $(S; \cdot)$ -nek minden $\lambda (\in M^*)$ bal transzlációja az $(M^* \cup S; \cdot)$-nek λ_λ bal transzlációjával indukálható.

Az 1. tétel duálisát kapjuk, ha az S-beli és az $(M; +, \circ)$-beli műveleteket a következőképpen terjesztjük ki az $M \cup S$ halmazra:

$$(3') \qquad \alpha + s := \alpha + \varrho_s, \qquad s + \alpha := \varrho_s + \alpha,$$

$$(4') \qquad \alpha \cdot s := \alpha \circ \varrho_s i = \varrho_s \alpha, \qquad s \cdot \alpha := \alpha s.$$

1'. tétel. *Az $(M \cup S; +, \circ)$ struktúrának egy $M^\circ \cup S$ részhalmaza, ahol $M^\circ \neq \emptyset$, pontosan akkor félgyűrű, ha $(M^\circ; +, \circ)$ olyan részfélgyűrűje az $(M; +, \circ)$ struktúrának, amelyre*

$$P_i \subseteqq M^\circ \subseteqq P \cap E = P_E.$$

Továbbá, S az $M^\circ \cup S$-nek olyan jobb ideálja, amelyre igaz:

$$x \cdot y \in S, x, y \in M^\circ S \Rightarrow x \in s.$$

4. Most a fenti konstrukcióknak a szimmetrikus megfelelőjét keressük meg. Évégből tekintsük az $(M; +, \cdot)$ és az $(M; +, \circ)$ struktúrák direkt összegét. Más szóval az $M \times M$ Descartes-féle szorzatban értelmezzük az összeadást és a szorzást a következő módon:

$$(5) \qquad (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) := (\alpha + \gamma, \beta + \delta),$$

$$(6) \qquad (\alpha, \beta)(\gamma, \delta) := (\alpha\gamma, \beta \circ \delta) := (\alpha\gamma, \delta\beta).$$

Az előzőekből következik, hogy az így kapott kétműveletes algebrai struktúra általában nem félgyűrű. $M \times M$-et a későbbiekben D jelöli.

Az S-ben és a D-ben értelmezett műveleteket a $D \cup S$ egyesítetési halmazra a következő definícióval terjesztjük ki:

$$(7) \qquad (\alpha, \beta) + s := (\alpha, \beta) + (\lambda_s, \lambda_s), \quad s + (\alpha, \beta) := (\lambda_s, \lambda_s) + (\alpha, \beta),$$

$$(8) \qquad (\alpha, \beta) \cdot s := \alpha s, \qquad s \cdot (\alpha, \beta) := \beta s.$$

Az így kapott $(D; +, \cdot)$ kétműveletes algebrai struktúrának olyan részfélgyűrűit keressük, amelyek S-et tartalmazzák.

Bebizonyítjuk a következő tételt.

2. tétel. *A $(D; +, \cdot)$ struktúrának egy $(M_1 \times M_2) \cup S$ részhalmaza, ahol $\emptyset \neq M_1 \times M_2 = D$, akkor és csak akkor félgyűrű a tekintett műveletek szerint, ha $(M_1; +, \cdot)$ és $(M_2; +, \cdot)$ olyan részfélgyűrűk, amelyekre igazak a következők:*

a) $\Lambda_i \subseteqq M_1 \subseteqq \Lambda_E$,
b) $P_i \subseteqq M_2 = P \cap E = P_E$,
c) minden $(\lambda, \varrho)(\in M_1 \times M_2)$ transzlációpárra teljesül:
$$(\varrho s)t = s(\lambda t) \qquad (s, t \in S),$$
d) bármely $\lambda(\in M_1)$ és $\varrho(\in M_2)$ felcserélhető, azaz
$$\varrho(\lambda s) = \lambda(\varrho s).$$

Továbbá S az $((M_1 \times M_2) \cup S; +, \cdot)$ félgyűrűnek komplett prím ideálja, azaz

$$x \cdot y \in S, x, y \in (M_1 \times M_2) \cup S \Rightarrow x \in S \text{ vagy } y \in S.$$

Mielőtt a 2. tétel bizonyítására rátérünk, megemlítjük, hogy az *a)* és *b)* első fele azt jelenti, hogy $M_1 \times M_2$ elemei bal és jobb transzlációkból álló párok. Ezeket *bitranszlációk*nak nevezzük. A *c)* tulajdonságú bitranszlációkat kapcsoltaknak mondjuk. Megjegyezzük, hogy gyakran az ilyen tulajdonságú transzlációpárokat nevezik

bitranszlációknak. A *d)* azt jelenti, hogy $M_1 \times M_2$-ben bármelyik bitranszláció első komponense felcserélhető akármelyik bitranszláció második komponensével. A bitranszlációk ilyen halmazait *permutabiliseknek* nevezik. A 2. tétel ezen fogalmak segítségével a következő módon is megfogalmazható:

Az $((M_1 \times M_2) \cup S;\ +,\ \cdot)$ akkor és csak akkor félgyűrű, ha $M_1 \times M_2 (\neq \emptyset)$ olyan permutabilis (kapcsolt) bitranszlációk halmaza, amelyre teljesül a következő:

$$\Lambda_i \times P_i \subseteqq M_1 \times M_2 \subseteqq \Lambda_E \times P_E.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $M_1 \times M_2 \cup S (\neq S)$ a (7) és (8) műveletek szerint félgyűrű. Ekkor $M_1 \times M_2$ a benne definiált műveletekre nézve zárt, tehát félgyűrű. (7) és (8) alapján $\Lambda_i \subseteqq M_1$, $P_i = M_2$. A disztributivitás miatt pedig $M_1, M_2 \subseteqq E(S)$. A szorzás asszociativitásából az $(\alpha, \beta) \cdot st$, ill. $st \cdot (\alpha, \beta)$ szorzatok alapján adódik, hogy $\alpha \in \Lambda$, $\beta \in P$, azaz

$$M_1 \subseteqq \Lambda,\ M_2 \subseteqq P.$$

Az $s \cdot (\lambda, \varrho) \cdot t$ alakú szorzat alapján kapjuk a *c)* tulajdonságot, tehát $M_1 \times M_2$ elemei kapcsolt bitranszlációk. A $(\lambda, \varrho_1) \cdot s \cdot (\lambda_1, \varrho)$ szorzat alapján pedig adódik, hogy $M_1 \times M_2$ permutábilis bitranszlációk halmaza.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $(M_1;\ +,\ \cdot)$ és $(M_2;\ +,\ \circ)$ félgyűrűkre az *a)—d)* tulajdonságok teljesülnek. Először azt kell belátnunk, hogy $(M_1 \times M_2) \cup S$-ben két elem összegére és szorzatára is teljesülnek az *a)—d)* feltételek. Az *a)* és *b)* teljesülése nyilvánvaló. *c)* és *d)* így látható be:

$$(s \cdot (\varrho_1 + \varrho_2)) \cdot t = ((\varrho_1 + \varrho_2) s) t = (\varrho_1 s) t + (\varrho_2 s) t = s(\lambda_1 t) + s(\lambda_2 t) = s \cdot ((\lambda_1 + \lambda_2) t),$$

$$(s \cdot (\varrho_2 \varrho_1)) t = (\varrho_2 \varrho_1 s) t = (\varrho_2 (\varrho_1 s)) t = (\varrho_1 s)(\lambda_2 t) = s(\lambda_1 (\lambda_2 t)) = s((\lambda_1 \lambda_2) t),$$

$$\varrho((\lambda_1 + \lambda_2 s)) = \varrho(\lambda_1 s) + \varrho(\lambda_2 s) = \lambda_1 (\varrho s) + \lambda_2 (\varrho s) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\varrho s),$$

$$\varrho((\lambda_1 \lambda_2 s)) = \varrho(\lambda_1 (\lambda_2 s)) = \lambda_1 (\varrho (\lambda_2 s)) = \lambda_1 (\lambda_2 (\varrho s)) = ((\lambda_1 \lambda_2) \varrho) s.$$

Ekkor (7) alapján $(M_1 \times M_2) \cup S$-ben az összeadás nyilván asszociatív, a szorzás pedig (8), valamint *c)*, *d)* alapján szintén az. A disztributivitás pedig abból következik, hogy $M_1, M_2 \subseteqq K$. Ezzel a 2. tétel bizonyítását befejeztük.

5. A $(D \cup S;\ +,\ \cdot)$ struktúrában több olyan részfélgyűrű lehet, amely kielégíti a 2. tételbeli követelményeket. Ezek között fontos szerepet kapnak a maximális ilyen részfélgyűrűk. Ezeket az $(S;\ +,\ \cdot)$ félgyűrű *holomorfjai*nak nevezzük. Más szóval az $(S;\ +,\ \cdot)$ félgyűrű holomorfjai az S-nek a $(D;\ +,\ \cdot)$ struktúrabeli idealizátorai.

Amint a gyűrűknél és a félcsoportoknál, itt is felvethető az a probléma, hogy melyek azok a félgyűrűk, amelyeknek egyetlen holomorfja van. A félcsoportoknál, ill. gyűrűknél ismert feltételek a félgyűrűkre is alkalmazhatók, mivel ezek lényegében a bitranszlációk permutábilis halmazaival kapcsolatosak. Érvényes tehát a következő:

3. tétel. *Az* $(S;\ +,\ \cdot)$ *félgyűrűnek egyetlen holomorfja van, ha*

a) $(S;\ \cdot)$*-nak bármely eleme szorzatként írható;*

b) $(S;\ \cdot)$ *gyengén reduktív.*

Megjegyezzük, hogy az a) esethez tartoznak a fél oldali egységelemmel rendelkező félgyűrűk is.

A 1., ill. 1'. tétel alapján bevezethető a bal (jobb) holomorf fogalma is.

6. Legyen $(T; +, \cdot)$ félgyűrű az $(S; +, \cdot)$ félgyűrűnek olyan egységelemes bővítése, amelyben S ideál. A T minden a eleme az $(S; \cdot)$-nek

$$\lambda_{\bar{a}}: S \to S \; (s \to \lambda_{\bar{a}} s = \bar{a}s) \quad \varrho_{\bar{a}}: S \to S \; (s \to \varrho_{\bar{a}} s = s\bar{a})$$

bal, ill. jobb transzlációját indukálja. Legyen

$$\Lambda_T = \{\lambda_{\bar{a}} | \bar{a} \in T\}, \quad P_T = \{\varrho_{\bar{a}} | \bar{a} \in T\}.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy $(\Lambda_T; +, \cdot)$ és $(P_T; +, \cdot)$ félgyűrű, és

$$\{\iota\} \cup \Lambda_i \subseteq \Lambda_T \subseteq \Lambda \cap E, \; \{\iota\} \cup P_i \subseteq P_T \subseteq P \cap E,$$

továbbá $\Lambda_T \times P_T$ elemei kapcsolt permutábilis bitranszlációk. Az elmondottakból az is nyilvánvaló, hogy az $\{\iota\} \cup \Lambda_i$ által generált $\bar{\Lambda}_i$ additív félcsoportra $\bar{\Lambda}_i \subseteq E$ teljesül. Ebből pedig a bal transzlációk közötti műveletek alapján következik, hogy $(\bar{\Lambda}_i; +, \cdot)$ félgyűrű. Hasonló igaz $(\bar{P}_i; +, \cdot)$-ra is.

Megfordítva, ha $(\Lambda_i; +, \cdot)$ és $(P_i; +, \cdot)$ félgyűrű, akkor a $(\Lambda_i \times P_i; +, \cdot)$ félgyűrűre teljesülnek a 2. tétel *a)—d)* feltételei. Ez pedig azt jelenti, hogy $(\Lambda_i \times P_i \cup S; +, \cdot)$ félgyűrű az S-nek egységelemes bővítése. Ezzel bebizonyítottuk a következő, [3]-ban szereplő tételt:

4. tétel. *Az $(S; +, \cdot)$ félgyűrűnek akkor és csak akkor van egységelemes bővítése, ha $(\bar{\Lambda}_i; +, \cdot)$ és $(\bar{P}_i; +, \cdot)$ félgyűrű. Ez utóbbi feltétel ekvivalens azzal, hogy $\bar{\Lambda}_i; \bar{P}_i \subseteq E$.*

IRODALOM

[1] Rédei L.: Die Holomorphentheorie für Gruppen und Ringe, Acta Math. Acad. Sci. Hung., 5 (1954), 169—195.

[2] Szendrei J.: A félcsoportok holomorfjai, Szegedi Tanárképző Főiskola Tud. Közl., 1965, 187—193.

[3] Weinert, H. J., Griepentrog, R. D.: Embedding Semirings by Translational Hulls, Semigroup Forum, 14 (1977), 235—246.

BEMERKUNGEN ZUR ERWEITERUNGEN VON HALBRINGEN

J. SZENDREI

In der Erweiterungen von Halbringen spielen die Bitranslationen, die miteinander permutabel sind, eine wichtige Rolle. Mit Hilfe von speziellen Bitranslationen wird eine Halbringkonstruktion untersucht. Auf diese Weise führen wir den Begriff der Holomorphe von Halbringen ein. Endlich werden die Erweiterungen mit Einselement von Halbringen betrachtet.

О РАСШИРЕНИЯХ ПОЛУКОЛЕЦ

Я. СЕНДРЕИ

Пользуясь отображениями из полуколца в себя, даютсю такие расширения полуколца S в которых является левым или двухсторонным идеалом, соответственно. С помощью этой конструкции вводится понятие голоморфа полуколца. Дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы полуколцо обладало расширением с единицей.